Université Paris-Saclay
M2 Analyse, Modélisation et Simulation
Année 2018-2019

Corrigé de l'examen du cours sur les systèmes hyperboliques

Jeudi 14 février 2019

Exercice 1.
On considère l'équation de trafic routier

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v(\rho)) = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $\rho(x,t) \in [0,1]$ est la densité de véhicules et $\rho \to v(\rho) = 10(1-\rho)$ la vitesse des véhicules en fonction de la densité. On notera $f(\rho) = \rho v(\rho)$.
1) Montrer que ce système est strictement hyperbolique. On notera $\lambda(\rho)$ sa valeur propre.
2) Montrer que le champ caractéristique associé à cette valeur propre est vraiment non linéaire.
3) En déduire la forme de la solution du problème de Riemann associée à (1) avec la donnée initiale

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \rho_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

On ne demande pas de résoudre explicitement le problème de Riemann dans cette question. On précisera néanmoins la nature possible de la ou des ondes composant cette solution (choc, contact, détente).
4) Ecrire la relation de Rankine-Hugoniot et les inégalités de Lax associées à une discontinuité séparant deux états constants ρ_- et ρ_+ ($\rho_- \neq \rho_+$). En déduire une comparaison de ρ_- et ρ_+ pour qu'une telle discontinuité puisse apparaître.
5) Décrire l'ensemble des états qui peuvent être joints à droite d'un état ρ_- par une onde de détente.
6) Résoudre explicitement le problème de Riemann lorsque $\rho_L < \rho_R$.
7) Résoudre explicitement le problème de Riemann lorsque $\rho_L > \rho_R$.

Exercice 1, corrigé succinct.
1) Le système n'est constitué que d'une seule équation. Il est donc de taille

1 et l'unique valeur propre est $\lambda(\rho) = f'(\rho) = 10 - 20\rho$. Le système est donc strictement hyperbolique.
2) 1 est un vecteur propre et $\lambda'(\rho) = f''(\rho) = -20 < 0$ de sorte que le champ caractéristique est vraiment non linéaire.
3) La solution n'est composée que d'une seule onde de type détente ou choc.
4) La relation de Rankine-Hugoniot et les inégalités de Lax associées à une discontinuité séparant deux états constants ρ_- et ρ_+ ($\rho_- \neq \rho_+$) s'écrivent

$$\sigma = \frac{f(\rho_+) - f(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-}$$

et

$$f'(\rho_-) > \sigma > f'(\rho_+)$$

où σ représente la vitesse de propagation de la discontinuité. On note en particulier, puisque f' est une fonction strictement décroissante, que l'on a nécessairement $\rho_- < \rho_+$.
5) L'ensemble des états qui peuvent être joints à droite d'un état ρ_- par une onde de détente est l'ensemble des états ρ_+ tels que $\rho_+ \leq \rho_-$ car dans ce cas on a bien $\lambda(\rho_-) \leq \lambda(\rho_+)$ (la valeur propre est croissante le long d'une onde de détente).
6) Dans le cas $\rho_L < \rho_R$, la solution est donnée par

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L & \text{si} \quad x/t < \sigma \\ \rho_R & \text{si} \quad x/t > \sigma \end{cases}$$

avec

$$\sigma = \frac{f(\rho_R) - f(\rho_L)}{\rho_R - \rho_L}.$$

7) Dans le cas $\rho_L > \rho_R$, la solution est donnée par

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L & \text{si} \quad x/t < f'(\rho_L) \\ \rho(x/t) & \text{si} \quad f'(\rho_L) < x/t < f'(\rho_R) \\ \rho_R & \text{si} \quad x/t > f'(\rho_R) \end{cases}$$

avec $\rho(x/t)$ telle que $x/t = f'(\rho(x/t))$, c'est-à-dire

$$\rho(x/t) = \frac{1}{2} - \frac{x}{20t}.$$

Exercice 2.
On considère le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + a^2 \partial_x \rho = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $\mathbf{u}(x,t) = (\rho, v)(x,t)$ est le vecteur des inconnues et $a > 0$ est une constante fixée.
1) Montrer que le système est strictement hyperbolique. On notera λ_1 et λ_2 les valeurs propres du système numérotées dans l'ordre croissant.
2) Montrer que les champs caractéristiques associés aux valeurs propres du système sont tous linéairement dégénérés.
3)a) Donner un invariant de Riemann associé à la plus petite des valeurs propres. On le notera $I^1(\mathbf{u})$.
b) Donner un invariant de Riemann associé à la plus grande des valeurs propres. On le notera $I^2(\mathbf{u})$.
4) Quelle est la forme de la solution du problème de Riemann associée à (2) avec la donnée initiale

$$\mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbf{u}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

5) Quel système faut-il résoudre pour calculer explicitement l'état intermédiaire de cette solution ? Résoudre ce système.

Exercice 2, corrigé succinct.
1) Dans le jeu de variable (ρ, v), la matrice jacobienne de ce système est donnée par

$$A(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -a < \lambda_2 = a$ (rappelons que $a > 0$). Le système est donc strictement hyperbolique.
2) Comme les valeurs propres sont constantes, leur gradient est nul et les champs caractéristiques sont donc linéairement dégénérés.
3) Des calculs simples montrent que les vecteurs propres sont donnés par

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

de sorte que les relations définissant les invariants de Riemann I sont

$$\nabla I.r_1 = 0 \quad \text{et} \quad \nabla I.r_2 = 0.$$

a) On a donc ici

$$\partial_\rho I - a \partial_v I = 0$$

et donc

$$I^1(\mathbf{u}) = v + a\rho.$$

b) On a donc ici

$$\partial_\rho I + a\partial_v I = 0$$

et donc

$$I^2(\mathbf{u}) = v - a\rho.$$

4) La solution du problème de Riemann est composée de deux ondes simples de type discontinuité de contact dont les vitesses de propagation sont données par $-a$ et a. Il y a un unique état intermédiaire.
5) Pour résoudre le problème de Riemann associé au système, il suffit de noter que les ondes sont toutes des discontinuités de contact. Les invariants de Riemann étant constants à la traversée de telles discontinuités, si on note $\mathbf{u}_*$ l'état intermédiaire, on a alors un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues pour trouver $\mathbf{u}_*$, les 2 équations étant données par la continuité des invariants de Riemann à la traversée des discontinuités correspondantes. Plus précisément, ce système est donné par les relations

$$\begin{cases} v_L + a\rho_L = v^* + a\rho^*, \\ v^* - a\rho^* = v_R - a\rho_R, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{1}{2a}(v_R - v_L)$$

et

$$v^* = \frac{1}{2}(v_L + v_R) - \frac{a}{2}(\rho_R - \rho_L).$$

Exercice 3.
Dans cet exercice, on cherche à proposer un schéma numérique pour approche numériquement les solutions de l'équation de l'exercice 1. On propose de considérer la méthode de Godunov approchée associée au solveur de Riemann approché simple suivant :

$$\rho(x/t) = \begin{cases} \rho_L & \text{si} \quad x/t < -a, \\ \rho^* & \text{si} \quad -a < x/t < a, \\ \rho_R & \text{si} \quad x/t > a, \end{cases}$$

où $a > 0$ est une constante à préciser et où

$$\rho^* = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R) - \frac{1}{2a}(f(\rho_R) - f(\rho_L)).$$

1) Montrer que ce solveur simple est bien consistant au sens intégral avec l'équation considérée. *On ne demande pas de vérifier la consistance avec*

une inégalité d'entropie.
2) Ecrire le schéma de Godunov approché correspondant.
3) En vous inspirant des discussions du cours, comment choisiriez-vous la constante a au niveau de chaque interface ?

Exercice 3, corrigé succinct.
1) On vérifie facilement que

$$f(\rho_R) - f(\rho_L) = -a(\rho^* - \rho_L) + a(\rho_R - \rho^*).$$

2) Le schéma s'écrit, avec des notations habituelles,

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(\rho_j^n, \rho_{j+1}^n) - f(\rho_{j-1}^n, \rho_j^n))$$

où le flux numérique s'écrit

$$f(\rho_L, \rho_R) = \frac{1}{2}(f(\rho_L) + f(\rho_R)) - \frac{a}{2}(\rho_R - \rho_L).$$

3) Un choix naturel (voir cours) est

$$a = \max(|f'(\rho_L)|, |f'(\rho_R)|).$$