

Géométrie Différentielle

Niveau L2

C. Chalons (UVSQ)

La rédaction de ces notes s'est inspirée

- des cours en ligne de Gérard Lavau
- des cours de Jean-Paul Truc
- de mes propres notes de cours lorsque j'étais étudiant

Une fonction de plusieurs variables est une application

$$f: \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^p$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que \mathcal{D}_f est le domaine de définition de f et on le note souvent simplement \mathcal{D} . Il correspond à l'ensemble des points de \mathbb{R}^n qui ont une image par f .

Exemple: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2, x_1 + x_2)$$

ici $n=2, p=3, \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.

On notera souvent f_1, \dots, f_p les composantes de f . Ici

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre à dériver (différentier) et à approcher localement une telle fonction, ainsi que d'en trouver les extrema.

Remarque Si $n=p=1$, on retrouve la notion de fonction "classique".

Notion de norme

On appelle norme sur \mathbb{R}^n une application notée $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les

$$x \mapsto \|x\|$$

propriétés suivantes :

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geq 0$
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$
- (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
- (iv) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Exemple $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$: norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , et $\|x\| = |x|$ sur \mathbb{R} .

Définitions Soit $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une norme

1) On appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$ la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$. La norme permet donc de définir une notion de distance entre deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

2) On appelle boule ouverte (fermée) de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon R le sous-ensemble de \mathbb{R}^n défini par

$$B(x, R) = \{ y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = \|y - x\| < R \}$$

$$(\bar{B}(x, R) = \{ y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = \|y - x\| \leq R \})$$

3) On dira qu'un ensemble $O \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert ssi

$$\forall x \in O, \exists R > 0, B(x, R) \subset O,$$

ie ssi tout point x de O admet un voisinage qui est inclus dans O .

1) L'intérieur $\overset{\circ}{E}$ d'un sous-ensemble E de \mathbb{R}^n ($E \subset \mathbb{R}^n$) est le sous-ensemble de E défini par

$$\overset{\circ}{E} = \{ x \in E, \exists R > 0, B(x, R) \subset E \}$$

(Si E est ouvert, $\overset{\circ}{E} = E$) $\overset{\circ}{E}$ est le plus grand ouvert inclus ds E

$$(\overset{\circ}{[0, +\infty[}) =]0, +\infty[.$$

2) La fermeture \bar{E} d'un sous-ensemble E de \mathbb{R}^n ($E \subset \mathbb{R}^n$) est le sous-ensemble de \mathbb{R}^n formé des limites des suites convergentes de E , ie

$$x \in \bar{E} \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists (x_n)_n, x_n \in E \forall n, \text{ t.q. } x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x.$$

On a clairement $E \subset \bar{E}$. Plus généralement, \bar{E} est obtenu en ajoutant à E les limites des suites de E , ie "les bords" de E

$$\overline{]0, +\infty[} = [0, +\infty[$$

$$\overline{]0, 1[} = [0, 1].$$

\bar{E} est le plus petit fermé de \mathbb{R}^n contenant E . On dit qu'un ensemble est fermé si toutes les limites des suites convergentes de cet ensemble appartiennent aussi à cet ensemble).

Continuité Soit $f: \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ des normes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p

Définition

On dit que f est continue en x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, ie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon.$$

ie ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ou encore $\lim_{\|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0} \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} = 0$. 3/

Exemple On considère l'application "coordonnée"

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_i$$

pour un i fixé, et les normes habituelles suivantes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R} :

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (\text{norme Euclidienne})$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|$$

$$\text{et } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (\text{valeur absolue})$$

$$x \mapsto |x| = \|x\|$$

Donnons que f est continue en tout point $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(a)| = |x_i - a_i| = |(x-a)_i| \leq \|x-a\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$(\text{en effet, } x_i \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|)$$

En choisissant par exemple $\eta = \varepsilon/2$, on a bien

$$\|x-a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \eta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Avertissement

- La continuité en un point a est équivalente à la convergence de $f(x)$ vers $f(a)$ lorsque x tend vers a , quelque soit le chemin considéré pour rejoindre a .
- Il se peut que $f(x)$ tende vers $f(a)$ lorsque x tende vers a en suivant certains chemins précis, mais pas tous. Dans ce cas la fonction n'est pas continue en a . Par exemple, pour

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 0$$

de sorte que la continuité pourrait sembler pouvoir être assurée.

Il n'en est rien puisque, si l'on considère le chemin $y=x$ pour rejoindre le point $(0,0)$, on observe que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Propriétés

4/

1) La définition de la continuité ne dépend pas des normes considérées sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p

2) La continuité est stable par rapport à l'addition de deux fonctions et par rapport à la multiplication d'une fonction par un scalaire

$$\begin{array}{l} f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } a \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f+g \text{ continue en } a \\ \lambda f \text{ continue en } a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

Néanmoins qu'en général cela n'a pas de sens de parler de la multiplication de deux fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. En revanche, le produit de deux fonctions continues de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est bien continu.

3) Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$$

Il est équivalent de dire que f est continue en a et de dire que

$$\forall k=1, \dots, p \quad f_k \text{ est continue en } a.$$

Si $g: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ et $f: B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont continues (en a et $g(a)$ respectivement) alors l'application

$$A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x \mapsto f \circ g(x) := f(g(x))$$

est continue en a .

Enfin, il est souvent utile d'exprimer la continuité d'une fonction en un point a de manière "séquentielle", ie en terme de convergence de suites. Plus précisément, on a le résultat suivant

Proposition Soit $f: \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in \mathcal{D}_f$

f est continue en $a \Leftrightarrow$ pour toute suite d'éléments de \mathcal{D}_f notés (x_p) telle que $x_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} a$, on a $f(x_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} f(a)$

Avant de démontrer ce résultat, on rappelle que

5/

$$x_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} a \text{ signifie } \forall \varepsilon > 0, \exists p_0, \forall p \geq p_0, \|x_p - a\|_{\text{vect}} < \varepsilon$$
$$f(x_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} f(a) \text{ signifie } \forall \varepsilon > 0, \exists p_0, \forall p \geq p_0, \|f(x_p) - f(a)\|_{\text{vect}} < \varepsilon.$$

Démonstration de la proposition

(\Rightarrow) On sq f est continue en a , c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Considérons une suite (x_p) d'éléments de D_f telle que $x_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} a$, ce qui signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0, \forall p \geq p_0, \|x_p - a\| < \varepsilon.$$

On veut montrer que $f(x_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} f(a)$, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0, \forall p \geq p_0, \|f(x_p) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé, on sait par continuité de f en a qu'il existe

$\eta > 0$ tel que si $\|x - a\| < \eta$, alors $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Pour ce nombre η , on sait puisque $x_p \rightarrow a$ qu'il existe p_0 ,

$\forall p \geq p_0$ on a $\|x_p - a\| < \eta$. Ainsi, $\forall p \geq p_0$, on a

$\|f(x_p) - f(a)\| < \varepsilon$. On a donc montré que pour notre $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\exists p_0, \forall p \geq p_0, \|f(x_p) - f(a)\| < \varepsilon.$$

(\Leftarrow) On suppose que pour toute suite (x_p) ,

$$x_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(x_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} f(a)$$

On veut montrer la continuité de f en a , c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

On va raisonner par l'absurde et supposer que ce n'est pas vrai. 6/

On suppose donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$$\forall \eta > 0, \exists x \text{ t.q. } \|x - a\| < \eta \text{ et } \|f(x) - f(a)\| \geq \varepsilon.$$

Prenons η de la forme $\eta = \frac{1}{p} > 0$. Pour chaque p , il existe donc x_p t.q. $\|x_p - a\| < \frac{1}{p}$ et $\|f(x_p) - f(a)\| \geq \varepsilon$.

Il est clair d'après la relation $\|x_p - a\| < \frac{1}{p}$ que si $p \rightarrow +\infty$

on a $x_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} a$. On devrait donc avoir $f(x_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} f(a)$

d'après l'hypothèse de départ. Or ceci n'est pas vrai car la

$$\text{relation } \|f(x_p) - f(a)\| \geq \varepsilon \quad \forall p$$

entraîne que la distance entre $f(x_p)$ et $f(a)$ est toujours plus grande ou égale à ε (qui est fixé) et ne peut donc pas être rendue arbitrairement petite.

Différentiabilité

On suppose ici que $\mathcal{D}f$ est un ouvert, de telle sorte que tout point $x_0 \in \mathcal{D}f$ admet un voisinage inclus dans $\mathcal{D}f$

Définition

On dit que f est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire et continue $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^m, f(x_0+h) = f(x_0) + g(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, i.e. $\|\varepsilon(h)\| \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$

L'application g , souvent notée $df(x_0)$ est appelée différentielle de f en x_0 .

On note alors $df(x_0) \cdot h$ l'action de $df(x_0)$ sur h , i.e. $g(h) = df(x_0) \cdot h$.

Exemple : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, x_2) \rightarrow x_1^2 + x_2^2$$

Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x_1+h_1, x_2+h_2) = (x_1+h_1)^2 + (x_2+h_2)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 h_1 + x_2 h_2) + h_1^2 + h_2^2 \\ &= f(x) + 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \|h\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } f(x+h) = f(x) + 2 \langle x, h \rangle + \|h\|^2$$

En posant $\varepsilon(h) = \|h\|$, on a bien $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et

$$f(x+h) = f(x) + 2 \langle x, h \rangle + \|h\| \varepsilon(h)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^2

L'application $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h \rightarrow 2 \langle x, h \rangle = \langle 2x, h \rangle$$

est bien linéaire et continue, donc $df(x_0) \equiv g$.

Remarque On remarque que le vecteur $2x = (2x_1, 2x_2)$ coïncide avec le vecteur des dérivées partielles de $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Propriétés

81

- 1) L'application différentielle de f en x_0 est unique.
- 2) Si f et g sont différentiables en x_0 , alors $f+g$ est différentiable en x_0 et $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
- 3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est différentiable en x_0 , alors λf est différentiable en x_0 et $d(\lambda f)(x_0) = \lambda df(x_0)$.
- 4) Si f est différentiable en x_0 et g est différentiable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

Démonstration

La démonstration de ces 4 propriétés ne pose pas de problème particulier. Par manque de temps, on ne démontrera que le premier point. Supposons qu'il existe 2 applications linéaires $df_1(x_0) \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $df_2(x_0) \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telles que

$$f(x_0 + \tilde{h}) = f(x_0) + df_1(x_0) \cdot \tilde{h} + \|\tilde{h}\| \varepsilon_1(\tilde{h}) \quad \forall \tilde{h} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x_0 + \tilde{h}) = f(x_0) + df_2(x_0) \cdot \tilde{h} + \|\tilde{h}\| \varepsilon_2(\tilde{h})$$

avec $\lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \varepsilon_1(\tilde{h}) = \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \varepsilon_2(\tilde{h}) = 0$.

En prenant \tilde{h} sous la forme $\tilde{h} = \lambda h \quad \forall \lambda > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$, et en faisant la soustraction des deux égalités, il vient par linéarité des applications différentielles ($df_1(x_0) \cdot \lambda h = \lambda df_1(x_0) \cdot h$ et $df_2(x_0) \cdot \lambda h = \lambda df_2(x_0) \cdot h$) et après la propriété $\|\lambda h\| = |\lambda| \|h\| = \lambda \|h\|$ car $\lambda > 0$,

$$df_1(x_0) \cdot h = df_2(x_0) \cdot h = \|h\| (\varepsilon_2(\lambda h) - \varepsilon_1(\lambda h)).$$

On remarque que le membre de gauche ne dépend plus de λ . En faisant tendre λ vers 0, il vient donc

$$df_1(x_0) \cdot h = df_2(x_0) \cdot h \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

ie $df_1(x_0) = df_2(x_0)$ d'où l'unicité

Propriété

Si f est différentiable en x_0 , alors f est continue en x_0 et

$$df(x_0) \cdot h = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \theta h) - f(x_0)}{\theta}$$

Démonstration

Puisque $f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0) \cdot h + \|h\| \varepsilon(h)$ si f est différentiable en x_0 , avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, il est clair que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0) \cdot 0 = f(x_0) \quad (\text{par linéarité de } df(x_0) \text{ on a } df(x_0) \cdot 0 = 0)$$

f est donc continue en x_0 .

Par ailleurs, en choisissant h sous la forme θh avec $\theta > 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x_0 + \theta h) - f(x_0) &= df(x_0) \cdot \theta h + \|\theta h\| \varepsilon(\theta h) \\ &= \theta df(x_0) \cdot h + \theta \|h\| \varepsilon(\theta h) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{f(x_0 + \theta h) - f(x_0)}{\theta} = df(x_0) \cdot h + \|h\| \varepsilon(\theta h)$$

$$\text{Ainsi } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \theta h) - f(x_0)}{\theta} = df(x_0) \cdot h$$

Matrice Jacobienne

Pour plus de clarté, on se place provisoirement dans le cas $p=1$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$. Décomposons h dans la base canonique de \mathbb{R}^n :

$$h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$$

Par linéarité de l'application différentielle $df(x_0)$, on a

$$df(x_0) \cdot h = \sum_{i=1}^n h_i df(x_0) \cdot e_i$$

$$= \left(df(x_0) \cdot e_1 \quad df(x_0) \cdot e_2 \quad \dots \quad df(x_0) \cdot e_n \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

Or, d'après la propriété précédente, on a

$$df(x_0) \cdot e_i = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \theta e_i) - f(x_0)}{\theta}$$

c'est-à-dire, en notant $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m$ les coordonnées du point x_0 dans la base e_1, \dots, e_m ($f(x_0) = f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m)$)

$$df(x_0) \cdot e_i = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + \theta, x_0^{i+1}, \dots, x_0^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^m)}{\theta}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

On a donc

$$df(x_0) \cdot h = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

Plus généralement, de la cas $p \geq 1$, si on note f_1, \dots, f_p les p composantes de f de la base canonique de \mathbb{R}^p , on a

$$df(x_0) \cdot h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Cette matrice s'appelle la matrice jacobienne de f en x_0 . Elle est souvent notée $J_f(x_0)$ et les lignes de cette matrice s'appellent les gradients des composantes de f en

remarque soit x différentiable ds un voisinage \mathcal{O} de x_0 .
 On dit que f est \mathcal{C}^1 en x_0 si l'application $x \mapsto df(x)$ est continue en x_0 .
 $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ est différentiable en 0 mais n'est pas \mathcal{C}^1 en 0.
 $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Différentielle d'ordre 2

Supposons que la fonction $f: \mathcal{O}_f \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ soit différentiable dans un voisinage d'un point x_0 de \mathcal{O}_f . On peut donc considérer l'application

$$d_f: \mathcal{O}(x_0) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \\ x \mapsto d_f(x)$$

où $\mathcal{O}(x_0)$ représente le voisinage de x_0 . Rappelons que $\mathcal{O}(x_0) \subset \mathbb{R}^m$

Si cette fonction d_f est différentiable en x_0 , on note $d^2 f(x_0)$ la différentielle et on dit que f est 2 fois différentiable en x_0 .

La différentielle $d^2 f(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p))$. On identifie souvent $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p))$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ de sorte que

on écrit plutôt $d^2 f(x_0)(h, h')$ plutôt que $d^2 f(x_0) \cdot h \cdot h'$ pour tous h et h' de \mathbb{R}^m . On a donc

$$d^2 f(x_0): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p \\ (h, h') \mapsto d^2 f(x_0)(h, h')$$

Théorème de Schwarz (1)

Soit f une application deux fois différentiable en x_0 . Alors $d^2 f(x_0)$ est une application bilinéaire, continue, et symétrique de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, i.e.

$$d^2 f(x_0)(h, h') = d^2 f(x_0)(h', h) \quad \forall (h, h') \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

Matrice Hessienne On se place dans le cas $p=1$.

Soit h et h' dans \mathbb{R}^m . Décomposons h et h' dans la base canonique de \mathbb{R}^m

$$h = \sum_i h_i e_i$$

$$h' = \sum_j h'_j e_j$$

Par linéarité de l'application différentielle seconde $d^2 f(x_0)$ en x_0 , on a

$$d^2p(x_0)(h, h') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_i h'_j d^2p(x_0)(e_i, e_j)$$

On remarque alors que cette expression peut s'écrire sous la forme suivante

$$d^2p(x_0)(h, h') = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m h_i d^2p(x_0)(e_i, e_j) \right) h'_j$$

si on reconnaît le produit scalaire habituel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entre le vecteur h' et le vecteur dont la j ème coordonnée est

$$\sum_{i=1}^m d^2p(x_0)(e_i, e_j) h_i = \sum_{i=1}^m d^2p(x_0)(e_j, e_i) h_i$$

Le vecteur n'est rien d'autre que le vecteur

$$\begin{pmatrix} d^2p(x_0)(e_1, e_1) & \dots & d^2p(x_0)(e_1, e_m) \\ \vdots & & \vdots \\ d^2p(x_0)(e_j, e_1) & \dots & d^2p(x_0)(e_j, e_m) \\ \vdots & & \vdots \\ d^2p(x_0)(e_n, e_1) & \dots & d^2p(x_0)(e_n, e_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

Cette matrice, symétrique d'après le théorème de Schwarz, s'appelle la matrice Hessienne de f en x_0 et est notée $H_f(x_0)$.

On a donc $d^2p_f(x_0)(h, h') = \langle H_f(x_0)h, h' \rangle \forall h, h' \in \mathbb{R}^m$

Dans le cas de la différentielle première, nous avons montré que

$$df(x_0) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Dans le cas de la différentielle seconde, on peut montrer en procédant de manière similaire que

$$d^2p_f(x_0) \cdot (e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

La matrice Hessienne est donc la matrice des dérivées partielles seconde de f .

Remarques

1) Si f est deux fois différentiable en x_0 , on a vu que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

2) Réciproquement, si les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent dans un voisinage de x_0 et sont continues en x_0 , alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

Il est important que toutes les hypothèses soient vérifiées. En effet, si

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y^2 / (x^2 + y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{alors } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On a alors

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3/y^4}{y} = 1$$

Les dérivées croisées ne sont donc pas égales. Le problème vient du fait que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ qui sont bien définies au voisinage de $(0,0)$ (le calcul montre qu'elles sont égales à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x,y) = y^2 \frac{2(6x^2 y^2 - 3x^4 + y^6)}{(x^2 + y^2)^3} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0)$$

mais n'admettant pas de limite en $(0,0)$ (et ne sont donc pas continues en $(0,0)$). Pour s'en convaincre, il suffit en effet de

considérer le chemin $x=0$ puis $y=0$ - pour s'apercevoir que

14/

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^6}{y^6} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

suite page 16/

Formules de Taylor-Young

Ordre 1 On sq f est différentiable en x_0 . Alors $\forall h \in \mathbb{R}^n$
 $f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0) \cdot h + \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Ordre 2 On sq f est deux fois différentiable en x_0 . Alors $\forall h \in \mathbb{R}^n$
 $f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} d^2f(x_0) \cdot h \cdot h + \|h\|^2 \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Extrema d'une fonction de plusieurs variables

Dans ce paragraphe, on suppose que \mathcal{D}_f est ouvert, ie $\forall x \in \mathcal{D}_f$
 $\exists r > 0, B(x, r) \subset \mathcal{D}_f$, et également que $p=1$ de sorte à
 avoir une relation d'ordre naturelle sur les images de f .

Définitions

- 1) On dit que x est un argument-minimum (ou un point de minimum) local de f ssi il existe $R > 0$ t-q
 $\forall y \in B(x, R) \quad f(x) \leq f(y)$.
- 2) On dit que x est un argument-maximum (ou un point de maximum) local de f ssi il existe $R > 0$ t-q
 $\forall y \in B(x, R) \quad f(x) \geq f(y)$.
- 3) On dit que x est un argument-extremum (ou un point d'extremum) local de f ssi x est un argument-minimum ou un argument-maximum de f .

Proposition (condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1)

17/

Soit $f: \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{D}_f ouvert, admettant un point d'extremum local en $a \in \mathcal{D}_f$. On suppose que f est différentiable en a . Alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Démonstration (cas point de minimum local)

$\forall h \in \mathbb{R}^n$ et $\forall t > 0$ suffisamment petit pour que

$$f(a+th) \geq f(a) \quad \text{ie } f(a+th) - f(a) \geq 0$$

comme f est différentiable en a on a d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 et par linéarité de la différentielle

$$0 \leq f(a+th) - f(a) = t \, df(a) \cdot h + t \|h\| \varepsilon(th)$$

En divisant par $t > 0$

$$0 \leq df(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon(th).$$

En faisant tendre t vers 0, puisque $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(th) = 0$, on a

$$df(a) \cdot h \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

En posant $h = -h$, on a donc

$$df(a) \cdot h \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

et donc $df(a) \cdot h = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Puisque, en posant $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$,

$$0 = df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n h_i \, df(a) \cdot e_i = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \forall h_i, i=1, \dots, n$$

On en déduit en prenant successivement $\{h_1=1, h_2=\dots=h_n=0\}$,
 $\{h_1=0, h_2=1, h_3=\dots=h_n=0\}$... que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Proposition (condition nécessaire d'optimalité d'ordre 2)

Soit $f: \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{D}_f ouvert. On suppose que f est deux fois différentiable en a .

(i) si a est un argument-minimum local de f alors

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
- la matrice $H_f(a)$ est positive, i.e. $\langle H_f(a)x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(ii) si a est un argument-maximum local de f alors

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
- la matrice $H_f(a)$ est négative, i.e. $\langle H_f(a)x, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Démonstration (cas (i))

On sait déjà d'après la proposition précédente que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Comme f est deux fois différentiable en a , on a donc $\forall h \in \mathbb{R}^n$ et $\forall t > 0$ suffisamment petit pour que $f(a+th) \geq f(a)$, que

$$0 \leq f(a+th) - f(a) = \frac{t^2}{2} df(a).h.h + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th).$$

d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

En divisant par t^2 et en faisant tendre t vers 0 on obtient donc

$$df(a).h.h \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

c'est-à-dire

$$\langle H_f(a)h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ mais que $H_f(a)$ n'est ni positive ni négative alors f n'admet pas d'extremum local en a . Dans ce cas f admet un point-col ou point-selle en a .

Proposition (condition suffisante d'optimalité d'ordre 2)

191

Soit $f: \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{D}_f ouvert. On suppose f est deux fois différentiable en a .

(i) si a est tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

la matrice $H_f(a)$ est définie positive, i.e.

$$\langle H_f(a)x, x \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

alors a est un argument-minimum local de f

(ii) si a est tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

la matrice $H_f(a)$ est définie négative, i.e.

$$\langle H_f(a)x, x \rangle < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

alors a est un argument-maximum local de f .

Démonstration (cas (i))

D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 et les hypothèses de la proposition on a $\forall h \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$.

$$f(a+th) - f(a) = \frac{t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th)$$

ou encore

$$f(a+th) - f(a) = \frac{t^2}{2} \langle H_f(a)h, h \rangle + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th)$$

En divisant par t^2 , on obtient

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t^2} = \frac{1}{2} \langle H_f(a)h, h \rangle + \|h\|^2 \varepsilon(th).$$

On sait par hypothèse que $\langle H_f(a)h, h \rangle > 0$ donc en prenant t suffisamment petit, le membre de droite de l'égalité

reste > 0 . Ce qui signifie que $f(a+th) \geq f(a)$ pour t

suffisamment petit, et ceci $\forall h \in \mathbb{R}^n$. En prenant $t = \|h\|$ et $h = \frac{h}{\|h\|}$

on a donc $f(a+th) > f(a) \quad \forall h$, dont la norme est suffisamment petite
 a est donc un argument-minimum local de f .

Courbes paramétrées

Généralités

Une courbe paramétrée est définie par la donnée d'une fonction

$F: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p=2$ ou $p=3$, définie sur un intervalle I

de \mathbb{R} . En notant $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ si $p=2$ et $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$

on dira que F est de classe \mathcal{C}^k si les fonctions f_i , $i=1, \dots, p$ sont de classe \mathcal{C}^k sur I , i.e. k fois continûment dérivables.

Interprétation physique

La variable t est souvent associée au temps et $F(t)$ représente la position d'un point mobile $\Pi(t)$, c'est-à-dire les coordonnées du point $\Pi(t)$ dans un repère du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) ou de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est une origine choisie. On a donc $F(t) = \vec{O\Pi}(t)$. La vitesse vectorielle

\vec{v} et l'accélération vectorielle \vec{a} du point sont donc définies par

$$\vec{v} = \frac{d\vec{O\Pi}(t)}{dt} = F'(t) \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{O\Pi}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = F''(t), \text{ les}$$

dérivées pouvant se calculer composante par composante.

Etude des courbes planes ($p=2$)

On supposera dans toute la suite que F a suffisamment de régularité.

Définitions

1) On appelle vecteur vitesse du point $\Pi(t)$ à l'instant t le vecteur

$$\frac{dF(t)}{dt} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix}$$

Si au temps t on a $\frac{dF(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on dira que le point $\Pi(t)$ est un point stationnaire.

2) On appelle vecteur tangent à la courbe représentative de F au point $\Pi(t)$ le premier vecteur dérivé non nul de F en t . Si le point n'est pas stationnaire, le vecteur tangent coïncide donc avec le vecteur vitesse. Sinon il faut continuer de dériver.

Remarque Il se peut qu'une courbe plane n'admette pas de vecteur tangent en un point $\Pi(t)$.

Etude locale d'une courbe plane

2/

On se donne un temps t_0 et on suppose que $F(t)$ admet un développement limité d'ordre n en t_0 , ie que

$$F(t) = F(t_0) + (t-t_0) \frac{dF}{dt}(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2} \frac{d^2F}{dt^2}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} \frac{d^n F}{dt^n}(t_0) + (t-t_0)^m \varepsilon(t-t_0)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

On suppose que $\frac{d^p F}{dt^p}(t_0)$ est le premier vecteur dérivé non nul de F en t_0 (c'est donc par définition le vecteur tangent) et que

$\frac{d^q F}{dt^q}(t_0)$ est le premier vecteur dérivé non nul tel que

$q > p$ et $\det \left(\frac{d^p F}{dt^p}(t_0), \frac{d^q F}{dt^q}(t_0) \right) \neq 0$, ie tel que les vecteurs $\frac{d^p F}{dt^p}(t_0)$ et $\frac{d^q F}{dt^q}(t_0)$ sont libres et forment une base

de \mathbb{R}^2 . Localement autour du point $\pi(t_0)$, $F(t)$ se comporte

donc comme $\frac{(t-t_0)^p}{p!} \frac{d^p F}{dt^p}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \frac{d^q F}{dt^q}(t_0)$, ie

$$\vec{O}\pi(t) \sim F(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} \frac{d^p F}{dt^p}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \frac{d^q F}{dt^q}(t_0), \text{ ou encore}$$

$$\vec{M}_0 \pi(t) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!} \frac{d^p F}{dt^p}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} \frac{d^q F}{dt^q}(t_0).$$

Autrement dit, dans le repère $(M_0, \frac{d^p F}{dt^p}(t_0), \frac{d^q F}{dt^q}(t_0))$ les

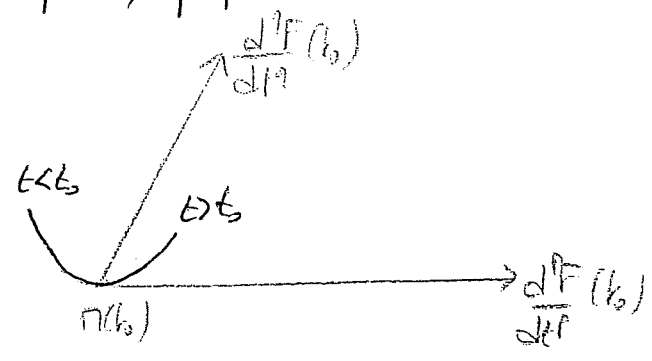
coordonnées du point π se comportent comme

$$\begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \\ \frac{(t-t_0)^q}{q!} \end{pmatrix}$$

lorsque $t \rightarrow t_0$.

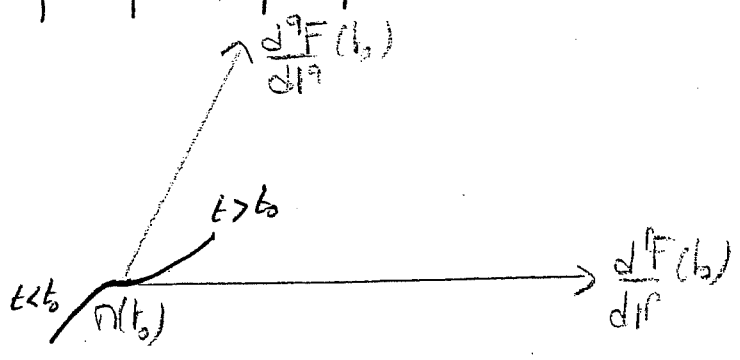
Etudions les différentes formes possibles selon la parité de p et q (la parité de p et q va déterminer le signe de $\frac{d^p F}{dt^p}(t_0)$ et $\frac{d^q F}{dt^q}(t_0)$ au voisinage de t_0).

1^{er} cas p impair, q pair



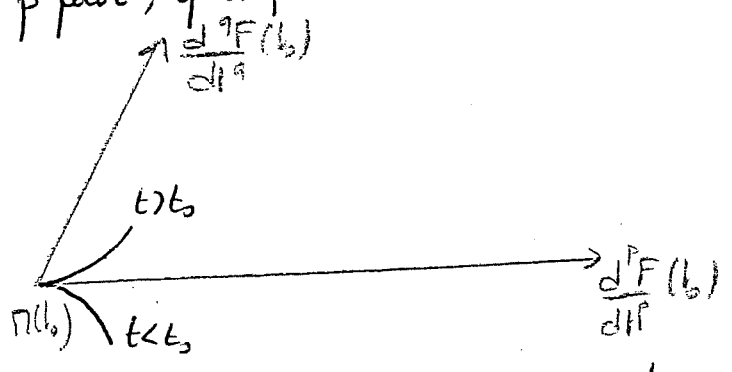
On dit que $\pi(t_0)$ est un point birégulier

2^{ème} cas p impair, q impair



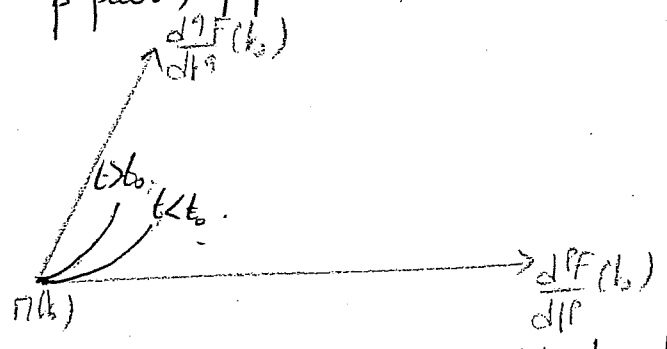
On dit que $\pi(t_0)$ est un point d'inflexion

3^{ème} cas p pair, q impair



On dit que $\pi(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce

4^{ème} cas p pair, q pair



On dit que $\pi(t_0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce

Etude des branches infinies.

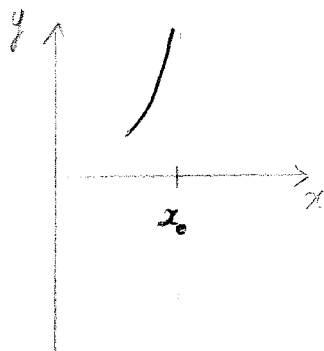
4/

On suppose que pour un certain temps t_0 , on a $\lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t)\| = +\infty$,
c'est-à-dire par définition de la norme

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = +\infty. \quad \text{si on note } F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

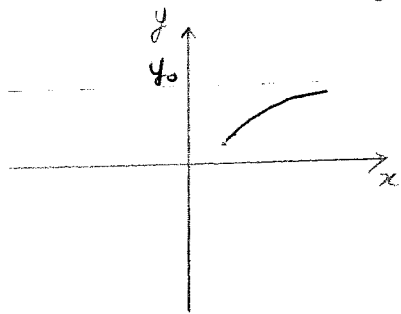
Il y a différents cas de figure possibles, que l'on va représenter dans le plan (x, y) .

1^{er} cas $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty$



La droite $x = x_0$ est une asymptote verticale en $t = t_0$.

2^e cas $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$



La droite $y = y_0$ est une asymptote horizontale en $t = t_0$.

3^e cas $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty$

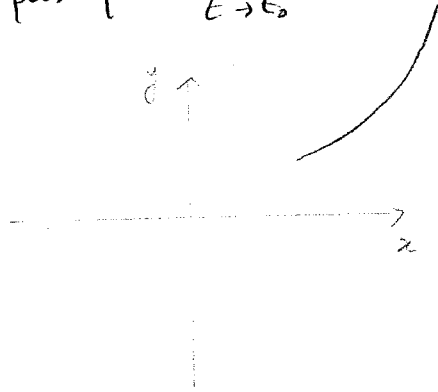
Ce cas nécessite une étude particulière plus poussée.

On étudie plus précisément la limite lorsque t tend vers

t_0 du rapport $\frac{y(t)}{x(t)}$

$$a) \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm \infty$$

Cela signifie que $|x(t)|$ devient infiniment petit par rapport à $|y(t)|$, tout en devenant infiniment grand puisque n'oublions pas que $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty$.

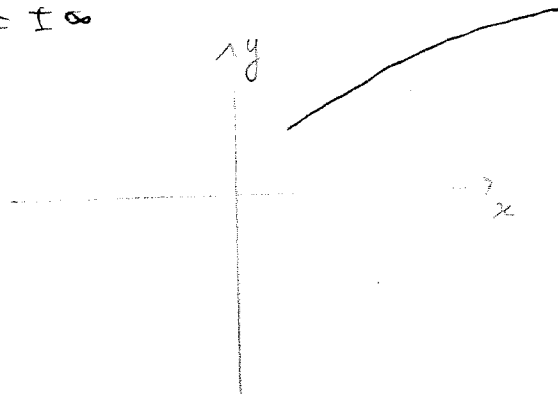


On a une branche parabolique de direction Oy

$$b) \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

Cela signifie que $|x(t)|$ devient infiniment grand par rapport à $|y(t)|$, $|y(t)|$ continuant à devenir infiniment grand puisque

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty$$

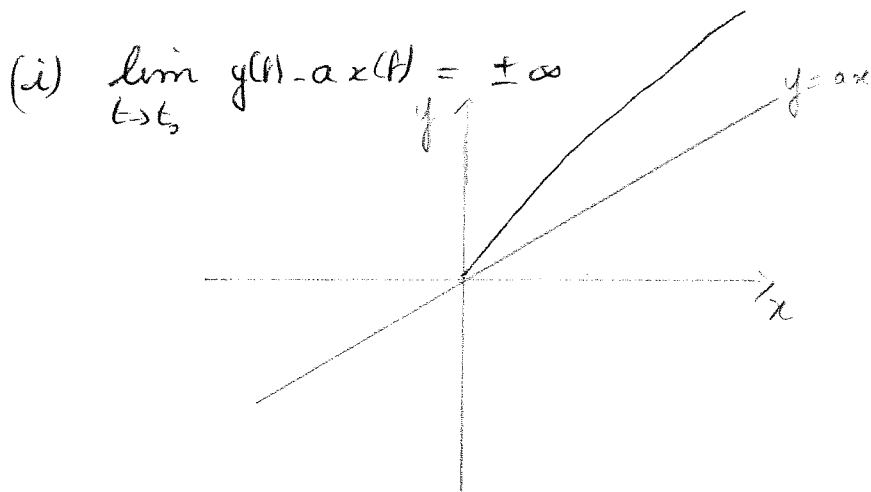


On a une branche parabolique de direction Ox

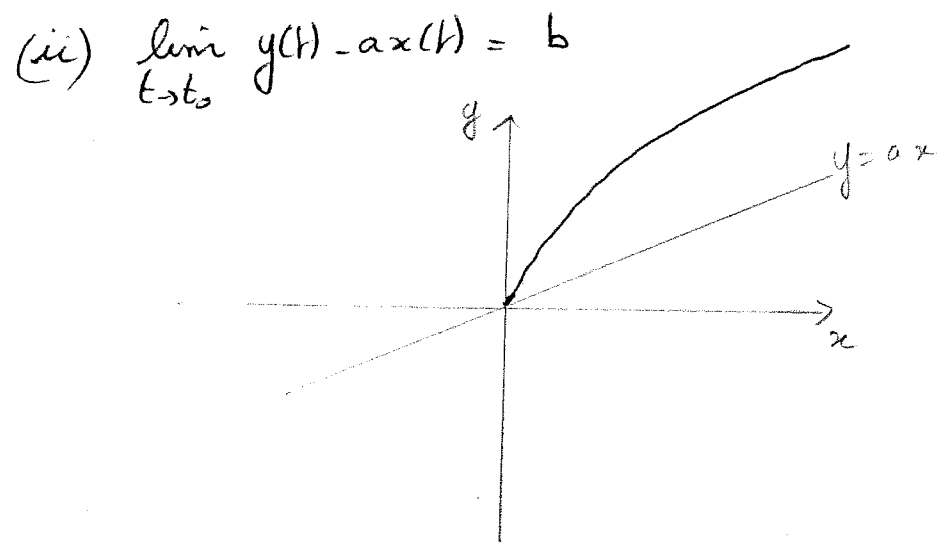
$$c) \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$$

On a une direction asymptotique de direction $y = ax$ mais ce cas nécessite une étude particulière, pour être plus précis.

On étudie plus précisément $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t))$.



On a une branche parabolique dans la direction $y=ax$
 Il n'y a en effet pas asymptote car la trajectoire s'éloigne indéfiniment mais de plus en plus lentement de la droite $y=ax$.



On a dans ce cas une asymptote d'équation $y=ax+b$.
 Dans ce cas, la trajectoire s'éloigne à distance finie égale à b de la droite $y=ax$.

Plan d'étude d'un arc paramétré.

Pour étudier et représenter un arc paramétré, on suit généralement les étapes suivantes

- 1) On définit tout d'abord l'ensemble de définition de l'arc.

2) On essaie de réduire l'étude à un ensemble plus petit en tenant compte d'éventuelles propriétés de symétries, de périodicité, ...

En voici quelques exemples

$$i) \exists T > 0 \begin{cases} x(t) = x(t+T) \\ y(t) = y(t+T) \end{cases}$$

On réduit dans ce cas l'étude à un intervalle de longueur T

$$ii) \begin{cases} x(t) = x(-t) \\ y(t) = y(-t) \end{cases}$$

Il suffit alors de faire l'étude pour $t \geq 0$

$$(iii) \begin{cases} x(t) = x(-t) \\ y(t) = -y(-t) \end{cases}$$

Il suffit de faire l'étude pour $t \geq 0$ et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe Ox .

$$(iv) \begin{cases} x(t) = -x(-t) \\ y(t) = y(-t) \end{cases}$$

Idem avec l'axe Oy

$$(v) \begin{cases} x(t) = -x(-t) \\ y(t) = -y(-t) \end{cases}$$

Idem en effectuant une symétrie par rapport à l'origine

$$(vi) \begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$$

Idem avec une symétrie par rapport à la première bissectrice.

⋮

3) On trace un tableau de variation de $t \rightarrow x(t)$ et $t \rightarrow y(t)$.

4) On étudie les branches infinies, les points remarquables stationnaires, les points multiples ($\pi(t) = \pi(t')$, $t \neq t'$) ...

5) On trace la trajectoire.

Courbes en coordonnées polaires

8/

Il est bien connu que tout point $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ peut s'exprimer à l'aide des coordonnées polaires, c'est-à-dire sous la forme

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = r \vec{e}_r$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

et $\theta \in [0, 2\pi[\text{ t.q. } \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \text{ si } r \neq 0.$

On se propose dans ce paragraphe de considérer des courbes paramétrées exprimées en coordonnées polaires, c'est-à-dire sous la forme

$$F(\theta) = r(\theta) \vec{e}_r = r(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

On se propose d'étudier ces courbes uniquement à l'aide des propriétés de $\theta \rightarrow r(\theta)$.

On ne va pas se restreindre à $[0, 2\pi]$ car r n'est pas forcément périodique. Remarquons tout d'abord que $\|F(\theta)\| = |r(\theta)|$ de sorte que la distance à l'origine du point $r(\theta)$ est donnée par $|r(\theta)|$. Notons également que la fonction $r(\theta)$ n'est pas nécessairement supposée positive ici.

Vecteur vitesse

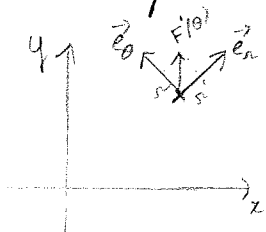
Le vecteur vitesse est donné par

$$F'(\theta) = r'(\theta) \vec{e}_r + r(\theta) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}}_{=: \vec{e}_\theta}$$

$$\text{si } F'(\theta) = r'(\theta) \vec{e}_r + r(\theta) \vec{e}_\theta$$

On remarque que les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ forment une base orthonormée ($\|\vec{e}_r\| = \|\vec{e}_\theta\| = 1$, $\langle \vec{e}_r, \vec{e}_\theta \rangle = 0$) directe ($\det(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) > 0$) de \mathbb{R}^2

$r'(\theta)$ et $r(\theta)$ sont donc les composantes de ce vecteur vitesse dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$



On remarque en particulier que l'angle γ entre le vecteur \vec{e}_r et le vecteur vitesse $F'(\theta)$ est tel que

$$\tan \gamma = \frac{r'}{r} \quad \text{si } r \neq 0.$$

Point stationnaire

Un point stationnaire étant par définition un point pour lequel le vecteur vitesse $F'(\theta)$ est nul, on remarque que la seule possibilité est d'avoir

$$\begin{cases} r(\theta) = 0 \\ r'(\theta) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire que l'origine est le seul point pouvant éventuellement être stationnaire en coordonnées polaires.

Tangente à la courbe

La tangente à la courbe paramétrisée en un point $\pi(\theta)$ est la droite passant par $\pi(\theta)$ et de vecteur directeur le premier vecteur dérivé $F'(\theta)$ non nul. Si cette tangente existe, alors on remarque qu'il y a plusieurs possibilités :

i) le point n'est pas stationnaire

le vecteur tangent est alors donné par le vecteur

$$F'(\theta) = r'(\theta) \vec{e}_r + r(\theta) \vec{e}_\theta$$

ii) le point est stationnaire (ie $r(\theta) = r'(\theta) = 0$)

dans ce cas, on a $F'(\theta) = \vec{0}$ donc il faut dériver davantage.

$$F''(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta)) \vec{e}_r + 2r'(\theta) \vec{e}_\theta$$

Comme on est en un point stationnaire, $r(\theta) = r'(\theta) = 0$, on a donc $F''(\theta) = r''(\theta) \vec{e}_r$. Le vecteur tangent est donc \vec{e}_r , sauf si $r''(\theta) = 0$, auquel cas, il faut dériver encore...

On trouve $F'''(\theta) = r'''(\theta) \vec{e}_r$

On s'arrête au premier vecteur non nul et on trouve donc qu'en un point stationnaire (qui est nécessairement l'origine) le vecteur tangent est le vecteur \vec{e}_r .

Ce résultat provient en réalité directement de la relation

$$\vec{O\pi} = r \vec{e}_r$$

qui dit que \vec{e}_r est un vecteur directeur de la corde joignant O à $\pi(t)$. A la limite, \vec{e}_r est donc un vecteur directeur de la tangente par définition

exemples : coniques, droites, cercles
voir TD

Introduction aux courbes gauches (p=3)

Une courbe gauche est une courbe dans l'espace.

On se proposera ici qu'une courte introduction aux courbes gauches par manque de temps. Soit donc $F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Tangente

De même que précédemment, la tangente en un point $\pi(t_0)$ est la droite passant par ce point et ayant pour vecteur directeur le premier vecteur dérivé non nul $F^{(p)}(t_0)$.

Plan tangent

On appelle plan tangent à la courbe en $\pi(t_0)$ tout plan passant par $\pi(t_0)$ et contenant la tangente. On remarque qu'un plan de \mathbb{R}^3 étant de dimension 2, s'il y a un plan tangent (c'est-à-dire si la tangente est bien définie) alors il y en a une infinité.

Plan osculateur

On appelle plan osculateur à la courbe en $\pi(t_0)$ le plan passant par $\pi(t_0)$, contenant la tangente (c'est donc un plan tangent !) et dont une direction est aussi donnée par le premier vecteur dérivé $F^{(q)}(t_0)$ non nul et linéairement indépendant avec $F^{(p)}(t_0)$.

D'un point de vue géométrique, le plan osculateur est le plan tangent qui "épouse le mieux" la courbe au voisinage du point $\pi(t_0)$. Cela s'explique simplement à l'aide d'un développement limité de $F(t)$ en t_0 :

$$F(t) = F(t_0) + (t-t_0) F'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2} F''(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^q}{q!} F^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \mathcal{E}(t)$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{E}(t) = 0$

de sorte que

$$\overrightarrow{\pi(t)} \pi(t) = F(t) - F(t_0) \approx \frac{(t-t_0)^p}{p!} F^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} F^{(q)}(t_0)$$

au voisinage de $t=t_0$, i.e. au voisinage du point $\pi(t_0)$.

On se donne une courbe paramétrée $F: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec $p=2$ ou $p=3$ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

au \mathcal{C}^1 par morceaux
ou par morceaux différentiables

définition (longueur d'un arc). On suppose que F est de classe \mathcal{C}^1 pour $t \in [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$. On appelle longueur de l'arc défini par $F(t)$ pour t variant entre t_0 et t_1 la quantité

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt$$

($t_0 < t_1 \Rightarrow$ la longueur est positive par définition)

où $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne.

Faisons tout de suite quelques remarques permettant de justifier cette définition.

i) Tout d'abord, si dt représente un accroissement infiniment petit du paramètre t , ou autrement dit si t_0 et t_1 sont infiniment proches l'un de l'autre, alors la formule de Taylor à l'ordre 1 nous permet tout d'abord d'écrire $F(t_1) - F(t_0) \sim F'(t)(t_1 - t_0)$ de sorte que

$$\|F(t_1) - F(t_0)\| \approx (t_1 - t_0) \|F'(t)\| = \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt$$

(pour des distances infiniment petites). Or $\|F(t_1) - F(t_0)\|$ correspond bien à la longueur de l'arc considéré (toujours par des accroissements infiniment petits) comme une ligne droite en $F(t_0)$ et $F(t_1)$:

$$d(F(t_0), F(t_1)) = \|\overrightarrow{\Pi(t_0)\Pi(t_1)}\| = \|F(t_1) - F(t_0)\|.$$

La formule $L = \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt$ peut donc être comprise comme une généralisation.

ii) Rappelons que $F'(t)$ représente le vecteur vitesse du point $\Pi(t)$ à l'instant t et que $\|F'(t)\|$ représente donc la vitesse scalaire du point $\Pi(t)$ à l'instant t . Intégrer la vitesse entre deux instants t_0 et t_1 donne bien la distance parcourue entre ces deux instants. (c'est évident par une vitesse constante...)

On retrouve par ailleurs avec la définition proposée de la longueur 2/ des formules bien connues :

iii) si $F(t) = tA + B$ avec A et B des points de \mathbb{R}^p , la courbe est une ligne droite. La longueur de l'arc entre 2 instants t_0 et t_1 est donc $\|F(t_1) - F(t_0)\| = (t_1 - t_0)\|A\|$. Or la définition proposée permet bien de retrouver cette valeur puisque

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \|A\| dt = (t_1 - t_0)\|A\|.$$

iv) pour un cercle de rayon r , on a $F(\theta) = r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$. Le périmètre est donné par $2\pi r$. La définition proposée de la longueur donne

$$L = \int_0^{2\pi} \|F'(\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} \left\| r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\| d\theta = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r$$

Définition (changement de paramétrage admissible)

On dit que $[u_0, u_1] \rightarrow [t_0, t_1]$ est un changement de paramétrage admissible si la fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 et strictement monotone.

$$t_0 := \varphi(u_0)$$

$$t_1 := \varphi(u_1)$$

Proposition

La longueur d'un arc paramétré est invariante par changement de paramétrage admissible.

Démonstration Rappelons tout d'abord que si f est une fonction continue, et φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[u_0, u_1]$ et dont l'image est contenue dans le domaine de définition de f alors

$$\int_{u_0}^{u_1} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_{\varphi(u_0)}^{\varphi(u_1)} f(t) dt.$$

$F'(x) = f(x)$
 $(F \circ \varphi)'(u) = \varphi'(u) f(\varphi(u))$
 $(LHS) = F(\varphi(u_1)) - F(\varphi(u_0))$

Pour la longueur L , cette formule de changement de variable donne

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt = \int_{\varphi(u_0)}^{\varphi(u_1)} \|F'(\varphi(u))\| \varphi'(u) du$$

Si le changement de paramétrage est strictement croissant, alors $\varphi'(u) \geq 0$ et $\varphi'(u)$ peut être ramené à l'intérieur de la norme. On a donc

$$\int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt = \int_{u_0}^{u_1} \|F'(\varphi(u)) \varphi'(u)\| du = \int_{u_0}^{u_1} \|G'(u)\| du \quad (u_0 < u_1) \quad 3/$$

où G est la fonction définie par $G(u) = F(\varphi(u))$

de même, si le changement de paramétrage est strictement décroissant

$$\text{alors} \quad \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt = - \int_{u_0}^{u_1} \|F'(\varphi(u)) \varphi'(u)\| du = \int_{u_1}^{u_0} \|G'(u)\| du \quad (u_1 < u_0)$$

$$\text{ou encore} \quad \int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt = \int_{u_1}^{u_0} \|G'(u)\| du. \quad (u_1 < u_0)$$

$$t_0 = \varphi(u_0)$$

$$t_1 = \varphi(u_1)$$

La longueur d'un arc paramétré étant invariante par changement de paramétrage admissible, il peut être intéressant de privilégier un paramétrage particulier. C'est le rôle que peut jouer l'abscisse curviligne.

Abscisse curviligne

Définition

Soit t_0 fixé. On choisit le point $M_0 = M(t_0)$ comme origine. On appelle abscisse curviligne du point $M(t)$ la quantité

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|F'(x)\| dx.$$

L'abscisse curviligne est donc définie à une origine près et son signe varie selon que $t < t_0$ ou $t > t_0$. Si $t > t_0$, elle coïncide avec la longueur de l'arc entre t_0 et t , et si $t < t_0$ elle coïncide avec l'opposé de la longueur de l'arc entre t et t_0 . L'abscisse curviligne joue donc pour une courbe exactement le même rôle que l'abscisse "classique" pour une droite (ou un axe) orienté et muni d'une origine.

Remarquons tout de suite que l'abscisse curviligne est invariante par changement de paramétrage admissible croissant alors qu'elle change de signe sous l'effet d'un changement de paramétrage admissible décroissant.

En effet, pour un changement de paramétrage croissant 4/

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|F'(k)\| dt = \int_{u_0}^u \|F'(\varphi(u))\| \varphi'(u) du = \int_{u_0}^u \|G'(u)\| du = s$$

alors que pour un changement de paramétrage décroissant

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|F'(k)\| dt = \int_{u_0}^u \|F'(\varphi(u))\| \varphi'(u) du = - \int_{u_0}^u \|F'(\varphi(u))\| du = - \int_{u_0}^u \|G'(u)\| du = -s(u)$$

Remarquons également que si F' ne s'annule pas sur un intervalle, c'est-à-dire si F n'est pas constante sur intervalle (F pourra éventuellement s'annuler en quelques points isolés), alors l'application $t \rightarrow s(t)$ est dérivable et strictement croissante puisque

$$s'(t) = \|F'(k)\|.$$

On a donc démontré la proposition suivante.

Proposition Si F' ne s'annule pas sur un intervalle, l'abscisse curviligne définit un changement de paramétrage admissible strictement croissant.

Sous les hypothèses de la proposition, $t \rightarrow s(t)$ réalise donc une bijection et on peut donc considérer l'application φ telle que $\begin{cases} \varphi(u) = t \\ u = s(t) \end{cases}$.

L'application φ est dérivable sauf aux points où F' s'annule et

on a $1 = s'(t) \varphi'(u)$

ie $\varphi'(u) = \frac{1}{s'(t)}$ où encore

$$\boxed{(\varphi^{-1})'(u) = \frac{1}{\|F'(\varphi^{-1}(u))\|}}$$

Remarquons alors qu'en utilisant l'abscisse curviligne comme paramétrage, c'est en considérant $G(u) = F(\varphi(u))$ avec φ défini par $\begin{cases} \varphi(u) = t \\ u = s(t) \end{cases}$, alors $\|G'(u)\| = 1$

En effet, $G'(u) = \varphi'(u) F'(\varphi(u))$
 c'est-à-dire $G'(u) = \frac{F'(s^{-1}(u))}{\|F'(s^{-1}(u))\|}$

et donc $\|G'(u)\| = 1$.

(la vitesse scalaire vaut 1)

On parle de paramétrisation normale

Proposition Supposons que F n'admette pas de point stationnaire ($F'(t) \neq 0 \forall t$)
 Alors l'abscisse curviligne définit une paramétrisation normale.

Exemples

1) $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$

$s'(t) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 4t^2}$

$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{1 + 4a^2} da$

2) $\begin{cases} x(\theta) = r \cos \theta \\ y(\theta) = r \sin \theta \end{cases}$

$s'(\theta) = \left\| \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \right\| = r$

$\hookrightarrow s(\theta) = r(\theta - \theta_0) \quad r > 0$

Repère de Frenet et courbure des courbes planes

On suppose ici que $p=2$, que la courbe paramétrée est suffisamment régulière et qu'elle n'admet pas de point stationnaire. (de sorte à pouvoir paramétrer par l'abscisse curviligne)

Le vecteur tangent à l'arc au point $r(t)$ est par définition le vecteur $F'(t)$. Si on norme ce vecteur, on obtient le vecteur

\vec{T} défini par $\vec{T}(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|}$. C'est le vecteur tangent unitaire 6/

Proposition

$$\vec{T}(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|} = G'(s(t))$$

où $s(t)$ représente l'abscisse curviligne et $G(s(t)) = F(t)$.

Démonstration

Il suffit de dériver la relation $G(s(t)) = F(t)$ par rapport à t pour obtenir $F'(t) = s'(t) G'(s(t))$ et de se souvenir que par définition de l'abscisse curviligne, $s'(t) = \|F'(t)\|$.

Remarque

On écrit aussi souvent $\vec{T} = \frac{d\vec{O}n}{ds}$

Puisque $p=2$, le vecteur tangent est un vecteur de \mathbb{R}^2 de norme 1. Il existe donc un angle unique $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

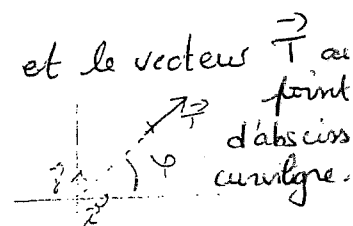
Plus généralement, $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) \end{pmatrix}$ puisque cette relation dépend du point considéré. φ représente l'angle entre le vecteur \vec{i} et le vecteur \vec{T} au point d'abscisse curviligne.

Dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , on a donc

$$\vec{T} = \cos \varphi(s) \vec{i} + \sin \varphi(s) \vec{j}$$

tandis que bien entendu, si on note $G(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$

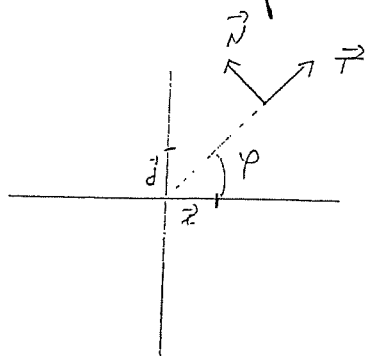
$$\begin{cases} x'(s) = \cos \varphi(s) \\ y'(s) = \sin \varphi(s) \end{cases}$$



On définit le vecteur directement normal à \vec{T} par la relation

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(s) \\ \cos \varphi(s) \end{pmatrix} = -\sin \varphi(s) \vec{i} + \cos \varphi(s) \vec{j}.$$

On obtient \vec{N} à partir de \vec{T} en faisant une rotation de $+90^\circ$.



Definition (repère de Frenet)

Le repère $(M(t), \vec{T}, \vec{N})$ est appelé repère de Frenet de l'arc au point $M(t)$.

Definition (courbure)

La quantité $\gamma = \varphi'(s)$ s'appelle la courbure de l'arc au point $M(t)$.

Definition (rayon de courbure)

La quantité $R = \frac{1}{\gamma}$ s'appelle le rayon de courbure de l'arc au point $M(t)$. (R est bien définie si $\gamma \neq 0$)

Definition (centre de courbure)

Le point $\Omega = M(t) + R\vec{N}$ s'appelle le centre de courbure de l'arc au point $M(t)$ (Ω est bien défini si $\gamma \neq 0$)

fais un schéma ici.

Definition (cercle osculateur)

Le cercle de centre Ω et de rayon $|R| = \left| \frac{1}{\gamma} \right|$ s'appelle le cercle osculateur au point $M(t)$. Ce cercle est bien défini si $\gamma \neq 0$.

Proposition

Puisque
$$\begin{cases} \vec{T} = \cos \varphi(s) \vec{x} + \sin \varphi(s) \vec{y} \\ \vec{N} = -\sin \varphi(s) \vec{x} + \cos \varphi(s) \vec{y} \end{cases} \quad (*)$$

on a les relations suivantes

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi}, \quad \frac{d\vec{N}}{d\varphi} = -\vec{T}$$

et

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \varphi'(s) \vec{N} = \gamma \vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\varphi'(s) \vec{T} = -\gamma \vec{T}$$

Les formules vont être utiles pour calculer la courbure.

Démonstration

Immédiate, il suffit de dériver.

Remarque: On voit que $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est orthogonal à \vec{T} . Ceci est attendu car $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$ donc en dérivant $2 \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0$ i.e. $\frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T}$.

Calcul pratique de la courbure

On se donne $F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sans point stationnaire. On va utiliser les relations

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{pmatrix}$$

→ On calcule $\vec{T} = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|}$

→ On calcule $\frac{ds}{dt} = \|F'(t)\|$

→ On calcule $\frac{d\vec{T}}{ds} (= \gamma \vec{N})$ par la relation

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{T}/dt}{s'(t)}$$

→ $|\gamma| = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|$ puisque $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$

→ Pour connaître le signe de γ on écrit que $\det(\vec{T}, \vec{N}) > 0$ d'après (*) car le repère est orthonormé direct et on calcule $\det\left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}\right) = \gamma \det(\vec{T}, \vec{N})$.

si $\det\left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}\right) > 0$ alors $\gamma = |\gamma|$

si $\det\left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}\right) < 0$ alors $\gamma = -|\gamma|$

(la courbure est nulle).

Exemple 1 (cercle) $t \in]0, 2\pi[$

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \end{cases} \quad F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad r > 0$$

$$F'(t) = r \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \|F'(t)\| = r = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{T}/dt}{r} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$|\gamma| = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{r}$$

$$\det\left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}\right) = \begin{vmatrix} -\sin t & -\frac{\cos t}{r} \\ \cos t & -\frac{\sin t}{r} \end{vmatrix} = +\frac{1}{r} \quad r > 0$$

donc $\gamma = 1/r$.

On retrouve que le rayon de courbure vaut bien r comme cela est attendu.

Exemple 2 (ellipse) $t \in]0, 2\pi[$ $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}$$

$$F'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} \quad \|F'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{T}/dt}{ds/dt} = \gamma \vec{N}$$

Après quelques calculs, on montre que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \times \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \begin{pmatrix} -b \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} \begin{pmatrix} -b \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix}$$

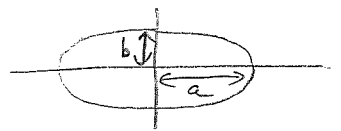
Ainsi $\det\left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}\right) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}} \begin{pmatrix} -a \sin t & -b \cos t \\ b \cos t & -a \sin t \end{pmatrix}$

$$= \frac{ab (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}} > 0$$

Ainsi $\gamma = |\gamma| = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{ab \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^2}$

i.e. $\gamma = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$

On voit que la courbure dépend du point contrairement au cercle.



Remarque

On a vu que la formule du rayon de courbure était

$$R = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\frac{d\gamma}{ds}} = \frac{ds}{d\gamma} = s'(\gamma)$$

Remarquons que pour une variation infinitésimale de l'angle γ , on a donc $R d\gamma = ds$. ds représente la longueur

parcourue. Elle est égale à $R \times d\gamma$ qui est la formule connue

$s = \int_{\gamma_0}^{\gamma} R(\gamma) d\gamma$
 pour un cercle. Cette formule reste donc valable pour une courbe quelconque
pour une infinitésimale

Remarque

On peut calculer plus directement la courbure et le rayon de courbure en utilisant la formule

$$\gamma = \frac{\det(F'(t), F''(t))}{(ds/dt)^3}$$

$$R = 1/\gamma$$

Montrons cette égalité en exprimant $F'(t)$ et $F''(t)$ dans la base (\vec{T}, \vec{N})

$$F'(t) = \|F'(t)\| \vec{T} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$$

$$F''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \gamma \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N}$$

$= \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = \gamma \frac{ds}{dt} \vec{N}$

Grâce à la linéarité du déterminant et du fait que pour une base orthonormée directe (\vec{T}, \vec{N}) on a $\det(\vec{T}, \vec{N}) = 1$, il vient

$$\det(F'(t), F''(t)) = \gamma \left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

$$\text{et donc } \gamma = \frac{\det(F'(t), F''(t))}{(ds/dt)^3}$$

Remarque

→ $F'(t)$ est la vitesse vectorielle et $\|F'(t)\|$ est la vitesse scalaire. La vitesse vectorielle est dirigée dans le sens de la tangente.

→ $F''(t)$ est l'accélération vectorielle. Elle est la somme d'une accélération tangentielle $\frac{d^2s}{dt^2} \vec{T}$ et d'une accélération normale ou centripète $\gamma \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N} = \gamma \|F'(t)\|^2 \vec{N} = \frac{\|F'(t)\|^2}{R} \vec{N}$

→ La formule de la remarque précédente s'écrit aussi où V est la vitesse scalaire

$$\det(F'(t), F''(t)) = \gamma V^3 = \frac{V^3}{R}$$

$$V = \|F'(t)\|$$

Exemples d'application

1) Rayon de courbure en coordonnées cartésiennes : $F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$$R = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$

2) Rayon de courbure en coordonnées polaires : $F(\theta) = r(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

$$F'(\theta) = r'(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r(\theta) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = r'(\theta) \vec{e}_r + r(\theta) \vec{e}_\theta$$

$$F''(\theta) = (r''(\theta) - r) \vec{e}_r + 2r'(\theta) \vec{e}_\theta$$

$$V = \sqrt{r^2(\theta) + r'(\theta)^2}$$

$$\det(F'(\theta), F''(\theta)) = \begin{vmatrix} r'(\theta) & r''(\theta) - r(\theta) \\ r(\theta) & 2r'(\theta) \end{vmatrix} = 2r'(\theta)^2 + r^2(\theta) - r''(\theta)r(\theta)$$

Ainsi

$$R = \frac{(r^2(\theta) + r'(\theta)^2)^{3/2}}{2r'(\theta)^2 + r^2(\theta) - r(\theta)r''(\theta)}$$

Cas des courbes gauches

On se place maintenant dans l'espace, c'est-à-dire dans le cas $p=3$.
On suppose ici encore que la courbe paramétrée est suffisamment régulière et qu'elle n'admet pas de point stationnaire.

On peut donc considérer le vecteur tangent unitaire

$$\vec{T}(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|} = G'(s(t))$$

où $s(t)$ représente l'abscisse curviligne et $G(s(t)) = F(t)$.

On écrit aussi

$$\vec{T} = \frac{d\vec{O}\vec{h}}{ds}$$

De même que précédemment le vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est
à \vec{T} . En effet, d'après la relation

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$$

on en déduit en dérivant par rapport à s que

$$2 \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0$$

Définition

On appelle courbure la quantité

$$\gamma = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| \geq 0$$

En supposant que $\gamma = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| > 0$, on définit alors le vecteur \vec{N} de
norme 1 par la relation

$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/ds}{\ d\vec{T}/ds\ }$
$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$

ou encore

Remarque

Ici la courbure est définie comme une quantité positive. Dans le cas
plan ($p=2$), la définition de la courbure conduit à une quantité
pouvant être positive ou négative. Cela provient du fait que dans
le cas plan le sens du vecteur \vec{N} est imposé de sorte à
ce que le repère (\vec{T}, \vec{N}) soit direct. Ici le sens du vecteur \vec{N}
est celui du vecteur $\frac{d\vec{T}}{ds}$. La courbure est dans les deux cas
la coordonnée de $\frac{d\vec{T}}{ds}$ dans la direction \vec{N} : $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$.

Définition (trièdre de Frenet)

Le repère $(\Omega(A), \vec{T}, \vec{N}, \vec{T} \wedge \vec{N})$ est appelé trièdre de Frenet de l'arc
au point $\Omega(A)$. C'est un repère orthonormé direct.

Remarque

Cette définition impose en particulier le sens du vecteur $\vec{T} \wedge \vec{N}$ qui
est tel que le trièdre de Frenet soit direct.

Rapports sur le produit vectoriel de vecteurs de \mathbb{R}^3

141

$$\text{Soit } \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel est défini par la relation

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

On vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$
- (ii) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ et donc $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
- (iii) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$
- (iv) le produit vectoriel est linéaire par rapport à chacune de ses variables ($(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v}$ est bi-linéaire)
- (v) soit un parallélogramme ABCD ($\vec{AB} = \vec{DC}$). Alors $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| = \mathcal{A}(\text{ABCD})$
- (vi) si θ est l'angle entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , alors $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$.

(vii) Enfin, le produit vectoriel de deux vecteurs unitaires orthogonaux permet de définir un repère orthonormé direct $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$.

A ce stade, \vec{T} a été défini, et la courbure est liée à \vec{N} (lorsque \vec{N} est bien défini, i.e. lorsque $\gamma > 0$) par la relation $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$. Interrogeons nous à $\frac{d\vec{N}}{ds}$.

Par la relation $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$, il est clair que $\frac{d\vec{N}}{ds}$ est orthogonal à \vec{N} , et donc qu'il existe a et b telle que

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = a \vec{T} + b (\vec{T} \wedge \vec{N})$$

Calculons $a = \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T}$ et $b = \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot (\vec{T} \wedge \vec{N})$

D'après les relations $\vec{N} \cdot \vec{T} = 0$ et $\vec{N} \cdot (\vec{T} \wedge \vec{N}) = 0$, en dérivant par rapport à s on a

$$\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} = - \vec{N} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = -\gamma$$

et $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot (\vec{T} \wedge \vec{N}) = - \frac{d(\vec{T} \wedge \vec{N})}{ds} \cdot \vec{N} =: -\theta$

On a donc
$$\boxed{\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T} - \theta (\vec{T} \wedge \vec{N})}$$

Définition (torsion)

θ s'appelle la torsion de la courbe gauche

On a
$$\theta = - \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot (\vec{T} \wedge \vec{N}) = \frac{d(\vec{T} \wedge \vec{N})}{ds} \cdot \vec{N}$$

Remarque

La torsion n'a pas de signe prédéfini. Cela vient du fait que le sens de $\vec{T} \wedge \vec{N}$ a été imposé de sorte que le repère $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{T} \wedge \vec{N})$ soit direct.

Définition (rayons de courbure et de torsion)

Les quantités $\frac{1}{\gamma}$ et $\frac{1}{\theta}$ s'appellent respectivement rayon de courbure et rayon de torsion de la courbe.

Remarque

Dans le cas $p=2$ on a

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{pmatrix}$$

Dans le cas $p=3$ on a

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \\ \frac{d(\vec{T} \wedge \vec{N})}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & -\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{T} \wedge \vec{N} \end{pmatrix}$$

En effet, puisque $(\vec{T} \wedge \vec{N}) \cdot (\vec{T} \cdot \vec{N}) = 1$ on a en dérivant

$$\frac{d(\vec{T} \wedge \vec{N})}{ds} \cdot (\vec{T} \wedge \vec{N}) = 0$$

et donc $\frac{d(\vec{T} \wedge \vec{N})}{ds} = a\vec{T} + b\vec{N}$

mais $a = \frac{d(\vec{T} \wedge \vec{N})}{ds} \cdot \vec{T} = -\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot (\vec{T} \wedge \vec{N}) = 0$ car $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}$
↳ en dérivant la relation $(\vec{T} \wedge \vec{N}) \cdot \vec{T} = 0$.

et $b = \frac{d(\vec{T} \wedge \vec{N})}{ds} \cdot \vec{N} = -\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot (\vec{T} \wedge \vec{N}) = \theta$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\frac{d(\vec{T} \wedge \vec{N})}{ds} = \theta \vec{N}}$$

Calcul de la torsion et de la courbure

17/

On a la proposition suivante.

Proposition

On a les formules suivantes

$$\gamma = \frac{\|F'(H) \wedge F''(H)\|}{(ds/dt)^3}$$

$$\theta = - \frac{dt(F'(H), F''(H), F'''(H))}{\|F'(H) \wedge F''(H)\|^2}$$

Notion de sphère osculatrice.



On envisage une sphère qui est tangente à la courbe au point $\Gamma(t_0)$.
Le centre de cette sphère est donc situé ds le plan passant par

$\Gamma(t_0)$ et orthogonal au vecteur $\vec{T}(t_0)$. Notons a et b les
coordonnées de ce centre ds le repère $\vec{N}(t_0), \vec{T} \wedge \vec{N}(t_0)$

$r = a\vec{T} + b\vec{N}$

L'équation de la sphère dans le repère

$x^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = a^2 + b^2$ ($\Gamma(t_0)$ appartient à cette sphère)

On utilise l'abscisse curviligne comme paramétrage, de sorte que
 $\Gamma(t=t_0) = \Gamma(s=0)$ et on suppose les coordonnées x, y et z d'un
point de la courbe paramétrée sont exprimées en fonction de s.

Évaluons la quantité

$s \mapsto x(s)^2 + (y(s)-a)^2 + (z(s)-b)^2$

au voisinage de $s=0$.

En faisant un développement limité de $s \rightarrow 0 \Gamma(s)$ au voisinage de
 $s=0$,

$\vec{O}\vec{n}(s) = \vec{O}\vec{n}(0) + s \frac{d\vec{O}\vec{n}}{ds}(0) + \frac{s^2}{2} \frac{d^2\vec{O}\vec{n}}{ds^2} + \frac{s^3}{6} \frac{d^3\vec{O}\vec{n}}{ds^3}(0) + \dots o(s^3)$

et en utilisant le fait que

$\frac{d\vec{O}\vec{n}}{ds} = \vec{T}$, $\frac{d^2\vec{O}\vec{n}}{ds^2} = \gamma \vec{N} = \frac{1}{R} \vec{N}$,

$\frac{d^3\vec{O}\vec{n}}{ds^3} = -\frac{dR/ds}{R^2} \vec{N} + \frac{1}{R} \frac{d\vec{N}}{ds}$
 $= -\frac{dR}{ds} \times \frac{1}{R^2} \vec{N} + \frac{1}{R} (-\gamma \vec{T} - \theta \vec{N})$

on obtient que

19/

$$\vec{M}_O(\Delta) = \left(\Delta - \frac{\Delta^3}{R^2} \frac{\Delta^3}{6} \right) \vec{T} + \left(\frac{\Delta^2}{2R} - \frac{\Delta^3}{6R^2} \frac{dR}{ds} \right) \vec{N} - \frac{\Delta^3 \theta}{6R} (\vec{T} \wedge \vec{N}) + o(\Delta^3)$$

Dans le repère $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{T} \wedge \vec{N})$, on a donc

$$\begin{cases} x(\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^3}{R^2} \frac{\Delta^3}{6} + o(\Delta^3) \\ y(\Delta) = \frac{\Delta^2}{2R} - \frac{\Delta^3}{6R^2} \frac{dR}{ds} + o(\Delta^3) \\ z(\Delta) = -\frac{\Delta^3 \theta}{6R} + o(\Delta^3) \end{cases}$$

On a alors

$$F(\Delta) - (a^2 + b^2) = x^2(\Delta) + y^2(\Delta) + z^2(\Delta) - 2ay(\Delta) - 2bz(\Delta)$$

$$= \dots$$

$$= \Delta^2 \left(1 - \frac{a}{R} \right) + \frac{\Delta^3 a}{3R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{b\Delta^3}{3RT} + o(\Delta^3)$$

$$T := \frac{1}{\theta}$$

On veut que cette quantité soit la plus petite possible.

On remarque que si $\frac{a}{R} = 1$ (choix), alors cette quantité est d'ordre 3

au moins en Δ au voisinage de $\Delta = 0$. On parlera de

sphère osculatrice. b n'étant pas fixé, il y a donc plusieurs

sphères osculatrices. Soit b est tel que

$$0 = \frac{a}{3R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{b}{3RT}$$

$$\Leftrightarrow \underset{=R}{b} = -T \frac{dR}{ds}$$

alors la quantité est d'ordre > 3 .

La sphère obtenue s'appelle la sphère osculatrice.

Quelques notions sur les intégrales doubles et triples

1/

Intégrales doubles

On se donne un sous-ensemble borné $K \subset \mathbb{R}^2$ tel que l'on puisse définir sa frontière.

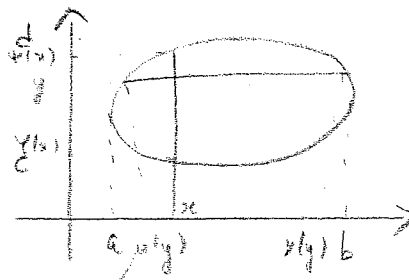
Soit f une fonction continue sur \bar{K} et à valeurs réelles.

Définition 1

On suppose dans un premier temps que K est tel que toute droite parallèle aux axes et qui rencontre K le rencontre selon un segment (éventuellement un point). L'intégrale de f sur K ,

notée $\iint_K f(x,y) dx dy$ est définie par

$$\iint_K f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right] dx$$



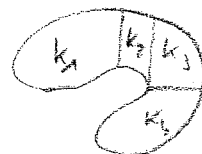
ou, de manière équivalente par ce que l'on appelle le théorème de Fubini,

$$\iint_K f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\mu(y)}^{\nu(y)} f(x,y) dx \right] dy$$

Définition 2

Si K ne vérifie pas la propriété demandée, on impose à K de se découper en une réunion finie d'ensembles disjoints qui vérifient la propriété demandée et on pose

$$\iint_K f(x,y) dx dy = \iint_{K_1} f(x,y) dx dy + \dots + \iint_{K_n} f(x,y) dx dy$$



Cette définition ne dépend pas du choix du découpage.

Définition (partie quarrable)

2/

Si k vérifie la propriété de la définition 2, on dira que k est une partie quarrable de \mathbb{R}^2 .

Définition (aire)

Si k est quarrable, on appellera aire de k et on notera $A(k)$ la quantité

$$A(k) = \iint_k 1 \, dx \, dy \quad (f(x,y) = 1).$$

Proposition (propriétés)

1) Si $k = k_1 \cup k_2$, k_1 et k_2 disjoints, et si f est continue sur \bar{k} alors

$$\iint_k f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{k_1} f(x,y) \, dx \, dy + \iint_{k_2} f(x,y) \, dx \, dy$$

2) On suppose que $f \geq 0$ sur k et que f est non identiquement nulle sur k , ie $\exists z_0 \in k, f(z_0) > 0$. Alors

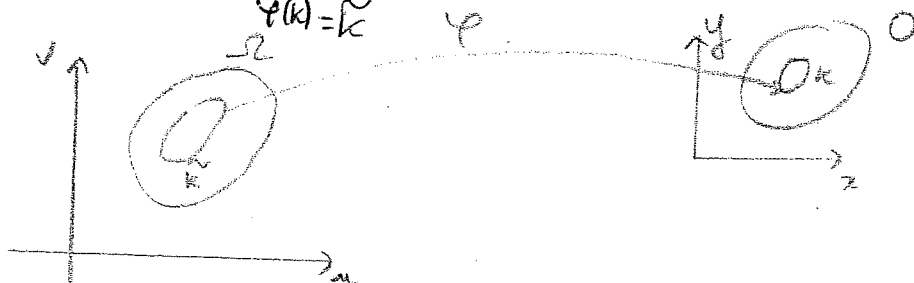
$$\iint_k f(x,y) \, dx \, dy > 0.$$

Ainsi, si f est de signe constant sur k et que $\iint_k f(x,y) \, dx \, dy = 0$ alors $f(x,y) = 0 \, \forall (x,y) \in k$.

3) On se donne $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un \mathcal{C}^1 difféomorphisme d'un ouvert Ω sur un ouvert O . Soit $k \subset O$ et $\tilde{k} = \varphi^{-1}(k)$ ie $\varphi(\tilde{k}) = k$.

On sq f est bien définie et continue sur k . Alors

$$\iint_k f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{\tilde{k}} f(\varphi(u,v)) |\det(J_\varphi(u,v))| \, du \, dv$$



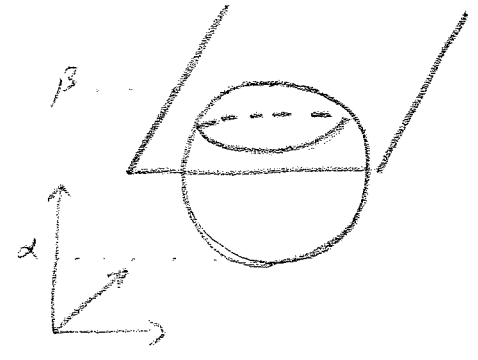
Intégrales triples

On se donne un sous-ensemble borné $K \subset \mathbb{R}^3$ tel que l'on puisse définir sa frontière. Soit f une fonction continue sur K à valeurs réelles

Définition 1

On suppose dans un premier temps que K est tel que l'intersection de K avec tout plan parallèle aux plans contenant les axes vérifie les conditions requises dans le cas des ensembles plans.

Ainsi, $\forall z \in [\alpha, \beta]$, l'intersection du plan parallèle à (x, y) et passant par la cote z avec K est un ensemble $K(z)$ pour lequel



on peut envisager $\iint_{K(z)} f(x, y, z) dx dy$

On pose alors

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\iint_{K(z)} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

Définition 2

Dans le cas où K peut se décomposer en sous-ensembles disjoints K_1, \dots, K_n qui vérifient la propriété demandée, on pose

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^n \iiint_{K_i} f(x, y, z) dx dy dz$$

Cette définition ne dépend pas de la décomposition choisie.

Définition (partie quarrable de \mathbb{R}^3)

Si K vérifie la propriété de la définition 2, on dira que K est une partie quarrable de \mathbb{R}^3 .

Définition (volume)

4/

Si k est quarrable, on appellera volume de k et on notera $V(k)$ la quantité

$$V(k) = \iiint_k 1 \, dx \, dy \, dz \quad (f(x,y,z) = 1)$$

Proposition (propriétés)

1) Les propriétés 1) et 2) de la précédente proposition restent vraies de \mathbb{R}^3 .

2) La propriété 3) de la précédente proposition reste vraie de \mathbb{R}^3 et s'écrit

$$\iiint_k f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\tilde{k}} f(\varphi(u,v,w)) |\det(J_\varphi(u,v,w))| \, du \, dv \, dw.$$

→

Intégrales multiples généralisées

On se donne $D \subset \mathbb{R}^p$, $p=2,3$, f définie sur D .

On suppose que

$\exists (k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante, i.e. $k_n \subset k_{n+1} \subset \mathbb{R}^p$ telle que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} k_n$

On suppose que k_n est borné et que $\iint_{k_n} f$ peut être définie au sens de l'une des définitions précédentes $\forall n$.

On admet aussi que $\forall k$ fermé borné (compact) de \mathbb{R}^p inclus de D , $\exists m \in \mathbb{N}$ t.g. $k \subset k_m$. On dit que (k_n) est une suite exhaustive de compact.

Définition 1. ($f \geq 0$)

On suppose que $f \geq 0$ sur D et on considère la suite $d_n = \int_{k_n} f$

Cette suite est croissante puisqu'elle vérifie $d_{n+1} = d_n + \int_{\underbrace{k_{n+1} - k_n}_{\geq 0}} f \geq d_n$.

Cette suite, si elle est majorée, admet donc une

limite. On la notera $\int_D f$. Cette limite ne dépend pas de la suite

k_n choisie. Si elle est finie on dit que $\int_D f$ est convergente et que f admet une intégrale généralisée sur D .

Définition 2

5/

Si f n'a pas un signe constant sur D , on suppose que $\iint_D |f| < \infty$, ie que $|f|$ admet une intégrale généralisée sur D .

$$\text{On pose } \begin{cases} f^+ = \max(f, 0) \\ f^- = \max(-f, 0) \end{cases}$$

Comme $\begin{cases} 0 \leq f^+ \leq |f| \\ 0 \leq f^- \leq |f| \\ \iint_D |f| < \infty \end{cases}$, les suites $\iint_{K_n} f^+$ et $\iint_{K_n} f^-$ sont croissantes et majorées par $\iint_D |f| < \infty$.

En particulier, $\iint_D f^+ < \infty$ et $\iint_D f^- < \infty$.

$$\text{On pose alors } \iint_D f = \iint_D f^+ - \iint_D f^-$$



Définition

On appelle $\left\{ \begin{array}{l} \text{nappe paramétrée} \\ \text{surface de } \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$ une application $S : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(u, v) \mapsto (x, y, z)(u, v)$

où D est un ouvert de \mathbb{R}^2 et où les fonctions $D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(u, v) \mapsto x(u, v)$

$D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions définies sur D
 $(u, v) \mapsto y(u, v)$ et $(u, v) \mapsto z(u, v)$ et à valeurs réelles \mathcal{C}^1 .

Définition

On appelle arc tracé sur la surface S la courbe paramétrée

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (x, y, z)(u(t), v(t))$$

où u et v sont deux fonctions $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telles que le couple $(u(t), v(t))$ appartienne à D .

Remarque

Les surfaces d'équation $z = f(x, y)$ où f désigne une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} sont bien entendu des cas particuliers de surfaces de \mathbb{R}^3 puisqu'elles peuvent être décrites par le paramétrage suivant

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = f(u, v) \end{cases}$$

Les deux premières coordonnées jouent le rôle de paramètres.

Remarque

Les surfaces d'équation $f(x, y, z) = 0$ sont localement des cas particuliers de surfaces de \mathbb{R}^3 . En effet, si on suppose qu'en un point $\forall_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la surface (i.e. $f(x_0, y_0, z_0) = 0$) on a par exemple $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors le théorème des fonctions implicites nous dit que localement autour de \forall_0 la surface va admettre une représentation de la forme $z = \phi(x, y)$. On est donc ramené à la remarque précédente.

Point régulier, plan tangent et normale à une surface

21

Définition (point régulier)

On dit que le point $\Pi(u,v)$ de la surface S est un point régulier si en ce point le vecteur $\frac{\partial \Pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial v} \neq 0$, ou de manière équivalente si la jacobienne de S en ce point est de rang 2

Rappel
$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\text{Jacobienne de } S = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial u}} & \boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial v}} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \Pi}{\partial v}$ sont donc linéairement indépendants.

Définition (plan tangent en un point régulier)

En un point régulier $\Pi(u,v)$ de la surface S , on appelle plan tangent Π le plan passant par ce point et de vecteurs directeurs $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \Pi}{\partial v}$:

$$\Pi = \Pi(u,v) + \text{Vect} \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \Pi}{\partial v}(u,v) \right\}$$

Exemple

Pour une surface d'équation $z = f(x,y)$ paramétrée par $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = f(u,v) \end{cases}$

on a
$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$
 Les vecteurs sont clairement

linéairement indépendants. Tous les points sont donc réguliers.

Remarques

1) La définition d'un point régulier ne dépend pas du paramétrage considéré. Choisissons en effet une autre paramétrisation de S , ie considérons un difféomorphisme $\phi: \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$
 $(\tilde{u}, \tilde{v}) \rightarrow \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$

et l'application \tilde{S} définie par

$$\tilde{S}: \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})(\tilde{u}, \tilde{v}) = S(\phi(\tilde{u}, \tilde{v})) = S(x, y, z)(\tilde{u}, \tilde{v})$$

ce qui signifie que

$$\begin{cases} \tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = x \circ \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \tilde{y}(\tilde{u}, \tilde{v}) = y \circ \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \tilde{z}(\tilde{u}, \tilde{v}) = z \circ \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{cases}$$

$$\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$$

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial \phi_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{u}}$$

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial \phi_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial y}{\partial \tilde{u}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \tilde{u}} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \tilde{u}} \end{pmatrix}$$

$$J_{\tilde{S}}(\phi(\tilde{u}, \tilde{v}))$$

La dérivation donne alors

$$J_{\tilde{S}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = J_S(\phi(\tilde{u}, \tilde{v})) J_{\phi}(\tilde{u}, \tilde{v})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}_A$$

$$\text{ie } \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}} = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{v}} = c \frac{\partial x}{\partial u} + d \frac{\partial x}{\partial v}$$

Dire que les vecteurs $\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{u}}$ et $\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{v}}$ sont libres est équivalent à dire que les vecteurs $\frac{\partial \eta}{\partial u}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial v}$ sont libres sous l'hypothèse $ad - bc \neq 0$ (ϕ difféomorphisme).

En effet, supposons par exemple que $\frac{\partial \eta}{\partial u}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial v}$ sont libres. Alors

$$\alpha \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{u}} + \beta \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{v}} = 0 \Leftrightarrow (\alpha a + \beta c) \frac{\partial \eta}{\partial u} + (\alpha b + \beta d) \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a + \beta c = 0 \\ \alpha b + \beta d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Pour l'autre sens, on procède de la même manière en écrivant que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} A^{-1}$$

2) Le plan tangent d'un point régulier ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Cela est clair d'après les relations

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial n}{\partial u} & \frac{\partial n}{\partial v} \end{pmatrix} J_{\phi}(u,v)$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} \frac{\partial n}{\partial u} & \frac{\partial n}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} J_{\phi}^{-1}(u,v)$$

qui disent bien que

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{u}} \in \text{Vect} \left(\frac{\partial n}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{v}} \in \text{Vect} \left(\frac{\partial n}{\partial u}, \frac{\partial n}{\partial v} \right) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial u} \in \text{Vect} \left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{u}}, \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{v}} \right) \\ \frac{\partial n}{\partial v} \in \text{Vect} \left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{u}}, \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{v}} \right) \end{cases}$$

Les plans tangents sont donc inclus l'un dans l'autre. Ils sont donc égaux.

3) La tangente à tout arc tracé sur S est contenue dans le plan tangent V

Soit $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

un arc tracé sur S .

$$t \rightarrow (x, y, z) / (u(t), v(t))$$

La tangente en $M(t)$ à l'arc γ a pour vecteur directeur

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } u'(t) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} + v'(t) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$= u'(t) \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u(t), v(t))$$

Elle est donc contenue dans le plan tangent à S en $M(u(t), v(t))$.

Définition (normale à une surface en un point régulier) 5/

En un point régulier $\pi(u,v)$ de la surface S , on appelle normale à la surface S le vecteur perpendiculaire au plan tangent

défini par $\vec{N} = \frac{\partial \pi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v}(u,v)$

Le vecteur $\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ est le vecteur unitaire normal à la surface S .

Aire d'une surface

Définition

L'aire du morceau de surface Σ_k défini par

$$\Sigma_k = \left\{ S(u,v) \in \mathbb{R}^3, (u,v) \in k \subset D \right\}$$

est donnée par la quantité

$$\begin{aligned} A(\Sigma_k) &= \iint_{(u,v) \in k} \|\vec{N}(u,v)\| \, du \, dv \\ &= \iint_{(u,v) \in k} \left\| \frac{\partial \pi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v}(u,v) \right\| \, du \, dv. \end{aligned}$$

Cette quantité est indépendante de la paramétrisation choisie.

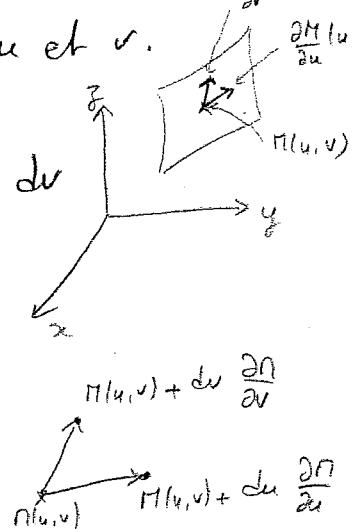
Remarque Il est possible de justifier cette formule en raisonnant sur des variations infinitésimales du et dv des paramètres u et v .

En effet, au premier ordre on a

$$\pi(u+du, v+dv) = \pi(u,v) + \frac{\partial \pi}{\partial u}(u,v) du + \frac{\partial \pi}{\partial v}(u,v) dv$$

Les points $\pi(u,v)$ et $\pi(u+du, v+dv)$ définissent donc un parallélogramme $ABCD$ avec $A = \pi(u,v)$ et B, C, D

défini par les relations $\vec{AB} = du \frac{\partial \pi}{\partial u}(u,v)$
 $\vec{AD} = dv \frac{\partial \pi}{\partial v}(u,v)$



On rappelle que l'aire de ce parallélogramme est donnée par 6/

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| = \left\| \frac{\partial \eta}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v}(u,v) \right\| du dv.$$

On obtient l'aire totale du morceau de surface en intégrant (ie en sommant) cette quantité pour tous les points (u,v) de K .

Vérifions que $A(\Sigma_K)$ est indépendante du paramétrage choisi. On reprend les mêmes notations que dans les pages 3 et 4.

$$\text{En } (u,v), \quad A(\Sigma_K) = \iint_{(u,v) \in K} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v}(u,v) \right\| du dv$$

$$\text{En } (\tilde{u}, \tilde{v}), \quad A(\Sigma_K) = \iint_{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{K}} \left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \wedge \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right\| d\tilde{u} d\tilde{v}$$

Par linéarité du produit vectoriel, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{u}} \wedge \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{v}} &= \left(a \frac{\partial \eta}{\partial u} + b \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) \wedge \left(c \frac{\partial \eta}{\partial u} + d \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) \\ &= ac \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial u} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial u}}_{=0} + bc \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial v} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial u}}_{= - \frac{\partial \eta}{\partial u} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v}} + ad \frac{\partial \eta}{\partial u} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v} + bd \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial v} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v}}_{=0} \\ &= (ad - bc) \frac{\partial \eta}{\partial u} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{aligned}$$

de sorte que

$$A(\Sigma_K) = \iint_{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{K}} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial u}(\phi(\tilde{u}, \tilde{v})) \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v}(\phi(\tilde{u}, \tilde{v})) \right\| \det J_{\phi}(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v}$$

ce qui d'après le théorème de Fubini coïncide exactement avec

$$A(\Sigma_K) = \iint_{(u,v) \in K} \left\| \frac{\partial \eta}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v}(u,v) \right\| du dv.$$

puisque $K = \phi(\tilde{K})$.

Exemples

7/

1) Soit une surface déterminée par une équation de la forme

$$z = f(x, y). \quad \text{Alors} \quad \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = f(u, v) \end{cases}$$

$$\text{On a donc} \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v} = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ 1 \end{pmatrix},$$

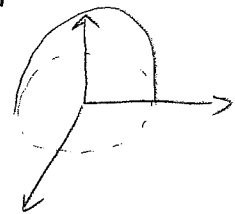
$$\text{ce qui donne} \quad \left\| \frac{\partial \eta}{\partial u} \wedge \frac{\partial \eta}{\partial v} \right\| = \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}$$

$$\text{Ainsi, en posant} \quad \Sigma = \left\{ (x, y, z), z = f(x, y), (x, y) \in D \right\}$$

$$\text{on a} \quad \mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2} \, dx \, dy.$$

2) Considérons la demi-sphère $S = \left\{ (x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0 \right\}$

$$\text{On a} \quad \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{cases}$$

 $R > 0$

On se retrouve donc dans le cas précédent avec

$$f(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

$$\partial_u f = \frac{-u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \quad \partial_v f = \frac{-v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$$

$$\sqrt{1 + (\partial_u f)^2 + (\partial_v f)^2} = \sqrt{\frac{R^2 - u^2 - v^2 + u^2 + v^2}{R^2 - u^2 - v^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$$

$$\text{On a donc} \quad \mathcal{A}(S) = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \, du \, dv$$

$$\text{avec} \quad D = \left\{ (u, v), u^2 + v^2 \leq R^2 \right\} = D(0, R).$$

On se place en coordonnées polaires pour calculer cette intégrale

8/

$$u(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$v(r, \theta) = r \sin \theta$$

$$\phi(r, \theta) = (u, v)$$

$$J_{\phi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\det J_{\phi}(r, \theta) = r.$$

On obtient donc

$$A(S) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr d\theta$$

$$= 2\pi R \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr$$

$$= 2\pi R \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R$$

$$= 2\pi R^2$$

La surface de la demi-sphère est donc $2\pi R^2$
La surface de la sphère est donc $4\pi R^2$.

Champs de vecteurs

1/

Définition (champ de vecteurs)

On appelle champ de vecteurs est une application $V: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $(x,y) \mapsto V(x,y)$
avec $p=2$ ou 3 . On notera $V(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ si $p=2$ et

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} \text{ si } p=3.$$

Définition (potentiel scalaire)

On dit qu'un champ de vecteurs dérive d'un potentiel $f: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$
et note $V = \text{Grad } f$ ou encore $V = \nabla f$ si

$$\begin{cases} P(x,y) = \partial_x f(x,y) \\ Q(x,y) = \partial_y f(x,y) \end{cases} \text{ si } p=2$$

$$\text{et } \begin{cases} P(x,y,z) = \partial_x f(x,y,z) \\ Q(x,y,z) = \partial_y f(x,y,z) \\ R(x,y,z) = \partial_z f(x,y,z) \end{cases} \text{ si } p=3.$$

Remarque (importante)

(ce P, Q, R de classe \mathcal{C}^1)

si f est de classe \mathcal{C}^2 , il est nécessaire d'après le théorème de Schwarz
d'avoir les relations $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

avec x_i et x_j représentant x ou y si $p=2$ et x ou y ou z si $p=3$.

Cela s'exprime de manière équivalente sous la forme

$$\begin{cases} \partial_x Q - \partial_y P = 0 \end{cases} \text{ si } p=2$$

et

$$\begin{cases} \partial_x Q - \partial_y P = 0 \\ \partial_x R - \partial_z P = 0 \\ \partial_y R - \partial_z Q = 0 \end{cases} \text{ si } p=3.$$

Ainsi, pour qu'un champ de vecteurs de classe C^1 dérive d'un potentiel V , il est nécessaire que son rotationnel soit nul, c'est-à-dire le vecteur rot défini par

(on dit que le champ est irrotationnel)

$$\text{rot } V = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = (\partial_x Q - \partial_y P) \quad \text{si } p=2$$

et

$$\text{rot } V = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y R - \partial_z Q \\ \partial_z P - \partial_x R \\ \partial_x Q - \partial_y P \end{pmatrix} \quad \text{si } p=3.$$

On admettra que la réciproque est vraie : $\text{rot } V = 0 \Rightarrow \exists f \text{ t. q. } V = \nabla f$. localement

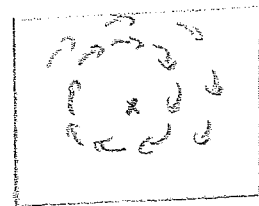
Remarque Dans le cas $p=3$, on dira que V dérive d'un potentiel f si $V = \text{rot } \vec{W} := \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}}_{\vec{W}} = \begin{pmatrix} \partial_y W_3 - \partial_z W_2 \\ \partial_z W_1 - \partial_x W_3 \\ \partial_x W_2 - \partial_y W_1 \end{pmatrix}$

Une CNS est $\text{div } V = 0$.

Exemple Soit le champ de vecteur $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$

on a alors $\text{rot } V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le vecteur verticale $\vec{w} := \frac{1}{2} \text{rot } V$

vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout point (x,y,z) va "tourner" autour de l'axe (Oz) (dans le sens anti-trigonométrique, ie dans le sens horaire)



Dans ce dernier chapitre on va utiliser ensemble les courbes paramétrées, les surfaces paramétrées et les champs de vecteurs pour introduire de nouvelles notions et énoncer des résultats importants intervenant de manière récurrente dans de nombreuses applications (électromagnétisme, mécanique des fluides, astrophysique...)

On se donne une courbe paramétrée $\Gamma = \{ (x(t), y(t), z(t)), t_0 \leq t \leq t_1 \}$ correspondant au déplacement d'un objet entre les instants t_0 ($\Gamma_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$) et t_1 ($\Gamma_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$).

On suppose qu'en chaque point (x, y, z) de l'espace s'applique une force de composantes $\begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} =: V(x, y, z)$

Définition (circulation, travail)

La circulation du champ V le long de Γ , ou encore le travail effectué par cette force V le long de Γ est la quantité W définie

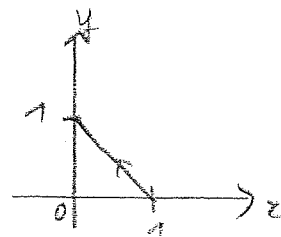
par

$$W := \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{t_0}^{t_1} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt.$$

Cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi.

Exemple 1

$$\begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$



2/

$$V: \begin{cases} P(x, y, z) = y \\ Q(x, y, z) = -x \\ R(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{rot } V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{div } V = \partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R = 0$$

Le champ dérive d'un potentiel vecteur (et non scalaire car $\text{rot} V \neq 0$)

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y = \partial_y W_3 - \partial_z W_2 \\ -x = \partial_z W_1 - \partial_x W_3 \\ 0 = \partial_x W_2 - \partial_y W_1 \end{cases}$$

$$W_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

$$W_2 = x$$

$$W_1 = y$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} y \\ x \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$$

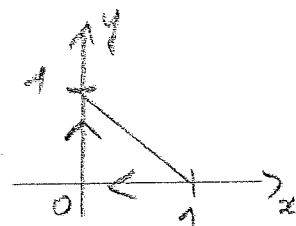
Il n'y a pas unicité, on peut ajouter n'importe quel gradient de fonction puisque $\text{rot } \nabla = 0$

$$W = \int_0^1 (1-t) dt + \int_0^1 t dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Remarque (importante)

Si on joint les 2 mêmes points mais en passant par l'origine :

$$\begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, 1]$$



On trouvera $W=0$.

puis $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t-1 \\ z(t) = 0 \end{cases}$ pour $t \in [1, 2]$

de travail dépend du chemin suivi

Exemple 2

$$\begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

3/

$$V: \begin{cases} P(x, y, z) = y \\ Q(x, y, z) = x \\ R(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{rot } V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(div $V = 0$ également)

Le champ de vecteur dérive d'un potentiel scalaire.

$$\begin{cases} y = \partial_x f \\ x = \partial_y f \\ 0 = \partial_z f \end{cases} \Rightarrow f(x, y, z) = xy$$

On vérifie que $W=0$ quelque soit le chemin suivi pour relier le point $(1, 0)$ au point $(0, 1)$. Cela vient du fait que le champ dérive d'un potentiel scalaire.

Definition (énergie potentielle)

On appelle Energie Potentielle et on note E_p l'opposé du potentiel dont dérive un champ de force $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ irrotationnel :

$$V = \nabla f = \text{grad } f \Leftrightarrow V = -\nabla E_p = -\text{grad } E_p.$$

Remarque

Le signe \ominus indique que le vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ donne la direction dans laquelle l'énergie potentielle diminue. En effet, au premier ordre d'approximation autour d'un point $\Gamma_0 = (x_0, y_0, z_0)$, on a

$$E_p(\Gamma_0 + \alpha \vec{V}_0) = E_p(\Gamma_0) + \alpha \nabla E_p^0 \cdot \vec{V}_0 \quad \text{avec} \quad \vec{V}_0 = \vec{V}(x_0, y_0, z_0) \\ \nabla E_p^0 = \nabla E_p(x_0, y_0, z_0)$$

$$\text{ie } E_p(\Gamma_0 + \alpha \vec{V}_0) - E_p(\Gamma_0) = -\alpha \|\vec{V}_0\|^2$$

ainsi, si $\alpha > 0$ (on se déplace dans la direction de \vec{V}), l'énergie potentielle diminue

Proposition

Le travail d'une force derivant d'un potentiel scalaire ne depend que des valeurs de ce potentiel aux points initial et final de la courbe Γ . Plus precisement, si $V = -\nabla E_p$, alors

$$W = E_p(\Omega_b) - E_p(\Omega_a)$$

En particulier, ce travail est nul si la courbe est fermee.

Demonstration

En reprenant les memes notations que precedemment, $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x E_p \\ -\partial_y E_p \\ -\partial_z E_p \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} W &= - \int_{t_0}^{t_1} \partial_x E_p(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \partial_y E_p(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \partial_z E_p(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [E_p(x(t), y(t), z(t))] dt = E_p(\Omega_a) - E_p(\Omega_b) = E_p(\Omega_b) - E_p(\Omega_a) \end{aligned}$$

Proposition

Inversement, on montre que si tout travail ^W d'un champ de force V s'exprime sous la forme (avec des notations claires)

$$\forall \Gamma, \quad W = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = E(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) - E(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$$

pour une certaine fonction E a valeurs ds \mathbb{R} , alors le champ de vecteur derive du potentiel $-E$, ie $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\partial_x E \\ -\partial_y E \\ -\partial_z E \end{pmatrix}(x, y, z)$.

Demonstration

On considere par exemple un deplacement selon x uniquement. Alors l'egalite nous dit que $\forall x_0, x, y, z, \int_{t_0}^t P(x(t), y, z) x'(t) dt = E(x(t), y, z) - E(x_0, y, z)$

c'est-a-dire apres changement de variable $t \rightarrow x(t)$: $\int_{x_0}^x P(x, y, z) dx = E(x, y, z) - E(x_0, y, z)$

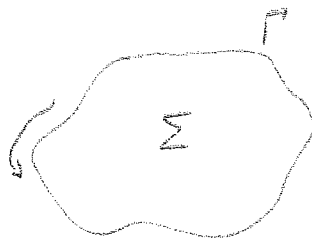
En derivant par rapport a x , on a donc $P(x, y, z) = -\partial_x E(x, y, z)$.

On procède de la même façon pour Q et R .

5/

Formule de Green - Riemann (cas plan)

(lien entre intégrale curviligne le long d'une courbe fermée et intégrale double de la région limitée par cette courbe)



Soit Σ un compact de \mathbb{R}^2 de frontière Γ représentant une courbe paramétrisée (sans point double) de classe \mathcal{C}^1 . On se donne un champ de force $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ défini et de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant Σ . On suppose que Γ est orientée ds le sens trigonométrique (Σ est à gauche de Γ)

$$\text{Alors} \quad \int_{\Gamma=\partial\Sigma} P dx + Q dy = \iint_{\Sigma} (\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)) dx dy$$

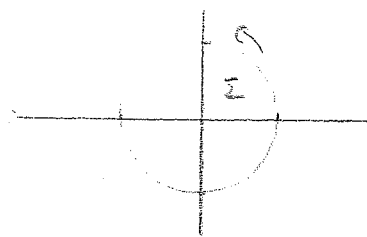
Remarque On retrouve que si V dérive d'un potentiel le travail sur un contour fermé est nul puisque $\partial_x Q = \partial_y P$.

Remarque importante Il est important que $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ soit défini et de classe \mathcal{C}^1 sur Σ tout entier. En effet, si on considère

$$\begin{cases} Q = \frac{x}{x^2+y^2} \\ P = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

et Γ le cercle unité

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$



P et Q ne sont pas bien définis en $(0,0)$. En revanche, $\forall (x,y) \neq (0,0)$,

$$\partial_x Q = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_y P \quad \text{de sorte que} \quad \iint_{\Sigma} (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy = 0$$

en contre

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P dx + Q dy &= - \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{1} (-\sin \theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{1} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

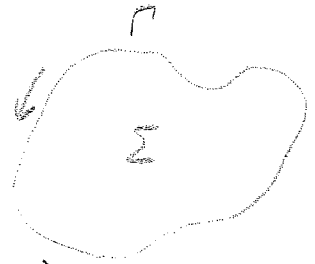
Utilisation pour le calcul d'aire

6/

Soit Σ et Γ vérifiant les hypothèses de la formule de Green Riemann

Par définition

$$A(\Sigma) = \iint_{\Sigma} dx dy$$



En posant
$$\begin{cases} P(x,y) = -\frac{1}{2}y \\ Q(x,y) = \frac{1}{2}x \end{cases}$$
 (qui est bien de classe \mathcal{C}^1)

on observe que
$$A(\Sigma) = \iint_{\Sigma} (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy$$

Le calcul de l'aire $A(\Sigma)$ peut donc se ramener à une intégrale curviligne :

$$A(\Sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} -y dx + x dy$$

Pour le cercle unité, on obtient donc

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -\sin\theta(-\sin\theta) d\theta + \cos\theta \cos\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \times \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

$= \pi R^2$ avec $R=1$

Intégrale de surface

Soit $S : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(u,v) \rightarrow (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

une surface paramétrée de classe \mathcal{C}^1

on suppose que $N(u,v) = \frac{\partial \Pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial v} (u,v) \neq 0$.

En posant $n(u,v) = \varepsilon \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|}$ avec $\varepsilon = \pm 1$, on définit donc une

orientation sur toute la surface S .

on notera comme d'habitude $\Pi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Définition (intégrale de surface)

Soit S une surface orientée de classe \mathcal{C}^1 dont tous les points sont réguliers. Soit $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant $S(D)$. On appelle intégrale de V sur S ou flux du champ de vecteurs à travers la surface S l'intégrale suivante Φ :

$$\Phi := \underbrace{\iint_S V \, d\sigma}_{\text{rotation}} := \iint_D V(\Pi(u,v)) \cdot N(u,v) \, du \, dv$$

On montre que Φ dépend de V et de S mais pas de la paramétrisation choisie pour S .



Théorème de Stokes

Soit S^+ une surface orientée, et soit Γ^+ son bord qui est une courbe orientée



La circulation du champ de vecteurs V le long de la courbe Γ^+ limitant la surface S est égale au flux du rotationnel de V à travers S :

$$\int_{\Gamma^+} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_{S^+} (\text{rot } V) \, d\sigma = \iint_D (\text{rot } V) \cdot N \, du \, dv$$

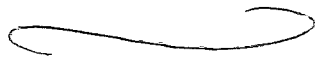
$$V = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

^{Green -}
Théorème d'Ostrogradski (analogue de Green-Riemann de \mathbb{R}^3) 8/
(ou théorème de flux divergence)

Soit S une surface fermée qui délimite un volume $\Delta \in \mathbb{R}^3$,
et on suppose que la surface est orientée de l'intérieur vers
l'extérieur du volume. Alors le flux d'un champ de vecteur
 V à travers la surface S est égal à l'intégrale (triple) sur
le volume Δ (intérieur à S) de la divergence de V :

$$\begin{aligned} \iint_S V \cdot d\vec{\sigma} &:= \iint_D V \cdot \vec{N} \, du \, dv = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{théorème } \Delta}}{\iiint} \operatorname{div}(V) \, dx \, dy \, dz \\ &:= \iiint (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

$$V = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$



La rédaction de ces notes s'est inspirée notamment

- des cours en ligne de Gerard Lavau
- des cours de Jean Paul Tine
- de mes propres cours lorsque j'étais étudiant.

