Université Paris-Saclay
M2 Analyse, Modélisation et Simulation
Année 2016-2017

Corrigé de l'examen du cours sur les systèmes hyperboliques

Jeudi 23 février 2017

Exercice 1.
On considère le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho\pi) + \partial_x(\rho\pi u + a^2 u) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathbf{u}(x,t) = (\rho, \rho u, \rho\pi)(x,t)$ est le vecteur des inconnues et $a > 0$ est une constante fixée. L'espace des états admissibles est défini par

$$\Omega = \{\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho\pi) \in \mathbb{R}, \rho > 0\}.$$

0) Montrer que le système s'écrit de manière équivalente, pour les solutions régulières, sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u\partial_x \rho + \rho\partial_x u = 0, \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u + u\partial_x u + \frac{1}{\rho}\partial_x \pi = 0, \\ \partial_t \pi + u\partial_x \pi + \frac{a^2}{\rho}\partial_x u = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1) Montrer que le système est strictement hyperbolique. On notera λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres du système numérotées dans l'ordre croissant.
2) Montrer que les champs caractéristiques associés aux valeurs propres du système sont tous linéairement dégénérés.
3) Montrer que deux invariants de Riemann associés à la plus petite des valeurs propres du système sont donnés par

$$I_1^1(\mathbf{u}) = \pi + au \quad \text{et} \quad I_2^1(\mathbf{u}) = \pi + a^2\tau, \quad \text{avec} \quad \tau = 1/\rho.$$

On vérifiera que les gradients sont linéairement indépendants.
4) Donner deux invariants de Riemann $I_1^3(\mathbf{u})$ et $I_2^3(\mathbf{u})$ associés à la plus grande des valeurs propres et dont les gradients sont linéairement indépendants.
5) Donner deux invariants de Riemann $I_1^2(\mathbf{u})$ et $I_2^2(\mathbf{u})$ associés à la valeur

propre intermédiaire et dont les gradients sont linéairement indépendants.
6) Quelle est la forme de la solution du problème de Riemann associée à (2) avec la donnée initiale

$$\mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbf{u}_R & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

de combien d'états intermédiaires est-elle constituée ?
7) Quel système faudrait-il résoudre pour calculer explicitement cette solution, c'est-à-dire pour déterminer les états intermédiaires ? (on ne demande pas de résoudre le système correspondant).

Exercice 1, corrigé succinct.
0) Pour la première équation, il suffit d'écrire

$$\partial_x(\rho u) = u\partial_x \rho + \rho \partial_x u.$$

Pour la deuxième et la troisième équation, il suffit d'écrire

$$\partial_t(\rho X) = X\partial_t \rho + \rho \partial_t X \quad \text{et} \quad \partial_x(\rho X u) = X\partial_x(\rho u) + \rho u \partial_x X$$

pour $X = u$ et $X = \pi$, d'utiliser la première l'équation, et de diviser par ρ.
1) Dans le jeu de variable (ρ, u, π), la matrice jacobienne de ce système est donnée par

$$A(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & a^2/\rho & u \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = u - a/\rho < \lambda_2 = u < \lambda_3 = u + a/\rho$ (rappelons que $a > 0$ et $\rho > 0$). Les trois valeurs propres étant distinctes, le système est strictement hyperbolique.
2) Des calculs simples montrent que les vecteurs propres sont donnés par

$$r_1 = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ -a \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} \rho^2 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

et que les gradients des valeurs propres sont

$$\nabla\lambda_1 = \begin{pmatrix} a/\rho^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla\lambda_3 = \begin{pmatrix} -a/\rho^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant les produits scalaires, on voit donc que tous les champs caractéristiques sont linéairement dégénérés ($\nabla\lambda_j.r_j = 0$ où r_j est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j).
3) La relation définissant les invariants de Riemann I est

$$\nabla I.r_1 = 0$$

ce qui donne ici

$$\rho^2\partial_\rho I - a\partial_u I + a^2\partial_\pi I = 0.$$

Les invariants

$$I_1^1(\mathbf{u}) = \pi + au \quad \text{et} \quad I_2^1(\mathbf{u}) = \pi + a^2/\rho$$

vérifient clairement cette relation et ont des gradients linéairement indépendants.
4) La relation définissant les invariants de Riemann I est

$$\nabla I.r_3 = 0$$

ce qui donne ici

$$\rho^2\partial_\rho I + a\partial_u I + a^2\partial_\pi I = 0.$$

Les invariants

$$I_1^3(\mathbf{u}) = \pi - au \quad \text{et} \quad I_2^3(\mathbf{u}) = \pi + a^2\tau$$

vérifient clairement cette relation et ont des gradients linéairement indépendants.
5) La relation définissant les invariants de Riemann I est

$$\nabla I.r_2 = 0$$

ce qui donne ici

$$\partial_\rho I = 0.$$

Les invariants

$$I_1^2(\mathbf{u}) = \pi \quad \text{et} \quad I_2^2(\mathbf{u}) = u$$

vérifient clairement cette relation et ont des gradients linéairement indépendants.
6) La solution du problème de Riemann est composée de trois ondes simples de type discontinuité de contact dont les vitesses de propagation sont données par $u - a/\rho$, u et $u + a/\rho$. Il y a deux états intermédiaires.
7) Pour résoudre le problème de Riemann associé au système, il suffit de

noter que les ondes sont toutes des discontinuités de contact. Les invariants de Riemann étant constants à la traversée de telles discontinuités, si on note $\mathbf{u}_L^*$ et $\mathbf{u}_R^*$ les états intermédiaires, on a alors un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues pour trouver les états $\mathbf{u}_L^*$ et $\mathbf{u}_R^*$, les 6 équations étant données par la continuité des invariants de Riemann à la traversée des discontinuités correspondantes. Plus précisément, ce système est donné par les relations

$$\begin{cases} \pi_L + au_L = \pi_L^* + au_L^*, \\ \pi_L + a^2\tau_L = \pi_L^* + a^2\tau_L^*, \\ \pi_L^* = \pi_R^*, \\ u_L^* = u_R^*, \\ \pi_R^* - au_R^* = \pi_R - au_R, \\ \pi_R^* + a^2\tau_R^* = \pi_R + a^2\tau_R. \end{cases}$$

Exercice 2.
On considère le système

$$\begin{cases} \partial_t\tau - \partial_x u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où $v(x,t) = (\tau, u)(x,t)$ est le vecteur des inconnues. L'espace des états admissibles est défini par $\Omega = \{v = (\tau, u) \in \mathbb{R}, \tau > 0\}$. On suppose que la pression p vérifie les hypothèses physiques habituelles

$$p(\tau) > 0, \quad p'(\tau) < 0, \quad p''(\tau) > 0.$$

Les trois parties sont indépendantes.
Partie 1. Etude du système.
1) Déterminer la matrice jacobienne de ce système.
2) Montrer qu'elle admet deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2, telles que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, que l'on déterminera.
3) Que peut-t-on dire sur la nature du système ?
Partie 2. Solveur de Rusanov.
4) Donner la forme d'un solveur de Riemann approché de type Rusanov pour ce système.
5) Déterminer les valeurs de τ et de u de l'état intermédiaire associé, en fonction de la vitesse de propagation des ondes du solveur approché.
6) Comment suggérez-vous d'évaluer simplement cette vitesse de propagation dans un programme informatique ?
Partie 3. Solveur de Roe.
7) On rappelle que la méthode de Roe est basée sur la construction d'une matrice $A(v_L, v_R)$, avec les propriétés suivantes

(i) $A(v_L, v_R)$ est diagonalisable;

(ii) $A(v, v) = \nabla F(v)$;

(iii) $F(v_R) - F(v_L) = A(v_L, v_R)(v_R - v_L)$;

où on a posé $F(v) = (-u, p(\tau))^t$. Donner une matrice de Roe associée au système considéré.
8) Donner les valeurs propres de la matrice de Roe puis résoudre le problème de Riemann associé au système linéarisé donné par la matrice de Roe.

Exercice 2, corrigé succinct.
1) La matrice jacobienne de ce système est donnée par

$$A(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Le polynôme caractéristique est donné par

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p'(\tau) = 0.$$

On a donc

$$\lambda_1 = -\sqrt{-p'(\tau)}, \quad \lambda_2 = +\sqrt{-p'(\tau)}.$$

Noter que ces valeurs propres sont réelles d'après les hypothèses sur la pression p, et qu'on a bien $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
3) Il s'agit d'un système strictement hyperbolique.
4) Un solveur de Riemann approché de type Rusanov est composé de deux discontinuités qui se propagent avec des vitesses $-c$ et c, et qui séparent les deux états initiaux v_L et v_R par un état intermédiaire v_*.
5) Les relations de consistance s'écrivent

$$\begin{pmatrix} -u_R \\ p(\tau_R) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u_L \\ p(\tau_L) \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \tau_* - \tau_L \\ u_* - u_L \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \tau_R - \tau_* \\ u_R - u_* \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$\tau_* = \frac{1}{2}(\tau_L + \tau_R) + \frac{1}{2c}(u_R - u_L)$$

et

$$u_* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{1}{2c}(p(\tau_R) - p(\tau_L)).$$

6) On peut simplement poser en première approximation

$$c = \max_{u=u_L,u_R} \max_{i=1,2}(|\lambda_i(u)|).$$

7) On vérifie facilement que la matrice

$$A(v_L, v_R) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{p(\tau_R)-p(\tau_L)}{\tau_R-\tau_L} & 0 \end{bmatrix}.$$

convient si $\tau_L \neq \tau_R$, tandis que si $\tau_L = \tau_R$ on peut choisir

$$A(v_L, v_R)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau_L) & 0 \end{bmatrix}.$$

8) Les valeurs propres sont données par

$$\lambda_L = -\sqrt{-\frac{p(\tau_R)-p(\tau_L)}{\tau_R-\tau_L}} \quad \text{et} \quad \lambda_R = +\sqrt{-\frac{p(\tau_R)-p(\tau_L)}{\tau_R-\tau_L}}.$$

La solution du problème de Riemann associé au système linéarisé de Roe est composée de deux ondes qui se propagent avec les vitesses λ_L et λ_R ($\lambda_L \neq \lambda_R$) et qui sont séparées par un état constant v_* qui vérifie les relations de consistance

$$u_L - u_R = \lambda_L(\tau_* - \tau_L) + \lambda_R(\tau_R - \tau_*)$$

et

$$p_(\tau_R) - p_(\tau_L) = \lambda_L(u_* - u_L) + \lambda_R(u_R - u_*)$$

ce qui permet facilement d'en déduire les valeurs de τ_* et u_*.