Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L2, Géométrie différentielle élémentaire (LSMA422)
Année 2013-2014

Partiel du 20 mars 2014 - 1h30

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (question de cours).
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'unicité de l'application différentielle en u.

Exercice 2
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y.$$

1) Déterminer le ou les points critiques de f.
2) Dire s'il s'agit de minimum ou de maximum locaux.
3) Montrer que

$$f(x,y) = (x + \frac{y}{2} + 1)^2 + \frac{3}{4}(y + \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{3}.$$

4) En déduire que le ou les extremas sont globaux.

Exercice 3 (la lemniscate de Bernoulli).
On se propose d'étudier l'arc paramétré défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4}, \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4}. \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$.
1) En calculant $M(-t)$, expliquer comment réduire l'étude de la courbe à $\mathbb{R}^+$.

2) En calculant $M(\frac{1}{t})$, expliquer comment réduire l'étude de la courbe à $[0, 1]$.
3) Donner le tableau des variations conjointes de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, 1]$.
4) Tracer l'allure de l'arc paramétré.

Les questions suivantes sont indépendantes des précédentes.

5) Vérfier que l'expression de la longueur L d'un arc de vecteur vitesse $(x(t), y(t))$ entre 0 et 1 est

$$L = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^4}} dt.$$

6) Effectuer le changement de variable

$$u = \sqrt{1+t^4}$$

et vérifier que

$$L = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du.$$

7) Calculer la dérivée de l'application $u \to \ln(u + \sqrt{u^2-1})$.
8) En déduire la valeur de L.

Exercice 1

Voir le cours

Exercice 2

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$

$M(t) = (x(t), y(t))$

1) $x(-t) = \dfrac{-t}{1+t^4} = -x(t)$ ie $M(-t) = -M(t)$

$y(-t) = \dfrac{-t}{1+t^4} = -y(t)$

On peut donc réduire l'étude de l'arc à $[0,+\infty[$ quitte à faire ensuite une symétrie de la courbe par rapport à l'origine.

2) $x\left(\frac{1}{t}\right) = \dfrac{1/t}{1+(1/t)^4} = \dfrac{1}{t\left(1+\frac{1}{t^4}\right)} = \dfrac{t^4}{t\,(t^4+1)} = \dfrac{t^3}{1+t^4} = y(t)$

$y\left(\frac{1}{t}\right) = \dfrac{(1/t)^3}{1+(1/t)^4} = \dfrac{1}{t^3\left(1+\frac{1}{t^4}\right)} = \dfrac{t^4}{t^3(t^4+1)} = \dfrac{t}{1+t^4} = x(t)$

On peut donc réduire l'étude de l'arc à $[0,1]$ quitte à faire ensuite une symétrie de la courbe par rapport à la première bissectrice

Exercice 3

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$$

1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y+2 \\ 2y+x+2 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ 2y+x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{2}{3}$

$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ est donc l'unique point critique de f.

2) $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$Hf\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ est donc symétrique définie positive

Puisque $\nabla f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ on en déduit d'après un théorème du cours (condition suffisante d'optimalité d'ordre 2) que $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ est un point de minimum local (au moins) de f.

3) $\left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} + 2x + y + 1 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}\times\frac{4}{3}y$
$+ \frac{3}{4}\times\frac{4}{9} - \frac{4}{3} = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$
$= f(x,y)$

4) On en déduit donc, puisque $\left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 \geq 0$ et $\frac{3}{4}\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$

que $f(x,y) \geq -\frac{4}{3}$. Or $f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$

On en déduit donc que le minimum est global

3) $x'(t) = \dfrac{(1+t^4) - t(0+4t^3)}{(1+t^4)^2} = \dfrac{1+t^4-4t^4}{(1+t^4)^2} = \dfrac{1-3t^4}{(1+t^4)^2}$

$y'(t) = \dfrac{3t^2(1+t^4) - 4 \times t^3 \times t^3}{(1+t^4)^2} = \dfrac{3t^2+3t^6-4t^6}{(1+t^4)^2} = \dfrac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}$

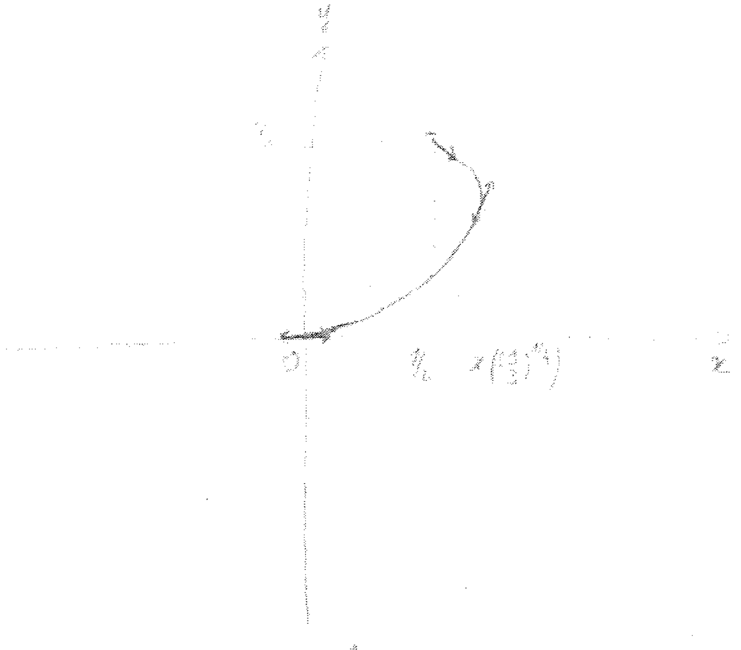
$x'(t) = 0 \iff t^4 = \dfrac{1}{3} \iff t = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1/4}$ sur $[0,1]$

$y'(t) = 0 \iff t^4 = 3$ ~~⟺ t=~~
ce qui n'est pas possible sur $[0,1]$.

	0		$(1/3)^{1/4}$		1
$x'(t)$	1	$+$	0	$-$	$-1/2$
$x(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$1/2$
$y'(t)$	0		$+$		$1/2$
$y(t)$	0		$\nearrow$		$1/2$

$x\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1/4}\right) = \dfrac{(1/3)^{1/4}}{1+1/3} = \dfrac{3 \times (1/3)^{1/4}}{4} = \dfrac{3^{3/4}}{4}$

$y'\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1/4}\right) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3-\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{8}{3}}{\sqrt{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{8 \times 9}{3\sqrt{3} \times 16} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Il suffit ensuite de faire des symétries par rapport à la droite y = x puis par rapport à l'origine.

5) $$L = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{t^2 + t^6}{(1+t^4)^2}}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t\sqrt{1+t^4}}{1+t^4}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$$

6) $$u = \sqrt{1+t^4}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{4t^3}{2\sqrt{1+t^4}} = \frac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}$$

donc $$L = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{2t^3}\, du = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2}\, du = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\, du$$

7) $$\left[\ln(u + \sqrt{u^2-1})\right]'(u) = \frac{1 + \frac{2u}{2\sqrt{u^2-1}}}{u + \sqrt{u^2-1}}$$

$$= \frac{u + \sqrt{u^2-1}}{\sqrt{u^2-1}\,(u + \sqrt{u^2-1})} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$$

8) On a donc $$L = \frac{1}{2}\left(\ln(\sqrt{2} + \sqrt{2-1}) - \ln(1 + \sqrt{1-1})\right)$$

$$L = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$