UVSQ
MSMA850 **2014-2015**

Examen du 20 avril 2015

Aucun document n'est autorisé.

Question de cours.
Enoncer et démontrer le lemme de Céa.

Exercice 1
On rappelle que

$$H_0^2(]0,1[) = \{v \in H^2(]0,1[), v(0) = v(1) = v'(1) = v'(0)\}$$

et que cet ensemble est un espace de Hilbert pour la semi-norme

$$|v|_{H_0^2} = \sqrt{\int_0^1 (v''(x))^2 dx}$$

qui est équivalente (sur $H_0^2(]0,1[)$) à la norme habituelle sur $H^2(]0,1[)$.
Soit $f \in L^2(]0,1[)$ et $c \in \mathcal{C}([0,1])$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} u''''(x) + cu(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0, \\ u'(0) = 0,\ u'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

1) En supposant que $u \in H^4(]0,1[)$, donner la formulation variationnelle de ce problème telle que la forme bilinéaire associée fasse intervenir des dérivées d'ordre 2 uniquement.
2) Montrer que cette formulation admet une unique solution sous de bonnes hypothèses sur c que l'on précisera.
3) Montrer que cette solution est solution du problème de départ en un sens à préciser (on admettra que cette solution est dans $H^4(]0,1[)$).
4) Exprimer le problème comme un problème de minimisation.

Exercice 2
Résoudre par la méthode des caractéristiques l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t u + c\partial_x u = u$$

avec la donnée initiale $u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, où c est une constante réelle.

Corrigé de l'examen du 20 avril

Question de cours

Voir les notes de cours.

Exercice 1

$H^2_0(0,1) = \{ v \in H^2(0,1),\ v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0 \}$.

$f \in L^2(0,1)$, $c \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

$$(1) \begin{cases} u'''' + cu = f, & x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

1) On sq $u \in H^4(0,1)$. Soit $v \in H^2_0(0,1)$. En multipliant (1) par v et en intégrant entre 0 et 1 on obtient

$$\int_0^1 v u'''' + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv$$

En intégrant une fois par partie (formule de Green) et en utilisant le fait que $v(0) = v(1) = 0$, on obtient

$$-\int_0^1 v' u''' + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv.$$

En intégrant une nouvelle fois par partie et en utilisant le fait que $v'(0) = v'(1) = 0$, on obtient

$$\int_0^1 v'' u'' + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv.$$

La formulation faible du système (1) est donc

Trouver $u \in V$ t.q $a(u,v) = \ell(v)$ $\forall v \in V$

avec $V = H^2_0(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 u''v'' + \int_0^1 cuv$ et $\ell(v) = \int_0^1 fv$.

2) On vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

$V = H_0^2(0,1)$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$|v|_{H_0^2}^2 = \int_0^1 v''^2$$

l est une forme linéaire, et continue car

$$|l(v)| \leq \int_0^1 |fv| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\| \, \|v\|_{H^2} \leq C \|f\| \, |v|_{H_0^2}$$

où C est la constante de l'inégalité de Poincaré

a est une forme bilinéaire, et continue car

$$|a(u,v)| \leq \int |u''||v''| + \int_0^1 |c| \, |u||v| \leq \|u''\|_{L^2} \|v''\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$\leq (1 + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2}$$

et $\|.\|_{H^2}$ est équivalente à $|.|_{H_0^2}$ sur $H_0^2(0,1)$.

De plus, si on suppose que $c \geq 0$, alors

$$a(u,u) \geq \int_0^1 u''^2 = |u|_{H_0^2(0,1)}^2$$

d'où la coercivité de a.

Sous l'hypothèse $c \geq 0$, la formulation faible admet donc une unique solution.

3) $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^2(0,1)$.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a donc

$$\int_0^1 u'' \varphi'' + \int_0^1 c u \varphi = \int_0^1 f \varphi$$

où encore, par intégration par partie,

$$\int_0^1 u'''' \varphi + \int_0^1 c u \varphi = \int_0^1 f \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ie $\qquad u'''' + cu = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

avec, puisque $u \in H_0^2(0,1)$, $u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$.

4) La forme bilinéaire étant symétrique, le théorème de Lax-Milgram nous dit que le problème équivaut à minimiser sur $H_0^2(0,1)$ la fonction $\phi(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$

Exercice 2

On définit les courbes caractéristiques à l'aide de l'EDO

$$\begin{cases} X'(t) = c \\ X(t_*) = x_* \end{cases} \iff X(t) = c(t-t_*) + x_*, \qquad \forall x_*, t_* \geq 0$$

et on remarque que le long des caractéristiques, la solution de l'équation vérifie $\forall t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} u(X(t), t) = (\partial_t u + X'(t) \partial_x u)(X(t), t)$$

$$\frac{d}{dt} u(X(t), t) = (\partial_t u + c \partial_x u)(X(t), t)$$

$$\frac{d}{dt} u(X(t), t) = u(X(t), t)$$

En intégrant la relation entre t et t_*, on obtient donc

$$u(X(t), t) = u(X(t_*), t_*) e^{t-t_*}$$

c'est-à-dire

$$u(X(t), t) = u(x_*, t_*) e^{t-t_*}$$

ou $$u(x_* + c(t-t_*), t) = u(x_*, t_*) e^{t-t_*}$$

En prenant $t=0$, on a donc

$$u_0(x_* - ct_*) = u(x_*, t_*) e^{-t_*}$$

ie $$u(x_*, t_*) = u_0(x_* - ct_*) e^{t_*} \qquad \forall (x_*, t_*), \ t_* \geq 0$$

La solution est donc donnée par

$$u(x,t) = u_0(x - ct) e^{t}$$