Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L2, Géométrie différentielle élémentaire (LSMA422)
Année 2013-2014

Examen du 23 mai 2014 - 2h00

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (question de cours).
Soit $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$.
1) Rappeler la définition du rotationnel de V.
2) Que signifie la propriété V *dérive d'un potentiel scalaire* ?
3) Montrer que si V dérive d'un potentiel scalaire alors son rotationnel est nul.
4) *Application.* Calculer $\operatorname{rot} V$ avec $V(x,y,z) = (-y, x, xy)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2
On considère la surface définie par la partie de tronc de cône $x^2+y^2 = z^2$, $0 < a \leq z \leq b$, que l'on peut aussi paramétriser par

$$\begin{cases} x(r,t) = r\cos(t), \\ y(r,t) = r\sin(t), \\ z(r,t) = r, \end{cases}$$

avec $r \in [a,b]$ et $t \in [0, 2\pi]$.
1) Les points de cette surface sont-ils réguliers ?
2) Donner l'expression du plan tangent en un point de cette surface.
3) Montrer que l'aire de la surface considérée est

$$\pi\sqrt{2}(b^2 - a^2).$$

Exercice 3 (théorème de Green-Ostrogradski)
On s'intéresse dans cet exercice au calcul du flux du champ de vecteur

$$V(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$$

sortant à travers la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

1) En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, montrer que le calcul de ce flux peut se ramener au calcul de l'intégrale triple

$$\iiint_\Delta 3\,(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

sur la boule Δ d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

2) Montrer que

$$\iiint_\Delta 3\,(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{12}{5}\pi$$

en utilisant la paramétrisation suivante de Δ (passage en coordonnées sphériques)

$$\begin{cases} x(r,\theta,\phi) = r\sin(\phi)\cos(\theta), \\ y(r,\theta,\phi) = r\sin(\phi)\sin(\theta), \\ z(r,\theta,\phi) = r\cos(\phi), \\ r \in [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi],\ \phi \in [0,\pi]. \end{cases}$$

On rappelle que lors du passage en coordonnées sphériques, $dxdydz$ doit être remplacé par $r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi$.

Question bonus : Redémontrer le passage de $dxdydz$ à $r^2\sin\phi dr d\theta d\phi$.

Corrigé de l'examen du 23/05/14

Exercice 1 (question de cours)

1)
2) Voir votre cours.
3)

4) $V(x,y,z) = (-y, x, xy)$

$$\text{rot } V = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -y \\ x \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que V ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

Exercice 2

On considère la partie de tronc de cône $x^2+y^2=z^2$, $0<a\leq z\leq b$, que l'on peut aussi paramétriser par

$$\begin{cases} x(r,t) = r\cos t \\ y(r,t) = r\sin t \\ z(r,t) = r \end{cases}$$ avec $r \in [a,b]$ et $t \in [0, 2\pi]$.

1) On dit qu'un point est régulier si en ce point le vecteur

$$\begin{pmatrix} \partial_r x \\ \partial_r y \\ \partial_r z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t y \\ \partial_t z \end{pmatrix}$$

est non nul en ce point. On a

$$\begin{pmatrix} \partial_r x \\ \partial_r y \\ \partial_r z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t y \\ \partial_t z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \\ r \end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur est $\sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$

Cette quantité est toujours >0 car $r \in [a,b]$ avec $a>0$.

Tous les points sont donc réguliers.

2) Par définition, le plan tangent π en un point de la surface est le plan passant par ce point et de vecteurs directeurs

$$\begin{pmatrix} \partial_r x \\ \partial_r y \\ \partial_r z \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t y \\ \partial_t z \end{pmatrix} :$$

$$\pi = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ r \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} r\cos t + \alpha\cos t - \beta r\sin t \\ r\sin t + \alpha\sin t + \beta r\cos t \\ r + \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} (\alpha+r)\cos t - \beta r\sin t \\ (\alpha+r)\sin t + \beta r\cos t \\ \alpha + r \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Par définition, l'aire de la surface considérée est

$$\mathcal{A} = \iint_{(r,t)\in[a,b]\times[0,2\pi]} \left\| \begin{pmatrix} \partial_r x \\ \partial_r y \\ \partial_r z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t y \\ \partial_t z \end{pmatrix} \right\| dr\, dt$$

$$= \iint_{(r,t)\in[a,b]\times[0,2\pi]} \sqrt{2}\, r\, dr\, dt = \sqrt{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi\sqrt{2} \int_a^b r\, dr$$

$$= \pi\sqrt{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

Exercice 3

$$V(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$$

1) Le flux du champ de vecteur V à travers la sphère S d'équation

$$x^2+y^2+z^2 = 1$$

est par définition la quantité

$$\iint_S V \, d\sigma$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski, ou théorème de flux divergence, ce flux est égal à l'intégrale triple

$$\iiint_\Delta \operatorname{div} V \, dx\,dy\,dz$$

où Δ est le volume intérieur à S, c'est-à-dire ici la boule d'équation $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Puisque $\operatorname{div} V = \partial_x x^3 + \partial_y y^3 + \partial_z z^3$

$$= 3(x^2+y^2+z^2)$$

il s'agit donc bien de calculer

$$\iiint_\Delta 3(x^2+y^2+z^2) \, dx\,dy\,dz$$

2) On utilise la paramétrisation suivante de Δ :

$$\begin{cases} x(r,\theta,\phi) = r \sin\phi \cos\theta \\ y(r,\theta,\phi) = r \sin\phi \sin\theta \\ z(r,\theta,\phi) = r \cos\phi \\ r \in [0,1], \ \theta \in [0,2\pi], \ \phi = [0,\pi] \end{cases}$$

On a alors $x^2+y^2+z^2 = r^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + r^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + r^2 \cos^2\phi$

$$= r^2 \sin^2\phi + r^2 \cos^2\phi$$

$$= r^2$$

En remplaçant $dx\,dy\,dz$ par $r^2 \sin\phi \,dr\,d\theta\,d\phi$ on obtient alors

$$\iiint_{\Delta} 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]} 3r^4 \sin\phi \,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^1 3r^4\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi\,d\phi$$

$$= \frac{3}{5} \times 2\pi \times \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{6\pi}{5} \times (1+1) = \frac{12\pi}{5}.$$

<u>Question bonus</u>

D'après la formule de changement de variable dans une intégrale il faut calculer la valeur absolue du déterminant de la jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix}$$

Un calcul simple montre que le déterminant de cette matrice est $-r^2 \sin\phi$. La valeur absolue est donc $r^2 \sin\phi$ puisque $\phi \in [0, \pi]$.

$dx\,dy\,dz$ doit donc être remplacé par $r^2 \sin\phi \, dr\, d\theta\, d\phi$.