UVSQ
MSMA850

2013-2014

Partiel du 18 mars 2014

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1.
On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à un couple (x,t) associe la valeur

$$Y(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 0 \quad \text{et} \quad |x| \leq t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Soit $(x,t) \to \varphi(x,t)$ une fonction régulière de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de la fonction $x \to \varphi(x,x) + \varphi(-x,x)$
2) Montrer qu'au sens des distributions

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 2\delta_{(0,0)}.$$

Exercice 2.
Soit deux fonctions $c \in C^0([0,1])$ et $f \in L^2(]0,1[)$. On suppose qu'il existe une constante C_0 telle que $c(x) \geq C_0$ pour tout x dans $]0,1[$ et on considère le problème aux limites (P) suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = u(1), \quad u'(1) = u'(0) + \beta, \end{cases}$$

où β est une constante donnée.
1) Montrer que l'espace

$$V = \{v \in H^1(]0,1[), v(0) = v(1)\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit par celui de $H^1(]0,1[)$.
2) Donner la formulation variationnelle de (P) et montrer qu'elle est équivalente à (P).

3) Montrer que le problème (P) admet une unique solution.
4) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||u||_{H^1(]0,1[)} \leq C\Big(||f||_{L^2(]0,1[)} + |\beta|\Big).$$

Que signifie cette inégalité ?

Exercice 3.
On considère le problème (P) de l'exercice précédent. On divise l'intervalle $[0,1]$ en $(N+1)$ sous-intervalles de longueur $h = 1/(N+1)$ et on note

$$\{x_i = ih\}_{i=0,\dots,N+1}$$

les points du maillage correspondant.
On note V_h l'espace des fonctions v_h affines par morceaux sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (pour $i = 0, \dots, N$) et telles que $v_h(0) = v_h(1)$.
Enfin, pour tout $i = 0, \dots, N+1$, on note w_h^i la fonction affine par morceaux sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ (pour $i = 0, \dots, N$) telle que

$$w_h^i(x_j) = \delta_{ij}$$

pour tout $j = 0, \dots, N+1$.
1) Montrer que la famille $\{\bar{w}_h^i\}_{i=1,\dots,N+1}$ définie par $\bar{w}_h^i = w_h^i$ pour $i = 1, \dots, N$ et $\bar{w}_h^{N+1} = 1$ (fonction constante égale à 1) forme une base de V_h.
2) Montrer que la famille $\{\tilde{w}_h^i\}_{i=1,\dots,N+1}$ définie par $\tilde{w}_h^i = w_h^i$ pour $i = 1, \dots, N$ et $\tilde{w}_h^{N+1} = w_h^0 + w_h^{N+1}$ forme une base de V_h.
3) Quelle base vous semble préférable et pourquoi ?
4) On note (P_h) le problème (P) obtenu en remplaçant V par V_h. Expliquer brièvement pourquoi le problème (P_h) admet une unique solution.
5) On note U_h les coordonnées de la solution du problème (P_h) dans la base proposée dans la question 2 et on note

$$A_h U_h = B_h$$

le système linéaire associé au problème (P_h). Calculer la dernière composante du vecteur B_h en supposant que f est une fonction constante égale à f_0 sur $]0,1[$.

Exercice 1

1) $g(x) = \varphi(x,x) + \varphi(-x,x)$

$g'(x) = \partial_x \varphi(x,x) + \partial_t \varphi(x,x) - \partial_x \varphi(-x,x) + \partial_t \varphi(-x,x)$

2) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $Y(x,t) = \mathbb{1}_{t>0 \text{ et } |x| \leq t}$

$$\left\langle \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle = \left\langle Y, \partial^2_{t^2}\varphi - \partial^2_{x^2}\varphi \right\rangle$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} Y(\partial^2_{t^2}\varphi - \partial^2_{x^2}\varphi)(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} Y\,\partial^2_{t^2}\varphi\,dx\,dt - \iint_{\mathbb{R}^2} Y\,\partial^2_{x^2}\varphi\,dx\,dt$$

Mais $$\iint_{\mathbb{R}^2} Y\,\partial^2_{x^2}\varphi\,dx\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-t}^{t} \partial^2_{x^2}\varphi\,dx\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\partial_x\varphi(t,t) - \partial_x\varphi(-t,t)\right)dt$$

et $$\iint_{\mathbb{R}^2} Y\,\partial^2_{t^2}\varphi\,dx\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \partial^2_{t^2}\varphi\,dt\right)dx + \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-x}^{+\infty}\partial^2_{t^2}\varphi\,dt\right)dx$$

$$= -\int_0^{+\infty}\partial_t\varphi(x,x)\,dx - \int_{-\infty}^{0}\partial_t\varphi(x,-x)\,dx$$

$$= -\int_0^{+\infty}\partial_t\varphi(x,x)\,dx + \int_{+\infty}^{0}\partial_t\varphi(-x,x)\,dx$$

$$= -\int_0^{+\infty}\left(\partial_t\varphi(x,x) + \partial_t\varphi(-x,x)\right)dx$$

$$= -\int_0^{+\infty}\left(\partial_t\varphi(t,t) + \partial_t\varphi(-t,t)\right)dt$$

Donc finalement $$\left\langle \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle = -\int_0^{+\infty} g'(t)\,dt$$

$$= g(0) = 2\varphi(0,0)$$

ce qui signifie bien que $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \overset{\mathcal{D}'}{=} 2\delta_{(0,0)}$

Exercice 2

1) $V = \{ v \in H^1(]0,1[),\ v(0) = v(1) \}$

$v(0)$ et $v(1)$ ont bien un sens car $H^1(]0,1[) \subset \mathcal{C}^0([0,1])$ avec injection continue. On considère la norme habituelle sur H^1.

Soit $v_n \in V$ t.q $v_n \xrightarrow{H^1} v$. On a donc $v_n \xrightarrow{\mathcal{C}^0} v$ et donc $v_n(0) \to v(0)$ et $v_n(1) \to v(1)$. Comme $v_n(0) = v_n(1)$ on a $v(0) = v(1)$ et $v \in V$. V est donc fermé ds H^1. V est donc un espace de Hilbert

2) $(P) \begin{cases} -u'' + cu = f & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = u(1), & u'(1) = u'(0) + \beta \end{cases}$ $\beta \in \mathbb{R}$.

Soit $u \in H^2(]0,1[)$ une solution de (P). $\forall v \in H^1$, en multipliant l'équation $-u'' + cu = f$ par v et en intégrant on a donc

$$-\int_0^1 u''v + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv$$

La formule de Green donne alors

$$\int_0^1 u'v' - \left(u'(1)v(1) - u'(0)v(0)\right) + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv$$

Si on considère $v \in H^1 \cap V$ alors $v(1) = v(0)$, et puisque $u'(1) = u'(0) + \beta$ on obtient

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv + \beta v(0).$$

ie $A(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$

Il s'agit de la formulation variationnelle de (P).

avec $A(u,v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 cuv$

$L(v) = \int_0^1 fv + \beta v(0).$

Cette formulation est équivalente à (P). En effet, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, on a $\int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 cu\varphi = \int_0^1 f\varphi$

$A(u,\varphi) = L(\varphi)$ donc, puisque $\varphi(0) = 0$,

ie $-u'' + cu \overset{\mathcal{D}'}{=} f$

donc en particulier $u'' \overset{\mathcal{D}'}{=} cu - f \in L^2$

donc $u'' \in L^2$ ie $u \in H^2$.

Comme $u \in H^2$, on peut appliquer la formule de Green à l'égalité

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv + \beta v(0)$$

ce qui donne

$$-\int_0^1 u''v + \int_0^1 cuv + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fv + \beta v(0)$$

et donc, par l'égalité $-u''+cu \overset{L^2}{=} f$,

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \beta v(0) \qquad \forall v \in V$$

i.e. $$v(0)\left(u'(1) - u'(0) - \beta\right) = 0 \qquad \forall v \in V$$

et donc $u'(1) - u'(0) = \beta$.

La formulation variationnelle implique donc (P).

3). Le problème (P) admet donc une unique solution car le théorème de Lax-Milgram s'applique. On a en effet

$$|A(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|c\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$
$$\leq \max(1, \|c\|_{L^\infty})\left(\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\right)$$
$$\leq \max(1, \|c\|_{L^\infty})\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

$M := \max(1, \|c\|_{L^\infty})$

$\alpha := \min(1, c_0)$

$$A(u,u) = \int_0^1 u'^2 + \int_0^1 cu^2 \geqslant \min(1, c_0)\|u\|_{H^1}^2$$

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + |\beta|\,|v(0)|$$
$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + |\beta|\,c\,\|v\|_{H^1}$$

c constante de l'injection continue $H^1 \subset \mathcal{C}^0$.

$L := \max(1, c)$

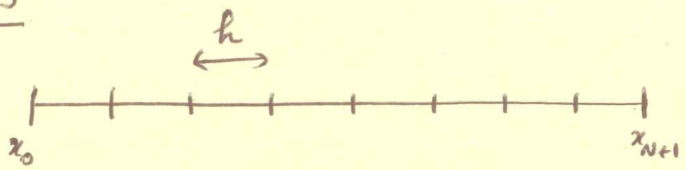
$$|L(v)| \leq \max(1,c)\left(\|f\|_{L^2} + |\beta|\right)\|v\|_{H^1}$$

4) On a $$\alpha\|u\|_{H^1}^2 \leq A(u,u) = L(u) \leq L\left(\|f\|_{L^2} + |\beta|\right)\|u\|_{H^1}$$

et donc $$\|u\|_{H^1} \leq \frac{L}{\alpha}\left(\|f\|_{L^2} + |\beta|\right)$$

Cette inégalité exprime la continuité de la solution vis à vis des paramètres f et β.

Exercice 3



$$V_h = \{ v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}),\ v_h(0) = v_h(1),\ v_h/_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1 \}$$

avec $P_1 = \{ p(x) = ax+b,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \}$

$$w_h^i \in V_h \quad , \quad w_h^i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \forall\, j = 0, \dots, N+1$$

1) Les fonctions des $\tilde{w}_h^i$, $i = 1, \dots, N$ et la fonction $x \mapsto 1$ $\tilde{w}_h^{N+1}$ sont clairement dans V_h puisque $w_h^i(0) = w_h^i(1) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$ et $\tilde{w}_h^{N+1}(0) = \tilde{w}_h^{N+1}(1) = 1$.

Montrons qu'elles forment une famille libre :

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{\alpha}_i \tilde{w}_h^i(x) + \tilde{\alpha}_{N+1} \tilde{w}_h^{N+1}(x) = 0$$

$\Rightarrow$ (en prenant $x = 0$ ou $x = 1$) $\quad \tilde{\alpha}_{N+1} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \tilde{\alpha}_i \tilde{w}_h^i(x) = 0$$

$\Rightarrow$ (en prenant $x = x_j$) $\quad \tilde{\alpha}_j = 0$

On a donc bien $\tilde{\alpha}_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$ et $\tilde{\alpha}_{N+1} = 0$ donc la famille est libre.

Montrons qu'elles forment une famille génératrice :

Soit $v_h \in V_h$. La fonction

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{m} (v_h(x_i) - v_h(0))\, \tilde{w}_h^i(x) + v_h(0)\, \tilde{w}_h^{N+1}(x)$$

coincident avec v_h en tout point x_j, $j = 0, \dots, N+1$ et donc sur chacun des intervalles puisque la fonction est affine par morceaux (et donc affine sur chacun des intervalles).

On a donc réussi à exprimer $v_h \in V_h$ comme une combinaison linéaire des $\{ \tilde{w}_h^i, \tilde{w}_h^{N+1},\ i = 1, \dots, N \}$.

Cette famille est donc une base de V_h.

2) Les fonctions $\tilde{w}_h^i$ $i=1,\dots,N$ sont clairement dans V_h

et $\tilde{w}_h^{N+1} = w_h^0 + w_h^{N+1}$

car $\tilde{w}_h^i(0) = \tilde{w}_h^i(1) = 0 \quad \forall i=1,\dots,N$

et $\tilde{w}_h^{N+1}(0) = w_h^0(0) + w_h^{N+1}(0) = 1+0 = 1$

et $\tilde{w}_h^{N+1}(1) = w_h^0(1) + w_h^{N+1}(1) = 0+1 = 1.$

Montrons qu'elles forment une famille libre :

$$\sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \tilde{w}_h^i(x) + \tilde{\alpha}_{N+1} \tilde{w}_h^{N+1}(x) = 0$$

$\Longrightarrow$ $\tilde{\alpha}_{N+1} = 0$ (en prenant $x=0$ ou $x=1$)

$\tilde{\alpha}_j = 0$ (en prenant $x = x_j$)

Montrons qu'elles forment une famille génératrice :

Soit $v_h \in V_h$. Puisque $\tilde{w}_h^{N+1}(x_j) = w_h^0(x_j) + w_h^{N+1}(x_j)$
$= 0 + 0 = 0 \quad \forall j=1,\dots,N$

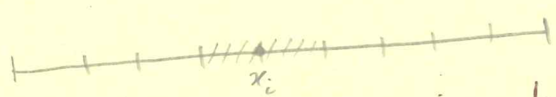
il est clair que

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_h(x_i)\, \tilde{w}_h^i(x) + v_h(0)\, \tilde{w}_h^{N+1}(x)$$

En effet, le membre de droite coïncide avec v_h en chacun des points x_j, $j=0,\dots,N+1$ et donc sur tout le domaine puisque v_h est affine sur chacun des sous-intervalles. La famille forme donc une base

3) On préfère considérer la deuxième base car l'intersection des supports de deux fonctions de base $\tilde{w}_h^i$ et $\tilde{w}_h^j$ est vide dès que $|i-j|>1$, ce qui donnera beaucoup de 0 dans la matrice du système linéaire.

//// support de $\tilde{w}_h^i$



Ce sera moins le cas pour la première base à cause de la fonction

$\tilde{w}_h^{N+1} : x \mapsto 1$

dont le support ne sera jamais d'intersection vide avec les autres $\tilde{w}_h^i$.

4) V_h est un fermé de V donc le théorème de Lax-Milgram s'applique.

5) La dernière composante de B_h est donnée par

$$f_0 \int_0^1 \tilde{w}_h^{N+1}(x)\,dx + \beta\, \tilde{w}_h^{N+1}(0)$$

$$= f_0 \int_0^1 (w_h^0(x) + w_h^{N+1}(x))\,dx + \beta$$

$$w_h^0(x) = \frac{h-x}{h} = \frac{x_1 - x}{h}$$

$$w_h^{N+1}(x) = \frac{x-(1-h)}{h} = \frac{x - x_N}{h}$$

$$= f_0 \int_0^1 w_h^0(x)\,dx + f_0 \int_0^1 w_h^{N+1}(x)\,dx + \beta$$

$$= f_0 \int_0^h \frac{h-x}{h}\,dx + f_0 \int_{1-h}^1 \frac{x-(1-h)}{h}\,dx + \beta$$

$$= \frac{f_0 h}{2} + \frac{f_0 h}{2} + \beta$$

$$= f_0 h + \beta.$$