UVSQ
2015-2016

Méthodes numériques et programmation avancée
Examen de deuxième session du jeudi 16 juin 2016

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1.
Soient deux fonctions $c \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et $f \in L^2(]0,1[)$. On suppose qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que $c(x) \geq c_0$ pour tout x dans $]0,1[$ et on considère le problème aux limites (P) suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ \\ u'(0) + \alpha_0 u(0) = 0, \quad u'(1) = g_1, \end{cases}$$

où α_0 et g_1 sont des constantes données.
1) Donner une formulation variationnelle de (P) où l'espace variationnel sera $V = H^1(0,1)$.
2) Montrer que l'application linéaire associée est continue.
3) Montrer que l'application bilinéaire associée est continue.
4) Montrer que l'application bilinéaire associée est coercive sous une condition de signe sur α_0 que l'on précisera.
5) En déduire que le problème variationnel admet une unique solution.

Corrigé succinct.
Voir la correction de l'examen de l'année 2015-2016 avec $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_a = \alpha_0$, $\alpha_b = 0$, $g_a = 0$ et $g_b = g_1$.

Exercice 2.
Dans cet exercice, on considère le problème

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

et son approximation par différences finies

$$\frac{-u_{j-1}+2u_j-u_{j+1}}{h^2}=f(x_j),\quad j=1,...,N,$$

avec

$$x_j=jh=\frac{j}{N+1}$$

et

$$u_0=u_{N+1}=0.$$

1) Ecrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire $AU=B$ où on explicitera soigneusement A, B et U.
2) Montrer que A est symétrique et définie positive.
3) En déduire l'existence et l'unicité d'une solution au problème approché.
4) Montrer que si on suppose que $f(x_j)\geq 0$ pour tout j, alors $u_j\geq 0$ pour tout j.

Corrigé succinct.
1) On a

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & ... & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ..\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

$$B=h^2\begin{pmatrix} f(x_1)\\ f(x_2)\\ \vdots\\ f(x_N)\end{pmatrix},$$

et

$$U=\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_N\end{pmatrix}.$$

2) A est clairement symétrique. De plus, pour tout vecteur X de taille N et dont les coordonnées sont notées x_i on a

$$(AX,X)=x_1^2+\sum_{i=2}^{N}(x_i-x_{i-1})^2+x_N^2.$$

Il est ainsi clair que $(AX,X)>0$ sauf si X est le vecteur nul, ce qui répond à la question.
3) D'après la question précédente, la matrice A est en particulier inversible, ce qui garantit l'existence et l'unicité d'une solution au problème approché.
4) On suppose que $f(x_j)\geq 0$ pour tout j, et on note $u_{j_0} := \min_{j=0,\dots,N+1} u_j$. En supposant par l'absurde que $u_{j_0}<0$, on a donc nécessairement $1\leq j_0\leq N$ car $u_0=u_{N+1}=0$. On a alors

$$-u_{j_0-1}+2u_{j_0}-u_{j_0+1}=h^2 f(x_{j_0}),$$

et donc

$$2u_{j_0}\leq u_{j_0}+u_{j_0+1}+h^2 f(x_{j_0})\leq u_{j_0-1}+u_{j_0+1}+h^2 f(x_{j_0})=2u_{j_0},$$

de sorte que les inégalités sont des égalités et

$$u_{j_0}=u_{j_0+1}+h^2 f(x_{j_0})\geq u_{j_0+1}.$$

On a donc forcément $u_{j_0}=u_{j_0+1}$. De même, on montre que $u_{j_0}=u_{j_0-1}$. En suivant un raisonnement identique, on peut ainsi remonter jusqu'au bord et en déduire que $u_{j_0}=0$ ce qui est une contradiction.

Exercice 3
Résoudre par la méthode des caractéristiques l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t u + c\partial_x u = u$$

avec la donnée initiale $u(0,x)=u_0(x)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, où c est une constante réelle.

Corrigé succinct.
La méthode des caractéristiques donne

$$u(x,t)=u_0(x-ct)e^t.$$