UVSQ
2015-2016

Méthodes numériques et programmation avancée
Examen final du 10 mai 2016

Aucun document n'est autorisé.

Question de cours
Enoncer et démontrer le lemme de Céa.

Exercice 1.
Soient a et b deux constantes réelles telles que $a < b$ et deux fonctions $c \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et $f \in L^2(]a,b[)$. On suppose qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que $c(x) \geq c_0$ pour tout x dans $]a,b[$ et on considère le problème aux limites (P) suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b \\ \\ u'(a) + \alpha_a u(a) = g_a, \quad u'(b) + \alpha_b u(b) = g_b, \end{cases}$$

où α_a, α_b, g_a, g_b sont des constantes données.
1) Donner une formulation variationnelle de (P) où l'espace variationnel sera $V = H^1(a,b)$.
2) Montrer que l'application linéaire associée est continue.
3) Montrer que l'application bilinéaire associée est continue.
4) Montrer que l'application bilinéaire associée est coercive sous des conditions de signe sur α_a et α_b que l'on précisera.
5) En déduire que le problème variationnel admet une unique solution.

Corrigé succinct.
1) Soit $u \in H^2(a,b)$ une solution du problème et soit $v \in V = H^1(a,b)$ une fonction test. En multipliant l'équation du problème par v et en intégrant sur le domaine, on obtient

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

D'après la formule de Green, on a donc

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx-(u'(b)v(b)-u'(a)v(a))+\int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

En utilisant les conditions aux limites du problème, il vient donc

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx-(g_b-\alpha_b u(b))v(b)+(g_a-\alpha_a u(a))v(a))+\int_a^b c(x)u(x)v(x)dx$$

$$=\int_a^b f(x)v(x)dx.$$

La formulation variationnelle s'écrit donc

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que } \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v) \ \forall \ v \in V,$$

avec

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx + \alpha_b u(b)v(b) - \alpha_a u(a)v(a)$$

et

$$\mathcal{L}(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx + g_b v(b) - g_a v(a).$$

2) On a, avec des arguments classiques,

$$|\mathcal{L}(v)| \leq \int_a^b |f(x)||v(x)|dx + |g_b||v(b)| + |g_a||v(a)|$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la continuité de l'application trace,

$$|\mathcal{L}(v)| \leq ||f||_{L^2(a,b)}||v||_{L^2(a,b)} + |g_b|C_b||v||_{H^1(a,b)} + |g_a|C_a||v||_{H^1(a,b)}$$

où C_a et C_b sont les constantes de continuité des applications trace en a et b. Comme $||v||_{L^2(a,b)} \leq ||v||_{H^1(a,b)}$, on a clairement la continuité de la forme linéaire $\mathcal{L}$ définie sur V.

3) En procédant de la même manière, nous avons

$$\mathcal{A}(u,v) \leq ||u'||_{L^2(a,b)}||v'||_{L^2(a,b)} + ||c||_{L^\infty(a,b)}||u||_{L^2(a,b)}||v||_{L^2(a,b)} +$$

$$+|\alpha_b|C_b^2||u||_{H^1(a,b)}||v||_{H^1(a,b)} + |\alpha_a|C_a^2||u||_{H^1(a,b)}||v||_{H^1(a,b)}.$$

Comme $||v||_{L^2(a,b)} \leq ||v||_{H^1(a,b)}$ et $||v'||_{L^2(a,b)} \leq ||v||_{H^1(a,b)}$, on a clairement la continuité de la forme bilinéaire $\mathcal{A}$ définie sur $V \times V$.
4) Concernant la coercivité, on a

$$\mathcal{A}(v,v) = \int_a^b v'^2(x)dx + \int_a^b c(x)v^2(x)dx + \alpha_b v^2(b) - \alpha_a v^2(a).$$

Par hypothèse sur $x \to c(x)$ et pourvu que $\alpha_b \geq 0$ et $\alpha_a \leq 0$, on obtient

$$\mathcal{A}(v,v) \geq \int_a^b v'^2(x)dx + c_0 \int_a^b v^2(x)dx \geq \min(1, c_0)||v||^2_{H^1(a,b)}$$

ce qui n'est rien d'autre que la propriété recherchée.
5) V étant un espace de Hilbert, le théorème de Lax-Milgram garantit donc l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel.

Exercice 2.
On considère l'équation des ondes

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{cases}$$

où $c > 0$ est la constante de propagation et les fonctions u_0 et u_1 sont de classe $\mathcal{C}^2([0,1])$ et $\mathcal{C}^1([0,1])$. On définit l'énergie du système

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\partial_t u)^2 dx + \frac{c^2}{2}\int_0^1 (\partial_x u)^2 dx.$$

1) Montrer que l'énergie du système est constante au cours du temps.
2) Dans cette question, on va chercher à établir une version discrète de la conservation de l'énergie en considérant le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

On se placera pour simplifier sur $\mathbb{R}$ tout entier et non plus sur l'intervalle $[0,1]$ de sorte que $j \in \mathbb{Z}$ et on définira l'énergie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)^2 dx + \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx.$$

a) En multipliant le schéma par $u_j^{n+1} - u_j^{n-1}$, montrer que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_j^{n+1}-u_j^n)^2-(u_j^n-u_j^{n-1})^2}{\Delta t^2} - c^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2}(u_j^{n+1}-u_j^{n-1}) +$$

$$+c^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2}(u_j^{n+1}-u_j^{n-1}) = 0.$$

b) Expliquer pourquoi

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2}(u_j^{n+1}-u_j^{n-1}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2}(u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^{n-1}).$$

c) En déduire que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_j^{n+1}-u_j^n)^2-(u_j^n-u_j^{n-1})^2}{\Delta t^2} - c^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2}(u_j^{n+1}-u_{j+1}^{n+1}) +$$

$$+c^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2}(u_j^{n-1}-u_{j+1}^{n-1}) = 0$$

et conclure.

Corrigé succinct.
1) En dérivant l'énergie par rapport au temps, on obtient tout de suite

$$E'(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_{tt} u \partial_t u dx + c^2 \int_{\mathbb{R}} \partial_{tx} u \partial_x u dx,$$

c'est-à-dire, d'après l'équation des ondes

$$E'(t) = c^2 \int_{\mathbb{R}} \partial_{xx} u \partial_t u dx + c^2 \int_{\mathbb{R}} \partial_{tx} u \partial_x u dx.$$

Par intégration par partie et en utilisant les conditions aux limites $u(0,t) = u(1,t) = 0$ et donc $\partial_t u(0,t) = \partial_t u(1,t) = 0$, il vient

$$E'(t) = c^2 \int_{\mathbb{R}} \partial_{xx} u \partial_t u dx - c^2 \int_{\mathbb{R}} \partial_t u \partial_{xx} u dx = 0.$$

L'énergie est donc constante au cours du temps.
2) a) En multipliant le schéma par $u_j^{n+1} - u_j^{n-1}$ et en sommant sur j, on a tout de suite le résultat attendu en observant d'une part que

$$(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1})(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) =$$

$$= [(u_j^{n+1} - u_j^n) - (u_j^n - u_j^{n-1})][(u_j^{n+1} - u_j^n) + (u_j^n - u_j^{n-1})] =$$
$$= (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - (u_j^n - u_j^{n-1})^2.$$

et d'autre part que

$$u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n = (u_{j+1}^n - u_j^n) - (u_j^n - u_{j-1}^n).$$

b) Comme la somme porte sur tous les j de $\mathbb{Z}$, on peut par exemple décaler les indices et remplacer j par $j+1$ dans la somme du membre de gauche.
c) D'après a) et b), on a donc

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - (u_j^n - u_j^{n-1})^2}{\Delta t^2} - c^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2}(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) +$$

$$+ c^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1}) = 0.$$

ce qui donne immédiatement la conservation de l'énergie discrète E^{n+1} définie par

$$E^{n+1} = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)^2}{\Delta t^2} + c^2 \frac{\Delta x}{2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})}{\Delta x^2}$$

au cours du temps, c'est-à-dire $E^{n+1} = E^n$ pour tout $n \geq 0$. L'énergie discrète E^{n+1} représente bien une approximation de la quantité $E(t^{n+1})$, ce qui nous donne bien un analogue discret de la conservation de l'énergie.