**UVSQ**
**2015-2016**

# Méthodes numériques et programmation avancée
# Contrôle du 15 mars 2016

*Aucun document n'est autorisé.*

**Exercice 1.**
Soit $c$ et $\alpha > 0$ deux constantes réelles, et $u_0$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, et à valeurs strictement positives. Résoudre l'équation d'advection

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = -\alpha u^2(x,t),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

à l'aide de la méthode des caractéristiques.

**Corrigé succinct.** Les caractéristiques sont données ici par les droites $X(t) = x^* + c(t - t^*)$ pour tout couple $(x^*, t^*)$. On vérifie facilement que le long de ces caractéristiques, la solution de l'équation considérée vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt} u(X(t), t) = -\alpha u^2(X(t), t).$$

En divisant par $-u^2(X(t), t)$ et en intégrant entre $t = 0$ et $t = t^*$, on obtient donc

$$\frac{1}{u(X(t^*), t^*)} - \frac{1}{u_0(X(0))} = \alpha t^*$$

ce qui donne finalement

$$u(x^*, t^*) = \frac{u_0(x^* - ct^*)}{1 + \alpha t u_0(x^* - ct^*)}.$$

La solution est donc donnée par

$$u(x,t) = \frac{u_0(x - ct)}{1 + \alpha t u_0(x - ct)}.$$

**Exercice 2.**
Soit une constante $c$ strictement positive et $u_0$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, régulière, bornée et dont toutes les dérivées sont également bornées. On considère l'équation d'advection

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0, \, \forall x \in \mathbb{R}, \ \ \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \, \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

En utilisant des notations habituelles, on pose $u_j^0 = u_0(x_j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et on considère le schéma aux différences finies de Lax-Friedrichs

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
0) Rappeler l'expression de la solution du système (1).
1) Donner la définition de l'erreur de consistance du schéma de Lax-Friedrichs.
2) En utilisant des développements de Taylor, mesurer cette erreur de consistance.
3) Le schéma de Lax-Friedrichs est-il consistant sans condition sur les pas d'espace $\Delta x$ et de temps $\Delta t$ ? Expliquer.
4) On suppose à partir de cette question que le pas de temps $\Delta t$ est choisi de la forme $\Delta t = \lambda \Delta x$ pour une constante $\lambda$ à préciser. Le schéma de Lax-Friedrichs est-il consistant et si oui à quel ordre en temps et en espace ?
5) Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs peut s'écrire sous la forme

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n.$$

On précisera les coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. De quelle quantité dépendent ces coefficients ?
6) Calculer la somme des coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Donner une condition pour que ces trois coefficients soient positifs.
7) Montrer que sous cette condition, le schéma de Lax-Friedrichs est stable en norme $L^\infty$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n$ et tout $j$,

$$|u_j^n| \leq M.$$

On exprimera la constante $M$ en fonction de la donnée initiale.
8) Montrer la convergence du schéma de Lax-Friedrichs en utilisant les résultats

précédents (mais sans vous contenter d'utiliser le théorème de Lax).

**Corrigé succinct.**
0) La solution est donnée par $u(x,t) = u_0(x - ct)$.
1) L'erreur de consistance $\varepsilon_n^n$ est définie par

$$\varepsilon_j^n = \frac{2u(x_j, t^{n+1}) - u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta t} + c\frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2\Delta x}$$

où $u$ est la solution exacte de l'équation.
2) Des calculs simples montrent qu'il existe $t_1$, $x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^4$ tels que

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2}\partial_{tt}^2 u(x_j, t_1) - \frac{\Delta x^2}{4\Delta t}\big(\partial_{xx}^2 u(x^1, t^n) + \partial_{xx}^2 u(x^2, t^n)\big) +$$

$$+ c\frac{\Delta x^2}{12}\big(\partial_{xxx}^3 u(x^3, t^n) + \partial_{xxx}^3 u(x^4, t^n)\big).$$

3) On voit que l'erreur de consistance ne tend pas forcément vers 0 lorsque $\Delta t$ et $\Delta x$ tendent vers 0. Il faut supposer en plus que le rapport $\Delta x^2/\Delta t$ tend vers 0.
4) Sous l'hypothèse $\Delta t = \lambda \Delta x$, il est ainsi clair que le schéma est consistant à l'ordre 1 en temps et en espace (le rapport $\Delta x^2/\Delta t$ tend clairement vers 0 sous cette hypothèse).
5) Les coefficients sont donnés par

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + c\lambda), \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}(1 - c\lambda).$$

Ces coefficients ne dépendent que de la quantité $c\lambda$.
6) La somme des coefficients vaut 1 et ils sont tous positifs sous la condition CFL

$$c\lambda = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1.$$

7) Comme la mise à jour $u_j^{n+1}$ est une combinaison convexe de $u_{j-1}^n$, $u_j^n$, et $u_{j+1}^n$ sous la condition CFL, il vient tout de suite

$$|u_j^{n+1}| \le \max_j |u_j^n|$$

pour tout $n$ et pour tout $j$. On en déduit donc que pour tout $n \ge 0$ et pour tout $j$

$$|u_j^n| \le \max_j |u_j^0|,$$

c'est-à-dire, puisque $u_j^0 = u_0(x_j)$,

$$||u^n||_\infty \leq ||u_0||_\infty.$$

8) On commence par définir l'erreur $e_j^n = u_j^n - u(x_j, t^n)$. Cette erreur vérifie l'équation

$$\frac{2e_j^{n+1} - e_{j+1}^n - e_{j-1}^n}{2\Delta t} + c\frac{e_{j+1}^n - e_{j-1}^n}{2\Delta x} = -\varepsilon_j^n,$$

ou encore

$$e_j^{n+1} = \alpha e_{j-1}^n + \gamma e_{j+1}^n - \Delta t \varepsilon_j^n.$$

On obtient ainsi

$$|e_j^{n+1}| = ||e^n||_\infty + \Delta t|\varepsilon_j^n|.$$

D'après la question 2) et la régularité de la solution, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\varepsilon_j^n| \leq C(\Delta t + \Delta x)$$

ce qui entraîne

$$|e_j^{n+1}| = ||e^n||_\infty + C\Delta t(\Delta t + \Delta x)$$

puis

$$|e_j^n| = ||e^0||_\infty + Cn\Delta t(\Delta t + \Delta x)$$

c'est-à-dire, puisque $u_j^0 = u_0(x_j)$,

$$||e^n||_\infty = Cn\Delta t(\Delta t + \Delta x).$$

Pour tout temps $T$ tel que $n\Delta t \leq T$, on a donc

$$||e^n||_\infty = CT(\Delta t + \Delta x).$$

Le schéma est donc bien convergent puisque l'erreur tend vers 0 avec $\Delta t$ et $\Delta x$.