UVSQ
MSMA850 — 2013-2014

Examen du 29 avril 2014

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1.
Soit deux fonctions $c \in C^0([0,1])$ et $f \in L^2(]0,1[)$. On suppose qu'il existe une constante C_0 telle que $c(x) \geq C_0$ pour tout x dans $]0,1[$ et on considère le problème aux limites (P) suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = u(1), \quad u'(1) = u'(0) + \beta, \end{cases}$$

où β est une constante donnée.
1) Montrer que l'espace

$$V = \{v \in H^1(]0,1[), v(0) = v(1)\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit par celui de $H^1(]0,1[)$.
2) Donner la formulation variationnelle de (P) et montrer qu'elle est équivalente à (P).
3) Montrer que le problème (P) admet une unique solution.
4) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||u||_{H^1(]0,1[)} \leq C\Big(||f||_{L^2(]0,1[)} + |\beta|\Big).$$

Que signifie cette inégalité ?

Exercice 2.
Soit le triplet (K, P, Σ) défini par
- K le losange de sommets $A^1 = (1,0), A^2 = (-1,0), A^3 = (0,1), A^4 = (0,-1)$,
- $P = Q_1$
- $\Sigma = Vect\{p \to p(A^i), i = 1,2,3,4\}$.

Est-ce que ce triplet définit un élément fini unisolvant ?

Exercice 3.
On considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + tx\partial_x u(x,t) = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,t=0) = g(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où g est une fonction continue.
1) Résoudre cette équation par la méthode des caractéristiques.
2) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, quelle est la limite de $u(x,t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 4.
Résoudre par la méthode des caractéristiques le système

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x u(x,t) = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t v(x,t) + \partial_x u(x,t) + 2\partial_x v(x,t) = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,t=0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}, \\ v(x,t=0) = v_0(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où les fonctions u_0 et v_0 sont supposées connues.

Bref corrigé de l'examen du 29 avril 2014

Exercice 1

Voir correction du partiel (exercice identique)

Exercice 2

Un élément p de Q_1 est un polynome de la forme

$$p(x_1, x_2) = a + b x_1 + c x_2 + d x_1 x_2$$

La donnée des valeurs p_1, p_2, p_3, p_4 de ce polynome aux points A^1, A^2, A^3, A^4 s'écrit

$$p_1 = a+b$$
$$p_2 = a-b$$
$$p_3 = a+c$$
$$p_4 = a-c$$

Il est clair que ces relations ne permettent pas de définir les coefficients a, b, c, d (et donc le polynôme p) de manière unique. Le triplet (K, P, Σ) ne peut donc pas définir un élément fini unisolvant.

Exercice 3

1) Les caractéristiques sont définies par

$$\begin{cases} X'(t) = t\,X(t) \\ X(t_*) = x_* \end{cases}$$

ce qui donne

$$X(t) = x_* \, e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t_*^2}{2}}$$

La solution u étant constante le long des caractéristiques (voir le cours), on a donc pour tout (x_*, t_*)

$$u(x_*, t_*) = u(X(t_*), t_*)$$
$$u(x_*, t_*) = u(X(0), 0)$$
$$u(x_*, t_*) = g(X(0))$$
$$u(x_*, t_*) = g(x_* e^{-\frac{t_*^2}{2}})$$

La solution est donc $u(x,t) = g(x e^{-t^2/2})$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = \lim_{t \to +\infty} g(x e^{-t^2/2}) = g(0)$

Exercice 4

La fonction u vérifiant

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = 0 \\ u(x, t=0) = u_0(x) \end{cases}$$

on a tout de suite (voir le cours)

$$u(x,t) = u_0(x-t)$$

La fonction v vérifie alors

$$\begin{cases} \partial_t v + 2\partial_x v = -u_0'(x-t) \\ v(x, t=0) = v_0(x) \end{cases}$$

Les caractéristiques associées à cette équation sont définies par

$$\begin{cases} X'(t) = 2 \\ X(t_*) = x_* \end{cases}$$

ce qui donne $\quad X(t) = 2(t - t_*) + x_*$.

Le long des caractéristiques, la fonction v vérifie

$$\frac{d}{dt} v(X(t), t) = \partial_t v + X'(t)\, \partial_x v$$
$$= \partial_t v + 2\partial_x v$$
$$= -u_0'(X(t) - t)$$

de sorte que, en intégrant entre $t=0$ et $t=t_*$, il vient

$$v(x_*,t_*) = v_0(X(0)) - \int_0^{t_*} u_0'(X(s)-s)\,ds$$

$$v(x_*,t_*) = v_0(x_*-2t_*) - \int_0^{t_*} u_0'(s+x_*-2t_*)\,ds$$

$$v(x_*,t_*) = v_0(x_*-2t_*) - u_0(x_*-t_*) + u_0(x_*-2t_*)\,.$$

On a donc finalement

$$\begin{cases} u(x,t) = u_0(x-t) \\ v(x,t) = v_0(x-2t) - u_0(x-t) + u_0(x-2t)\,. \end{cases}$$