UVSQ
MSMA850 **2014-2015**

Partiel du 12 mars 2015

Aucun document n'est autorisé.

Questions de cours.
1) Montrer que la distribution de Dirac δ_0 n'appartient pas à $L^2(-1,1)$.
2) Montrer que l'application $L^2(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ qui à toute fonction f de $L^2(\Omega)$ associe sa distribution T_f de $\mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi, \quad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

est injective.

Exercice.
Soit $\Omega =]a,b[$, $(a < b)$. Soit c une fonction positive, définie et continue sur $[a,b]$ et $f \in L^2(]a,b[)$. On se donne également deux réels α et β avec $\alpha \geq 0$. On se propose d'étudier le problème aux limites (P) qui consiste à trouver u solution de

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x),\ \forall x \in \Omega, \\ u(a) = 0,\ \alpha u(b) + u'(b) = \beta. \end{cases}$$

Soit V le sous-espace de $H^1(\Omega)$ défini par

$$V = \{v \in H^1(\Omega),\ v(a) = 0\}.$$

1) Expliquer pourquoi cela a un sens d'imposer la valeur en a d'une fonction de $H^1(\Omega)$.
2) Montrer que V est un espace de Hilbert pour la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$.
3) Montrer que V est aussi un espace de Hilbert pour la norme issue du produit scalaire défini par

$$(u,v)_V = \int_a^b u'(x)v'(x)dx.$$

4) Ecrire la formulation variationnelle du problème (P).
5) Montrer qu'elle admet une unique solution dans V.
6) Montrer que cette solution est solution de (P) dans un sens à définir.
7) On suppose dans cette question que $c = 0$ et $\Omega =]0, 1[$. Montrer que pour $\alpha = -1$, le problème est mal posé, ce qui justifie l'hypothèse $\alpha \geq 0$ de départ.
8) Peut-on affaiblir l'hypothèse $c \geq 0$?

Corrigé du contrôle du jeudi 12 mars 2015.

Question de cours

voir le cours

Exercice

1) $V = \{ v \in H^1(]a,b[), \ v(a) = 0 \}$

On a vu en cours que toute fonction $v \in H^1(]a,b[)$, avec $a<b$, admet un représentant continu sur $[a,b]$. Parler de $v(a)$ a donc un sens pour une fonction de $H^1(]a,b[)$, tout comme imposer $v(a)=0$.

2) On a vu en cours qu' $\exists\, C>0$, $\forall v \in H^1(]a,b[)$, $\sup_{x\in[a,b]} |v(x)| \leq C\|v\|_{H^1}$.

Montrons alors que V est un fermé de $H^1(]a,b[)$, et donc un espace de Hilbert pour la norme sur H^1.

Soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de V, ie $v_n(a)=0$, telle que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H^1} v$, ie $\|v_n - v\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On a alors $\quad |v(a)| = |v(a) - v_n(a)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |v(x)-v_n(x)| \leq C\|v-v_n\|_{H^1}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $v(a)=0$.

3) On considère V muni de la norme issue du produit scalaire $(u,v)_V = \int_a^b u'v'$, ie $\|u\|_V^2 = \|u'\|_{L^2}^2$. On a donc clairement

$$\|u\|_V^2 \leq \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{puisque} \quad \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 .$$

Montrons que V est un espace de Hilbert pour cette nouvelle norme, en montrant que les deux normes sont équivalentes sur V.

On a déjà $\|u\|_V \leq \|u\|_{H^1}$.

Soit $u \in V$. Comme $u(a) = 0$, on a

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad |u(x)| \leq \int_a^x |u'(t)|\,dt \leq \sqrt{x-a}\,\|u'\|_{L^2} \leq \sqrt{b-a}\,\|u'\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad |u(x)|^2 \leq (b-a)\,\|u'\|^2_{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|^2_{L^2} = \int_a^b |u(x)|^2 dx \leq (b-a)^2\,\|u'\|^2_{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^2} \leq (b-a)\,\|u'\|_{L^2}$$

c'est-à-dire $\|u\|_{L^2} \leq (b-a)\,\|u\|_V$

On a donc clairement

$$\|u\|^2_{H^1} = \|u\|^2_{L^2} + \|u\|^2_V \leq \left[1 + (b-a)^2\right] \|u\|^2_V$$

ie $\|u\|_{H^1} \leq \sqrt{1+(b-a)^2}\,\|u\|_V$

Les normes $\|\cdot\|_{H^1}$ et $\|\cdot\|_V$ étant équivalentes sur V, et V étant un espace de Hilbert pour $\|\cdot\|_{H^1}$, V est aussi un espace de Hilbert pour $\|\cdot\|_V$

<u>Remarque</u> Soit $v \in V$, ie $v \in H^1(]a,b[)$ et $v(a) = 0$

$\|v\|_V = 0 \iff v' = 0$ ds $L^2(]a,b[)$ (donc ds $\mathcal{D}'(]a,b[)$)

$\iff v = cte$ sur $[a,b]$

$\iff v = 0$ sur $[a,b]$ car $v(a) = 0$.

4) Soit $u \in H^2(]a,b[)$ une solution de (P), ie

$$-u'' + cu = f \;, \quad \text{avec } u(a) = 0 \text{ et } \alpha u(b) + u'(b) = \beta .$$

Soit $v \in H^1(]a,b[)$. En multipliant l'équation par v et en intégrant sur $]a,b[$, on obtient

$$-\int_a^b u''v + \int_a^b cuv = \int_a^b fv$$

D'après la formule de Green, on a donc

$$\int_a^b u'v' - \left(u'(b)\,v(b) - u'(a)\,v(a)\right) + \int_a^b cuv = \int_a^b fv$$

Si on suppose de plus que $v \in V$, ie $v(a) = 0$, on obtient donc

$$\int_a^b u'v' + \int_a^b cuv = \int_a^b fv + u'(b)\,v(b) .$$

La formulation variationnelle du problème (P) est donc, puisque $u'(b) = \beta - \alpha u(b)$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ t.q} \\ \mathcal{A}(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

avec $\mathcal{A}(u,v) = \int_a^b u'v' + \int_a^b cuv + \alpha\, u(b)\, v(b)$

$$L(v) = \int_a^b fv + \beta v(b)$$

5) Vérifions les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. La linéarité de L et la bilinéarité de $\mathcal{A}$ sont claires. V est un espace de Hilbert pour la norme sur H^1 ou celle sur V.

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + |\beta| |v(b)| \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} + |\beta|\, C \|v\|_{H^1} \\ &\leq \underbrace{(\|f\|_{L^2} + |\beta|\, C)}_{L} \|v\|_{H^1} . \end{aligned}$$

L est continue.

$$|\mathcal{A}(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \alpha C^2 \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

$$|\mathcal{A}(u,v)| \leq \max(1, \|c\|_{L^\infty})\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \alpha c^2 \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

$$|\mathcal{A}(u,v)| \leq \left[\alpha C^2 + \max(1, \|c\|_{L^\infty})\right]\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

$\mathcal{A}$ est donc continue.

$$\mathcal{A}(u,u) = \int_a^b u'^2 + \int_a^b cu^2 + \alpha\, u(b)^2$$

$$\geqslant \int_a^b u'^2 = \|u\|_V^2 \geqslant \frac{1}{1+(b-a)^2}\|u\|_{H^1}^2$$

$$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \frac{1}{1+(b-a)^2}\|u\|_{H^1}^2$$

$\mathcal{A}$ est donc coercive.

Le théorème de Lax-Milgram assure donc l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel.

6) Comme $\mathcal{D}(]a,b[) \subset V$, le pb variationnel implique

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b cu\varphi = \int_a^b f\varphi$$

ie $-u'' + cu = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc dans L^2

puisque $f \in L^2$ et $u \in V$ donc $u \in H^1$ et $u \in L^2$.

Remarquons que $u'' = -f + cu \in L^2$ de sorte que $u \in H^2(]a,b[)$.

En utilisant la formule de Green, le pb variationnel implique

donc $\quad u'(b)v(b) + \alpha u(b)v(b) = \beta v(b) \quad \forall v \in V$

ie $\left(u'(b) + \alpha u(b) - \beta\right) v(b) = 0 \quad \forall v \in V$.

(voir le cours pour des calculs tout à fait similaires)

En prenant comme v une fonction de V ne valant pas 0 au point b, on en déduit donc que

$$u'(b) + \alpha u(b) - \beta = 0$$

On a donc montré que la solution u du pb variationnel est dans $H^2(]a,b[)$ et vérifie le pb (P) où l'égalité $-u'' + cu = f$ doit être comprise au sens des distributions et donc dans L^2.

7) On sq $c = 0$
$]a,b[=]0,1[$.
$\alpha = -1$.

Le pb (P) s'écrit donc

$$\left\{\begin{array}{l} -u'' = f \\ u(0) = 0 \\ -u(1) + u'(1) = \beta \end{array}\right.$$

On remarque que si on ajoute à une solution de ce problème une fonction affine $g(x) = mx + p$ telle que $g(0) = 0$ et $-g(1) + g'(1) = 0$, ie

$$\left\{\begin{array}{l} p = 0 \\ -m + p + m = 0 \end{array}\right. \quad \text{ie} \quad g(x) = mx,$$

alors on obtient encore une solution.

8) $\mathcal{A}(u,u) = \int_a^b u'^2 + \int_a^b cu^2 + \alpha u(b)^2$

$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \int_a^b u'^2 - \|c^-\|_{L^\infty} \int_a^b u^2 \geqslant \int_a^b u'^2 - \|c^-\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1}^2$

$\mathcal{A}(u,u) \geqslant \left(\frac{1}{1+(b-a)^2} - \|c^-\|_{L^\infty} \right) \|u\|_{H^1}^2$

Donc on peut affaiblir l'hypothèse $c \geqslant 0$ en c t.q $\|c^-\|_{L^\infty} < \frac{1}{1+(b-a)^2}$ où c^- représente la partie négative de c. (voir le cours pour des raisonnements identiques).