# Méthodes Numériques pour la Propagation de Fronts

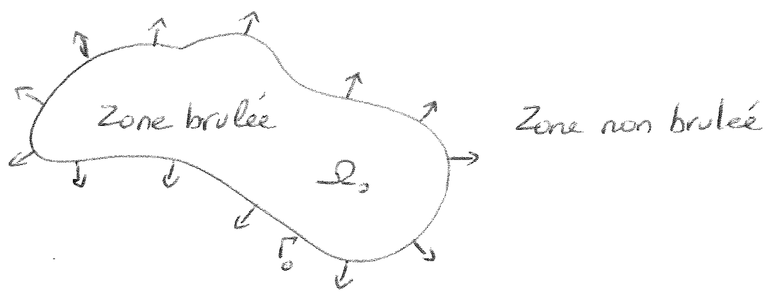
## Niveau M2

C. Chalons (UVSQ)

La rédaction de ces notes s'est fortement inspirée
- du polycopié de cours de l'ENSTA de Hasnaa Zidani et Olivier Bokanowski sur le même thème
- du polycopié de cours de Jérôme Droniou et Cyril Imbert sur les solutions de viscosité et les solutions variationnelles pour les EDP non linéaires
- du polycopié de Guy Barles sur les solutions de viscosité et les équations elliptiques du deuxième ordre
- des notes que j'ai prises lors d'un cours de Chi-Wang Shu lors d'une école CEA-EDF-INRIA en 2008

## Introduction

On s'intéresse dans ce cours à la propagation de fronts, à leur caractérisation et à leur approximation numérique par différentes stratégies. Un exemple simple d'application est la propagation d'un front de flamme entre une zone brulée et une zone non brulée.




Plus généralement, on considère un domaine initial $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$ $(N=1,2,3)$ dont
la frontière est notée $\Gamma_0$ et qui évolue dans le temps avec une vitesse de
propagation F. On supposera toujours que cette vitesse est portée par la
normale extérieure au front notée $\vec{\eta}_x$ au point $x$ : les mouvements de
l'interface dans les directions tangentielles seront ignorées. Cela signifie
que pour tout point $x \in \Gamma_0$, un chemin issu de $x$ vérifie l'équation dif-
férentielle ordinaire

$$\begin{cases} y'(t) = F\,\vec{\eta}_{y(t)}, & \forall t > 0, \\ y(0) = x. \end{cases}$$

On notera $\Gamma(t)$ le front à l'instant $t$ de sorte que bien entendu $y(t) \in \Gamma(t)$
$t>0$ et $y(0) \in \Gamma_0$. La normale $\vec{\eta}_x$ sera toujours supposée de norme 1.
La vitesse F dépend généralement d'un certain nombre de facteurs de
nature différente, de sorte que F s'écrit généralement $F = F(L, G, I)$. Les
facteurs locaux représentés par la lettre L sont le plus souvent associés à
une information géométrique locale comme la courbure de l'interface
et l'expression de sa normale. Les facteurs globaux représentés par la lettre G
représentent par exemple la position du front dans l'espace ou d'autres quantités
plus globales (intégrales le long du front...). Enfin, les facteurs indépendants
sont ceux qui ne dépendent pas de la forme du front comme par exemple

une vitesse fluide sous jacente qui transporterait le front. Dans les problèmes de propagation de fronts, la modélisation de $F$ est un problème souvent difficile que nous n'aborderons pas ici et qui est indépendant de l'objectif d'être capable de proposer des bons schémas numériques. Dans ce cours, on supposera donc que l'expression de $F$ est connue et pour simplifier les choses on posera $F = F(y(t))$ et on étudiera l'edo

$$\begin{cases} y'(t) = F(y(t))\, \vec{\eta}_{y(t)}, & \forall t > 0, \\ y(0) = x. \end{cases}$$

Nous allons maintenant décrire deux approches permettant de caractériser le front $\Gamma(t)$. Ces approches nous conduiront à des équations dites de Hamilton-Jacobi du premier ordre de la forme générale

$$H(x, u(x), \nabla_x u) = 0$$

que nous étudierons mathématiquement et numériquement par la suite.

<u>La méthode du temps d'arrivée</u>

On supposera dans ce paragraphe que $F(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$ de sorte qu'un point de l'espace ne pourra être atteint qu'une seule fois par le front. Cette hypothèse étant faite, une première approche pour caractériser le front $\Gamma(t)$ est de considérer le temps d'arrivée $T(x)$ du front en chacun des points du front :

$$\Gamma(t) = \{x, \ T(x) = t\}.$$

Notons qu'en l'absence de l'hypothèse $F(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$, certains points de l'espace peuvent éventuellement appartenir au front à plusieurs instants différents. Le temps d'arrivée $x \to T(x)$ devient alors une fonction multi-valuée qui ne permet donc plus de caractériser facilement le front $\Gamma(t)$.

Afin de déterminer la <u>fonction</u> $x \to T(x)$, nous allons dans un premier temps tenter de déterminer une équation aux dérivées partielles satisfaite par $T$, qu'il s'agira ensuite de résoudre.

Soit $x \in \Gamma(t)$. On considère un chemin issu de $x$, c'est-à-dire l'application $s \to y(s)$ telle que

$$\begin{cases} y'(s) = F(y(s))\, \vec{\eta}_{y(s)} \\ y(t) = x \end{cases}$$

Nous avons donc par définition $T(y(s)) = s \quad \forall s \geq t$. En dérivant cette relation par rapport à $s$ il vient

$$1 = \nabla T(y(s))\, y'(s) \iff 1 = \nabla T(y(s))\, F(y(s))\, \vec{\eta}_{y(s)}$$

ce qui donne pour $s = t$

$$1 = \nabla T(x)\, F(x)\, \vec{\eta}_x \, .$$

Le front $\Gamma(t)$ étant par ailleurs caractérisé par l'équation $T(x) - t = 0$, la direction de la normale est donnée par le gradient $\nabla T(x)$. La normale unitaire extérieure au front (ie dirigée dans le sens des $T$ croissants) est alors donnée par

$$\vec{\eta}_x = + \frac{\nabla T(x)}{\| \nabla T(x) \|}$$

On obtient donc $\quad 1 = \| \nabla T(x) \| \, F(x) \quad \forall x \notin \bar{\Omega}_0$, avec la condition aux limites

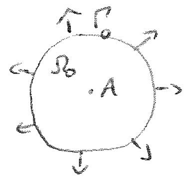
$$T(x) = 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}_0 \, .$$

Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles stationnaire avec condition de bord et du premier ordre caractérisant la fonction $T$. Cette équation est connue sous le nom d'<u>équation Eikonale stationnaire</u>.

<u>Exemple</u> : On considère le cas simple où $F(x) = c > 0 \ \forall x$. Dans ce cas, tous les points du front se déplacent à la vitesse constante $c$ positive, de sorte que le front $\Gamma(t)$ à l'instant $t$ est formé de tous les points distants de $ct$ du front initial :

$$\Gamma(t) = \{ x, T(x) = t \} = \{ x, \ d(x, \Gamma(0)) = ct \}$$

ce qui donne $\quad cT(x) = d(x, \Gamma(0))$ avec $d(x, \Gamma(0)) = \inf \{ d(x,y) \, , \ y \in \Gamma(0) \}$ et $d(x,y) = \|x - y\|_2$. Considérons alors le cas où $\Gamma(0) = \{ x, \|x - A\| = R \}$ (le cercle de centre $A$ et de rayon $R$ )




On a $\quad d(x, \Gamma(0)) = \|x - A\|_2 - R \quad \forall x \notin \bar{\Omega}_0$ de sorte que

$$cT(x) = \|x - A\|_2 - R$$

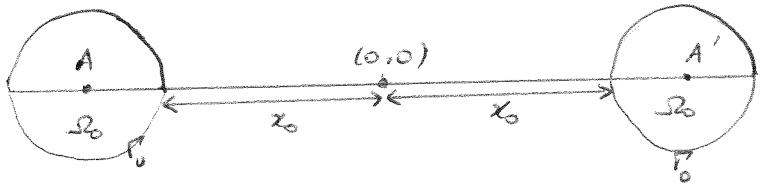
$$\text{ie} \quad T(x) = \frac{1}{c} \left( \|x - A\|_2 - R \right)$$

$$\text{ie} \quad \Gamma(t) = \{ x, \ \|x - A\| = R + ct \} \, .$$

Considérons maintenant le cas où

$$\Gamma(0) = \{x, \|x - A\| = R\} \cup \{x, \|x - A'\| = R\}$$

avec $A$ et $A'$ deux points de $\mathbb{R}^2$ ayant la même ordonnée (nulle par exemple) et étant situés de part et d'autre de l'origine :

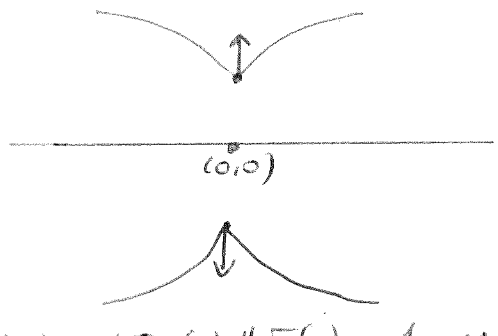



Dans ce cas $d(x, \Gamma(0)) = \inf\{\|x - A\|_2 - R, \|x - A'\|_2 - R\}$ $\forall x \notin \bar{\Omega}_0$ de sorte que

$$cT(x) = \inf\{\|x - A\|_2 - R, \|x - A'\|_2 - R\}$$

et $\quad \Gamma(t) = \{x, \inf\{\|x - A\|_2, \|x - A'\|_2\} = R + ct\}$.

<u>Remarque</u> Il est clair sur ce deuxième exemple que la fonction $T$ n'est pas dérivable partout (pour $x$ sur l'axe des ordonnées, i.e $\|x - A\|_2 = \|x - A'\|_2$, l'expression de $T(x)$ est un raccord seulement continu entre $\|x - A\|_2 - R$ et $\|x - A'\| - R$ ) et que la normale au front n'est pas toujours bien définie.




Néanmoins l'équation $\|\nabla T(x)\| F(x) = 1$ reste valable en un sens à préciser et peut être obtenue sous des hypothèses plus générales que celles utilisées jusqu'ici (existence des chemins issus de $x$, dérivabilité de $T$, existence du vecteur normal extérieur au front).

<u>Remarque</u> Remarquons enfin qu'on pourrait croire qu'il est toujours simple de calculer la fonction distance $d(x, \Gamma(0))$ $\forall \Gamma(0)$. Il n'en est rien en réalité et d'un point de vue pratique il est parfois plus intéressant de résoudre l'équation $\|\nabla T(x)\| F(x) = 1$ avec $F(x) = c$ pour calculer la fonction $T$, puis d'en déduire la distance $d(x, \Gamma(0))$ à un domaine $\Omega_0$ tel que $\partial\Omega_0 = \Gamma(0)$ par la relation $cT(x) = d(x, \Gamma(0))$. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement dans le cours.

## La méthode level set (lignes de niveau)

Une deuxième approche pour caractériser le front, valable sans hypothèse sur le signe de $F$, est de l'interpréter comme la courbe de niveau $0$ d'une fonction $v(x,t)$ à l'instant $t$. Plus précisément, on se donne initialement une fonction $\phi_0(x)$ telle que $\Gamma_0 = \Gamma(0) = \{x,\ \phi_0(x) = 0\}$, ie $\phi_0(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \Gamma(0)$, et on cherche une fonction $v(x,t)$ telle que d'une part $v(x,0) = \phi_0(x)$, et d'autre part $\Gamma(t) = \{x,\ v(x,t) = 0\}$, ie $v(x,t) = 0 \Leftrightarrow x \in \Gamma(t)$.

Remarque Dans l'approche précédente on avait $\Gamma(t) = \{x,\ T(x) = t\} = \{x,\ T(x) - t = 0\}$ de sorte qu'on aura $v(x,t) = T(x) - t \quad \forall x \in \Gamma(t)$.

De la même manière que précédemment, nous allons maintenant essayer d'obtenir une loi d'évolution pour la fonction $v$. Pour tout chemin démarrant au point $x \in \Gamma(0)$.

$$\begin{cases} y'(t) = F(y(t))\,\vec{\eta}_{y(t)} \\ y(0) = x \end{cases}$$

et par définition nous avons

$$v(y(t), t) = v(x,0) = 0.$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, il vient

$$\partial_t v(y(t),t) + \nabla v(y(t),t)\; y'(t) = 0.$$

Le front $\Gamma(t)$ étant caractérisé par l'équation $v(x,t) = 0$, la normale unitaire au front est donnée par

$$\vec{\eta}_{y(t)} = \pm \frac{\nabla v(y(t),t)}{\|\nabla v(y(t),t)\|}.$$

On décide d'orienter $\vec{\eta}$ dans le sens des $v$ croissants de sorte que

$$\vec{\eta}_{y(t)} = \frac{\nabla v(y(t),t)}{\|\nabla v(y(t),t)\|}$$

pour obtenir finalement

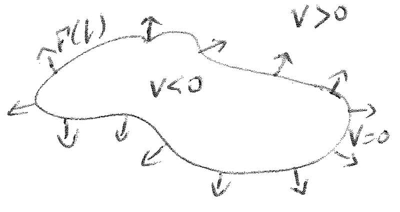
$$\partial_t v(y(t),t) + \|\nabla v(y(t),t)\|\, F(y(t)) = 0.$$

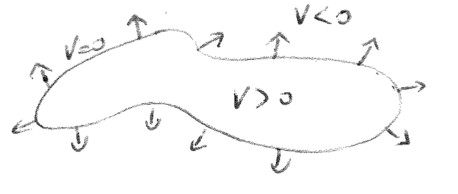
L'équation aux dérivées partielles que l'on se propose de résoudre pour trouver $v$ est donc

$$\begin{cases} \partial_t v(x,t) + \|\nabla v(x,t)\|\, F(x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = \phi_0(x) \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles instationnaire avec condition initiale et du premier ordre. Cette équation est connue sous le nom d'<u>équation Eikonale instationnaire</u>.

Cas $F \geq 0$




Cas $F \leq 0$.

La méthode des courbes de niveau est très connue dans de nombreux domaines mathématiques (imagerie, optimisation, ...). Elle doit son succès à sa simplicité et à l'efficacité des méthodes numériques qui en découlent. Notons également que l'idée de remplacer la recherche d'un ensemble de points par celle d'une fonction permet l'utilisation des éléments d'analyse fonctionnelle et la conception de stratégies numériques simples à mettre en oeuvre.

## Avantages et inconvénients des deux approches

Notons tout d'abord que les deux formulation sont indépendantes de la dimension N, et que les changements de topologie sont naturellement pris en compte par la ligne de niveau $v(x,t)=0$ et par le temps d'arrivée $T(x)=t$.
En particulier, le front peut être composé de deux courbes qui peuvent éventuellement se rejoindre au cours du temps, voire se détacher à nouveau.
Un autre élément important est le calcul relativement aisé de propriétés géométriques intrinsèques comme par exemple la normale :

$$\vec{n} = \frac{\nabla v}{\|\nabla v\|} \quad \text{ou} \quad \vec{n} = \frac{\nabla T}{\|\nabla T\|}$$

où la courbure qui correspond à la divergence du vecteur $\vec{n}$ :

$$k = \begin{cases} \nabla \cdot \dfrac{\nabla v}{\|\nabla v\|} \\ \\ \nabla \cdot \dfrac{\nabla T}{\|\nabla T\|} \end{cases}$$

L'avantage indéniable de l'approche level-set est de pouvoir considérer des vitesses positives et négatives au cours du temps. Inversement, l'avantage de la méthode du temps d'arrivée est de ne pas faire intervenir de dimension supplementaire supplémentaire (le temps $t$, qui sera assujettie dans les méthodes numériques à une restriction de type CFL...), ce qui permetha la mise en place de méthodes d'approximation particulièrement performantes.

## Equations de Hamilton-Jacobi.

Les approches par fonction level-set et temps d'arrivée aboutissent toutes les deux à la résolution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire pour caractériser le front. Ces équations dépendent de l'inconnue et de son gradient. En mathématiques, on parle d'équation de Hamilton-Jacobi (HJ). Rappelons que l'équation de HJ est stationnaire dans l'approche par temps d'arrivée alors qu'elle est instationnaire dans l'approche level-set. On parle d'équation d'évolution.

Il est à noter qu'en général, les équations de HJ n'admettent pas forcément de solution classique, et peuvent admettre une infinité de solutions vérifiant l'équation presque partout. Nous verrons au chapitre suivant que les solutions physiquement admissibles sont les solutions dites de viscosité. Nous terminons cette introduction assez générale en donnant le principe physique décrivant l'évolution d'un front dans la direction de sa normale (si celle-ci existe...), il s'agit du principe géométrique de Huygens, et le principe de programmation dynamique de Bellmann conduisant à une équation dite de Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB).

Principe géométrique de Huygens

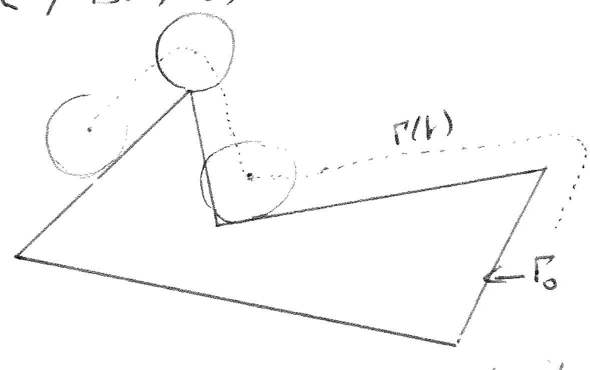
On considère un domaine initial $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$, on note $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ le front initial et $\bar{\Omega}_{0ext} = \mathbb{R}^N / \Omega_0$ le complémentaire fermé de $\Omega_0$. Le front $\Gamma_0$ sépare donc $\Omega_0$ et $\bar{\Omega}_{0ext}$.

Le principe de Huygens donne le principe physique décrivant l'évolution du front dans la direction de sa "normale" extérieure.

→ le cas $F(x) \equiv c > 0$

On considère dans ce cas l'ensemble des boules $B(x, r)$ de centre $x \in$ et de rayon $r = ct$, incluses dans $\bar{\Omega}_{0ext}$ et s'appuyant sur $\Gamma_0$ (voir figure ci-dessous). Alors $\Gamma(t)$ est naturellement représenté par la réunion des c es $x$ de ces boules.

$$\Gamma(t) = \{ x \in \mathbb{R}^N \,/\, B(x, ct) \subset \bar{\Omega}_{0ext} \,,\, B(x, ct) \cap \Gamma_0 \neq \emptyset \}$$




On remarque que ce principe permet de traiter les "coins" où la normale n'est pas bien définie.

Un point $x$ de $\Gamma(t)$ est donc tel qu'il existe un vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^N$ de norme 1 ($|\alpha| = 1$) tel que $x - d\alpha \in \Gamma_0$. Un point de $\Gamma(t)$ s'écrit donc comme la somme d'un point de $\Gamma_0$ et de $d\alpha$, $d$ représentant la distance parcourue (ici $r = ct$), et $\alpha$ représentant un vecteur unitaire normal "généralisé" dirigé dans le sens de propagation du front.

→ <u>le cas général</u>

Dans le cas général et en utilisant des approximations locales, le principe de Huygens se généralise et s'écrit comme suit. $x \in \Gamma(t) \Leftrightarrow$

$\exists \alpha : (0,t) \to \mathbb{R}^N$, $|\alpha(s)| = 1$ t.q la trajectoire $y^\alpha_{tx}$ solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} {y^\alpha_{tx}}'(s) = F(y^\alpha_{tx}(s))\,\alpha(s) \\ y^\alpha_{tx}(t) = x \end{cases}$$

vérifie $y^\alpha_{tx}(t-s) \in \Gamma(t-s) \quad \forall s \in [0,t]$.

<u>Remarque</u> : il n'y a pas forcément unicité de $\alpha$ : dans l'exemple des deux cercles qui se rejoignent page 4, le point d'intersection peut être atteint de deux façons différentes.

## <u>Principe de programmation dynamique de Bellmann</u>

On se propose dans ce paragraphe d'établir formellement ce principe qui permet de caractériser la fonction level-set $v$ introduite précédemment.

L'équation Eikonale $\partial_t v + F(x)\,\|\nabla v(x,t)\| = 0$ s'écrit aussi

$$\partial_t v + F(x)\,\frac{\nabla v(x,t)}{\|\nabla v(x,t)\|}\cdot \nabla v(x,t) = 0$$

ou encore $$\partial_t v + F(x)\,\max_{|\alpha| \leq 1} \alpha \cdot \nabla v(x,t) = 0$$

Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, on considère les trajectoires $y^\alpha_{tx}$ telles que

$$\begin{cases} {y^\alpha_{tx}}'(s) = F(y^\alpha_{tx}(s))\,\alpha(y^\alpha_{tx}(s), s) \\ y^\alpha_{tx}(t) = x \end{cases}$$

où $\alpha$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ telle que $|\alpha| \leq 1$. Évaluons le comportement de $v$ le long des caractéristiques, ie considérons $s \to v(y^\alpha_{tx}(s), s)$.

En dérivant cette fonction par rapport à $s$ on obtient

$$\partial_t v(y^\alpha_{tx}(s), s) + {y^\alpha_{tx}}'(s)\cdot \nabla_x v(y^\alpha_{tx}(s), s)$$
$$= \partial_t v(y^\alpha_{tx}(s), s) + F(y^\alpha_{tx}(s))\,\alpha(y^\alpha_{tx}(s), s)\cdot \nabla_x v(y^\alpha_{tx}(s), s)$$

$$= F(y_{tx}^{\alpha}(s))\,\alpha(y_{tx}^{\alpha}(s),s).\,\nabla_x V(y_{tx}^{\alpha}(s),s)$$
$$- F(y_{tx}^{\alpha}(s)) \max_{|\alpha|\leq 1} \alpha.\nabla_x V(y_{tx}^{\alpha}(s),s) \leq 0 \qquad (\text{si } F \geq 0)$$

avec égalité à 0 si on a considéré "le $\alpha$ qui convient".

La fonction $s \to V(y_{tx}^{\alpha}(s),s)$ est donc décroissante, ce qui implique
$$V(x,t) = V(y_{tx}^{\alpha}(t),t) \leq V(y_{tx}^{\alpha}(0),0) = \phi_0(y_{tx}^{\alpha}(0)).$$

Cette inégalité est vraie quelque soit le paramètre $\alpha$ considéré, avec égalité si on a considéré "le $\alpha$ qui convient".

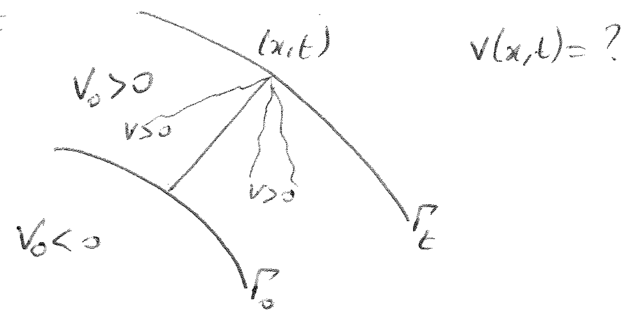
On en déduit donc le principe de programmation dynamique suivant
$$V(x,t) = \min_{|\alpha|\leq 1} \phi_0(y_{tx}^{\alpha}(0))$$
$$V(x,t) = \min_{|\alpha|\leq 1} V(y_{tx}^{\alpha}(0),0).$$

Notons que l'on aurait pu tout aussi bien écrire
$$V(x,t) = V(y_{tx}^{\alpha}(t),t) \leq V(y_{tx}^{\alpha}(t-s),t-s) \quad \forall s \in [0,t[$$

ce qui conduit au (PPD)
$$V(x,t) = \min_{|\alpha|\leq 1} V(y_{tx}^{\alpha}(t-s),t-s) \quad \forall s \in [0,t[.$$

"La valeur de $V$ en un point $(x,t)$ coïncide donc avec la plus petites des valeurs de $V(\cdot,t-s)$ prises en des points de l'espace pouvant être atteints en un temps $s$ à partir de $x$ à partir d'une direction $\alpha$".

Exemple pour $s=t$



## Notion de solution de viscosité

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notions fondamentales de la théorie des solutions de viscosité. Cette notion de solution a été introduite par Crandall et Lions en 1981 pour résoudre les problèmes posés par les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, ce que nous considérerons ici, mais elle est très vite apparue comme bien adaptée pour l'étude des équations elliptiques non linéaires. Au delà de l'article fondateur de Crandall et Lions, nous renvoyons également le lecteur au livre de G. Barles pour une étude plus approfondie des solutions de viscosité du premier ordre. Il est par ailleurs important d'avoir dès à présent à l'esprit que les équations hyperboliques de type lois de conservation ne rentrent pas dans le cadre de la théorie des solutions de viscosité, mais nous verrons qu'il existe un lien entre cette notion de solution et celle de solution entropique discontinue pour les lois de conservation.

Les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre s'écrivent sous la forme

$$H(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{O} \qquad (1)$$

où $\mathcal{O}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $H$ une fonction continue définie sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $Du$ représente le gradient de la fonction $u$. $H$ est très souvent appelé l'hamiltonien de l'équation.

<u>Remarque</u> Les équations elliptiques s'écrivent sous la forme

$$H(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{O}$$

où $H$ est définie sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S^N$ et à valeurs ds $\mathbb{R}$, $S^N$ étant l'ensemble des matrices $N \times N$ symétriques. Un pré-requis nécessaire pour parler de solutions de viscosité d'une telle équation elliptique est la condition dite d'ellipticité, qui s'écrit

$$F(x, u, p, M_1) \leq F(x, u, p, M_2) \quad \text{si } M_1 \geq M_2$$

pour tous $x \in \mathcal{O}$, $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^N$, $M_1$ et $M_2 \in S^N$. Cette condition est bien entendu automatiquement vraie pour les équations du premier ordre.

<u>Remarque</u> Nous nous intéresserons également aux équations de Hamilton-Jacobi-Bellman qui s'écrivent sous la forme

$$\partial_t u + \max_{\alpha \in A} \begin{pmatrix} b(x,\alpha) \cdot D_x u(x) - f(x,\alpha) \\ + c(x,\alpha)\, u(x) \end{pmatrix} = 0$$

où les fonctions $b : \mathcal{O} \times A \to \mathbb{R}^N$, $c : \mathcal{O} \times A \to \mathbb{R}$ et $f : \mathcal{O} \times A \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et où l'ensemble $A$ est l'espace des contrôles (en général un espace métrique compact). Ces équations interviennent de manière récurrente en contrôle optimal et ont la particularité d'être le plus souvent fortement non linéaire.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une notion de solutions d'équations de Hamilton-Jacobi fortement non linéaires et pouvant présenter certains types de singularités. Plus précisément, les solutions considérées ne seront pas nécessairement régulières au sens classique $\mathcal{C}^1$ du terme, comme l'illustre l'exemple suivant.

Considérons l'équation

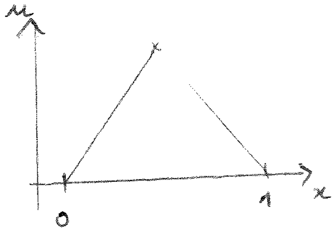
$$|u'(x)| = 1 \quad \forall x \in ]0,1[$$

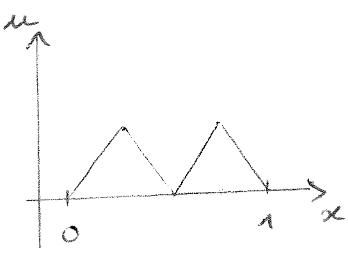
avec les conditions aux limites

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Il est clair, d'après le théorème de Rolle, que ce problème n'admet pas de solution $\mathcal{C}^1(]0,1[) \cap \mathcal{C}^0([0,1])$ (sinon il existerait $c \in ]0,1[$ t.q $u'(c) = 0$).

Si l'on est prêt à affaiblir cette notion de solution et à considérer une notion de solution généralisée qui satisfait l'équation au sens presque partout, alors on remarque qu'il est maintenant possible de construire une infinité de solutions de l'équation. En voici 2 exemples :



On perd donc l'unicité, qui est un enjeu majeur et naturel du point de vue des applications.

Une approche au sens des distributions étant inopérante à cause du terme $|u'(x)|$, on voit bien au travers de cet exemple simple la nécessité d'introduire une nouvelle notion de solution.

La notion de solution de viscosité est motivée par le lemme suivant, que l'on énonce pour des équations elliptiques.

<u>Lemme</u> : solution régulière et principe du maximum.

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ une solution de l'équation $H(x, u, Du, D^2u) = 0$ sur $\mathcal{O}$ où $H$ vérifie la condition d'ellipticité. Alors

$$\begin{cases} \forall \phi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}), \text{ si } x_0 \text{ est un point de maximum local de } u-\phi, \text{ on a} & \\ \qquad F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0 & (i) \\ \forall \phi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}), \text{ si } x_0 \text{ est un point de minimum local de } u-\phi, \text{ on a} & \\ \qquad F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0. & (ii) \end{cases}$$

<u>Preuve</u> : On montre seulement (i) car (ii) se montre de la même façon.

Si $x_0 \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ ouvert, est un point de maximum local de $u-\phi$, alors

$$\begin{cases} Du(x_0) = D\phi(x_0) \\ D^2u(x_0) \leq D^2\phi(x_0) \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \\ &= F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2u(x_0)) \\ &\geq F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)). \end{aligned}$$

<u>Remarque</u> La réciproque du lemme est également vraie. Il suffit (par (i)) en effet d'ajouter à $\phi$ la quantité $\langle (D^2u - D^2\phi)(x_0)(x-x_0), (x-x_0)\rangle \leq 0$ pour obtenir une fonction $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ telle que $x_0$ est un point de maximum local de $u-\tilde{\phi}$ (car $u-\tilde{\phi} \leq u-\phi \leq (u-\phi)(x_0)$ et $\phi(x_0) = \tilde{\phi}(x_0)$) et telle que

$$D\tilde{\phi}(x_0) = Du(x_0),$$
$$D^2\tilde{\phi}(x_0) = D^2u(x_0),$$

ce qui permet de conclure.

A ce niveau, il est crucial de remarquer que (i) et (ii) ont un sens même si $Du$ et $D^2u$ ne sont pas définies en $x_0$ (ou en tout autre point). Autrement dit, (i) et (ii) ne requiert ni l'existence de $Du$ ni celle de $D^2u$, mais seulement l'existence de $u(x_0)$. Une condition naturelle permettant de donner un sens à (i) et (ii) est donc la continuité, voire ~~la~~ semi continuité (pour la notion de sous- ou sur-solution)

On introduit alors la définition suivante.

Définition : sous-solution, sur-solution et solution de viscosité par les fonctions test.

(i) $u$ est une sous-solution de viscosité de (1) si $u$ est semi-continue supérieurement (scs) et si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ telle que $u-\varphi$ atteint un maximum local en $x_0 \in \mathcal{O}$, on a

$$H(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) \leq 0 .$$

(ii) $u$ est une sur-solution de viscosité de (1) si $u$ est semi-continue inférieurement (sci) et si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ telle que $u-\varphi$ atteint un minimum local en $x_0 \in \mathcal{O}$, on a

$$H(x_0, u(x_0), D\varphi(x_0)) \geq 0 .$$

(iii) $u$ est une solution de viscosité de (1) si $u$ est une sur-solution de viscosité et une sous-solution de viscosité.

Remarques

(i) On rappelle que $f$ est scs en $x_0$ si ~~lorsque $x \to x_0$, $f(x) \to f(x_0)$ ou bien~~

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

($f(x)$ est soit proche de $f(x_0)$, soit inférieure à $f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$)

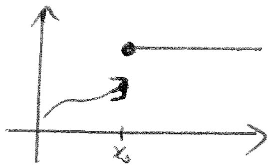
et que $f$ est sci en $x_0$ si

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

($f(x)$ est soit proche de $f(x_0)$, soit supérieure à $f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$)

(ii) D'après la définition, une solution de viscosité est continue puisqu'elle est sci et scs. 5/

(iii) Si $u$ admet la représentation graphique suivante




alors $u$ est scs en $x_0$ et $x_0$ est un maximum local de $u$ en $x_0$, et donc de $u-\varphi$ en choisissant $\varphi = 0$.

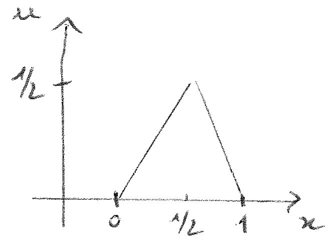
<u>Remarque importante</u>:

Il est important de noter que résoudre $H=0$ n'est pas équivalent à résoudre $-H=0$ (cela est clair pour les équations elliptiques car la condition d'ellipticité n'est généralement pas vraie pour $H$ et $-H$).

On verra ci-après en effet que la solution de viscosité de l'équation

$$\begin{cases} |u'(x)| = 1 & \text{sur } ]0,1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

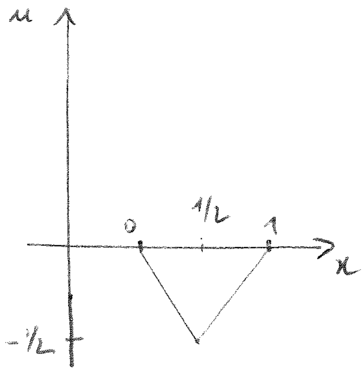
est unique et donnée par le graphe suivant




alors que celle de l'équation

$$\begin{cases} -|u'(x)| = -1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

est, par un raisonnement analogue, donnée par l'opposé de cette solution :



## Exemple

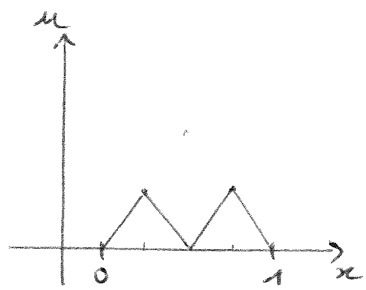


Revenons donc à l'équation

$$\begin{cases} |u'(x)| = 1 & \text{sur } ]0,1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

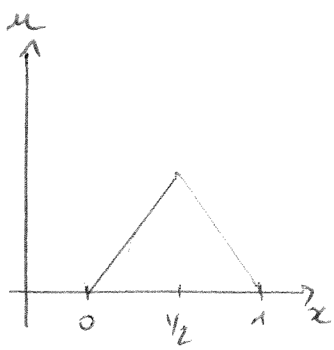
pour laquelle on a proposé une infinité de solutions généralisées (voir page 2). Parmi toutes ces solutions, on remarque facilement que seule celle ne contenant pas de "pic vers le bas" est une sur-solution.

En effet, si on prend par exemple la solution suivante




et qu'on pose $x_0 = 1/2$, $\varphi(x) = 0$, alors $x_0$ est un minimum local de $u - \varphi = u$ et pourtant $|\varphi'(x_0)| - 1 = -1 \not\geq 0$. Elle n'est donc pas un sur-solution.

En revanche, la solution suivante




est bien
- une sur-solution car la seule possibilité pour qu'une fonction $\varphi$ soit localement en dessous de $u$ autour de $x_0$ et vaille $u(x_0)$ en $x_0$ est d'avoir $|\varphi'(x_0)| \geq 1$.
- une sous-solution car la seule possibilité pour qu'une fonction $\varphi$ soit localement au dessus de $u$ autour de $x_0$ et vaille $u(x_0)$ en $x_0$ est d'avoir $|\varphi'(x_0)| \leq 1$.

Il s'agit donc de l'unique solution de viscosité.

Avant de donner une nouvelle définition de la notion de solution de viscosité, équivalente à la première, nous donnons un premier résultat de stabilité permettant d'expliquer l'origine de la terminologie "solution de viscosité". Elle provient dans les faits du fait que la "bonne" solution (la solution de viscosité) est obtenue par la méthode de la viscosité évanescente, par analogie avec les solutions faibles entropiques des lois de conservation.

Théorème

On suppose que pour tout $\varepsilon>0$, $u_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ est une sous-solution (resp. sur-solution) de l'équation

$$H_\varepsilon(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon, D^2u_\varepsilon) = 0 \quad \text{ds } \mathcal{O}$$

où $(H_\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite de fonctions continues satisfaisant la condition d'ellipticité. Si $u_\varepsilon \to u$ ds $\mathcal{C}(\mathcal{O})$ et si $H_\varepsilon \to H$ ds $\mathcal{C}(\mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S^N)$ alors $u$ est une sous-solution (resp. une sur-solution) de l'équation

$$H(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{ds } \mathcal{O},$$

où la convergence dans les espaces des fonctions continues $\mathcal{C}(\mathcal{O})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ est la convergence uniforme sur tout compact de $\mathcal{O}$ et de $\mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$.

La méthode de la viscosité évanescente consiste à considérer le Hamiltonien

$$H_\varepsilon(x, u_\varepsilon, p, M) = -\varepsilon\,\mathrm{Trace}(M) + H(x,u,p)$$

qui correspond à l'équation

$$-\varepsilon\,\Delta u_\varepsilon + H(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) = 0,$$

et dont la convergence ds $\mathcal{C}(\mathcal{O}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S^N)$ vers $H(x,u,p)$ est immédiate. Notons que la condition d'ellipticité est vérifiée grâce au signe $\ominus$ devant $\varepsilon$. On a ajouté un terme de viscosité puisque l'équation s'écrit aussi

$$H(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) = \varepsilon\,\Delta u_\varepsilon \quad \text{sur } \mathcal{O}$$

Cette équation étant uniformément elliptique, on peut espérer l'existence et l'unicité d'une solution $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ ⊛ (sous réserve d'imposer des conditions aux limites) et étudier le comportement de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En pratique, on tente de démontrer que $u_\varepsilon$ et $Du_\varepsilon$

⊛ et donc de viscosité.

sont bornées dans $L^\infty$, uniformément en $\varepsilon$, ce qui entraîne la compacité de la suite $u_\varepsilon$ ds $C(K)$ pour tout compact $K \subset \mathcal{O}$ par le théorème d'Ascoli. Quitte à extraire une sous-suite on a donc la convergence forte de $u_\varepsilon \to u$ (mais seulement une convergence faible de la suite $(Du_\varepsilon)_\varepsilon$), l'idée étant ensuite d'appliquer le théorème à $(u_\varepsilon)_\varepsilon$. Cela entraînerait que $u$ est <u>une</u> solution de viscosité de l'équation du premier ordre, ou <u>la</u> solution de viscosité si on a unicité de la solution. Cela est néanmoins plus compliqué qu'il n'y paraît car l'unicité <u>requiert l'ajout de conditions aux limites</u> ($u(0)=u(1)=0$ ds notre premier exemple), et de savoir en conséquent traiter ces conditions aux limites dans le processus $\varepsilon \to 0$.

Notons que ces questions de passage à la limite seront également importante dans l'étude de la convergence des schémas numériques que nous proposerons pour l'équation du premier ordre qui nous intéresse.

<u>Remarque</u> pour la démonstration du théorème, nous renvoyons le lecteur au livre et aux notes de cours de Guy Barles.

Nous allons maintenant donner plusieurs définitions équivalentes, parfois plus faciles à manipuler en pratique, de la notion de solution de viscosité. Les démonstrations sont données dans les références proposées.

<u>Proposition</u>

(i) $u$ est une sous-solution de viscosité de (1) ssi $u$ est scs et si, pour tout $x_0 \in \mathcal{O}$ et tout $p \in D^+u(x_0)$, on a $H(x_0, u(x_0), p) \leq 0$.

(ii) $u$ est une sur-solution de viscosité de (1) ssi $u$ est sci et si, pour tout $x_0 \in \mathcal{O}$ et tout $p \in D^-u(x_0)$, on a $H(x_0, u(x_0), p) \geq 0$.

Les ensembles $D^+$ et $D^-$ représentent respectivement les sur- et sous-différentiel d'ordre 1 d'une fonction et sont définis comme suit.

## Définition

(i) Soit $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction sci. Le sous-différentiel $D^- u(x_0)$ d'ordre 1 de $u$ en $x_0$ est l'ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^N$ des vecteurs $p$ tels que

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle p, (x - x_0) \rangle + o((x - x_0)),$$

pour $x$ voisin de $x_0$.

(ii) Soit $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction scs. Le sur-différentiel $D^+ u(x_0)$ d'ordre 1 de $u$ en $x_0$ est l'ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^N$ des vecteurs $p$ tels que

$$u(x) \leq u(x_0) + \langle p, (x - x_0) \rangle + o((x - x_0)),$$

pour $x$ voisin de $x_0$.

En d'autres termes, trouver un sous-différentiel (resp. sur différentiel) consiste à mettre, à une erreur d'ordre supérieur près, une droite sous le (resp. au dessus du) graphe de $u$, droite qui colle au graphe de $u$ en $x_0$, et à garder le coefficient directeur de la droite.

Si $u$ est différentiable en $x_0$ alors $D^- u(x_0) = D^+ u(x_0) = \{Du(x_0)\}$

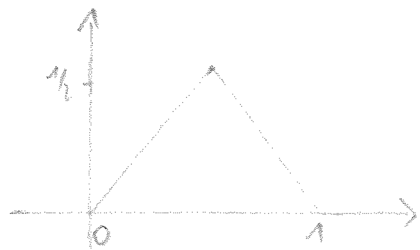
Notons également que les deux ensembles $D^-$ et $D^+$ peuvent être vides, même tous les deux simultanément, comme ds le cas de la fonction très oscillante $u(x) = \sqrt{|x|} \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$, $u(0) = 0$.

## Proposition

Dans la définition de sous-solution, sur-solution et solution de viscosité, on peut remplacer le terme "local" par "local strict" ou par "global" ou encore par "global strict".

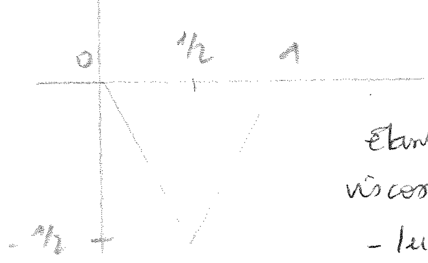
## Exemple d'utilisation

On se propose de montrer à l'aide des sous différentiel et sur-différentiel que la fonction




est la solution de viscosité de $|u'(x)| - 1 = 0$, $u(0) = u(1) = 0$

et non




, cette fonction étant solution de viscosité de l'équation

$-|u'(x)| + 1 = 0$

$u(0) = u(1) = 0$.

Pour la première solution :

- $D^- u(x_0) = D^+ u(x_0) = -1$ si $x_0 \in ]0, 1/2[$
- $D^- u(x_0) = D^+ u(x_0) = -1$ si $x_0 \in ]1/2, 1[$.
- $D^- u(x_0) = \emptyset$ si $x_0 = 1/2$
- $D^+ u(x_0) = [-1, 1]$ si $x_0 = 1/2$

La seule difficulté se situe au point $x_0 = 1/2$.
Il est ainsi clair que cette fonction est une sur-solution de $|u'(x)| - 1 = 0$ puisque $D^- u(x_0) = \emptyset$. Par ailleurs, cette fonction est aussi une sous-solution puisque $\forall p \in [-1, 1]$, $|p| - 1 \leq 0$. Il s'agit donc bien d'une solution de viscosité.
Cette fonction est également une sur-solution de $-|u'(x)| + 1 = 0$ mais n'est pas une sous-solution. Elle n'est donc pas une solution de viscosité de $-|u'(x)| + 1 = 0$.

On termine par une dernière proposition qui peut être immédiatement illustrée par l'exemple que nous venons de considérer.

Proposition

$u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ est une sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de $H(x, u, D_x u) = 0$ ssi $v = -u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ est une sur-solution (resp. sous-solution) de viscosité de l'équation

$-H(x, -v, -D_x v) = 0$.

## Unicité des solutions de viscosité continues

Dans cette partie, on considère une équation du premier ordre

$$H(x, u, D_x u) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O},$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert borné et $H$ une fonction continue sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. On fera par ailleurs les hypothèses suivantes.

(H1)
$\forall R \in \mathbb{R}^{+*}$, $H(x, u, p) - H(x, v, p) \geq \gamma_R (u - v)$
pour tout $x \in \mathcal{O}$, $-R \leq v \leq u \leq R$ et $p \in \mathbb{R}^N$

(H2)
$\forall R \in \mathbb{R}^{+*}$, $\exists \gamma_1 > 0$ t.q

$$|H(x, u, p) - H(y, u, p)| \leq \gamma_1 |x - y| (1 + |p|)$$

pour tout $(x, y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$, $u \in [-R, R]$ et $p \in \mathbb{R}^N$.

Remarque l'hypothèse (H2) peut être affaiblie en remplaçant le membre de droite par $m(|x-y|(1+|p|))$ ou $m(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

L'objectif de cette partie est d'établir un résultat d'unicité pour des solutions continues (il en existe, plus délicats à obtenir, pour les solutions discontinues). Plus précisément, nous souhaitons démontrer un résultat disant qu'une sous-solution est plus petite qu'une sur-solution, ce qui a pour corollaire immédiat l'unicité de deux solutions de viscosité. Le résultat est le suivant.

<u>Théorème</u> (principe d'unicité)

Si $u, v \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}})$ sont respectivement sous-solution et sur-solution de viscosité de l'équation, et si $u \leq v$ sur $\partial\mathcal{O}$, alors

$$u \leq v \quad \text{sur } \overline{\mathcal{O}}.$$

<u>Démonstration</u>

$\overline{\mathcal{O}}$ étant fermé et borné, il est compact. Les fonctions $u$ et $v$ étant continues sur $\overline{\mathcal{O}}$, la quantité $M = \sup_{\overline{\mathcal{O}}} (u-v)$ est une quantité finie et atteinte. Le but de la démonstration est de montrer que $M \leq 0$. On va pour cela raisonner par l'absurde en supposant que $M > 0$ et aboutir à une contradiction. Notons que comme $u \leq v$ sur $\partial\mathcal{O}$, le maximum $M$ ne peut alors pas être atteint sur le bord $\partial\mathcal{O}$. Notons $x_0 \in \mathcal{O}$ le point de maximum.

Si $u$ et $v$ étaient régulières (de classe $\mathcal{C}^1$) on aurait alors

$$\begin{cases} Du(x_0) = Dv(x_0) \\ D^+u(x_0) = \{Du(x_0)\} = \{Dv(x_0)\} \\ D^-v(x_0) = \{Du(x_0)\} = \{Dv(x_0)\} \\ u(x_0) > v(x_0). \end{cases}$$

Comme $u$ et $v$ sont respectivement sous-solution et sur-solution, en notant $p = Du(x_0) = Dv(x_0)$, on aurait

$$H(x_0, u(x_0), p) \leq 0$$
$$0 \leq H(x_0, v(x_0), p)$$

de sorte que $H(x_0, u(x_0), p) - H(x_0, v(x_0), p) \leq 0$.

Or l'hypothèse (H1) entraine que

$$H(x_0, u(x_0), p) - H(x_0, v(x_0), p) \geq \gamma_R \,(u(x_0) - v(x_0)) > 0$$

ce qui donne une contradiction.

Les fonctions $u$ et $v$ n'étant pas nécessairement régulières, on va utiliser une technique fondamentale appelée le dédoublement de variables.

On introduit pour cela la fonction test

$$\varphi_\varepsilon(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}$$

De même que précédemment, la quantité $M_\varepsilon = \sup_{\bar{O}\times\bar{O}} \varphi_\varepsilon(x,y)$ est finie et atteinte. ~~A cause du théorème de pénalisation~~ $-\frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}$,

On note $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ le point de maximum. A cause du terme de pénalisation $-\frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}$ qui tend vers $-\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$ pour $(x,y)$ t.q $x \neq y$, on s'attend à ce que $\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ (et donc $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$) et à ce que du coup $\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon = M$ de sorte que $M_\varepsilon$ représenterait une approximation de $M$.

Nous avons plus précisement le lemme suivant.

**Lemme**

Les résultats de pénalisation suivants ont lieu

(i) $M_\varepsilon \to M$ lorsque $\varepsilon \to 0$

(ii) $\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$

$u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \to M$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

(iii) $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in O \times O$ pour $\varepsilon$ suffisamment proche de $0$.

(iv) $\exists\, \bar{x} \in O$ t.q, à une sous-suite près, $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \to (\bar{x}, \bar{x})$.

**démonstration du lemme**

Il est clair tout d'abord que $M_\varepsilon \geq M$ car $\sup_{(x,y)} \geq \sup_{(x,x)}$, tandis que $M_\varepsilon \leq M_{\varepsilon'}$ pour $\varepsilon < \varepsilon'$ (en effet $-\frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2} < -\frac{|x-y|^2}{\varepsilon'^2}$). La suite $M_\varepsilon$ est donc convergente vers une limite notée $L$ telle que $L \geq M$.

On a par ailleurs

$$M_{2\varepsilon} \geq \cancel{M_\varepsilon =}\ u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon^2}$$

$$\geq u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} + \frac{3|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon^2}$$

$$\geq M_\varepsilon + \frac{3|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{4\varepsilon^2}$$

On en déduit donc que

$$\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{4}{3}(M_{2\varepsilon} - M_\varepsilon),$$

et donc immédiatement que $\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$. $M_\varepsilon$ et $u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)$ ont donc la même limite lorsque $\varepsilon \to 0$. Par ailleurs, quitte à extraire une sous suite $(x_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(y_\varepsilon)_\varepsilon$ convergent ds $\bar{O}$ et l'inégalité ci-dessus montre qu'elles ont même limite notée $\bar{x}$. Il reste donc à montrer que $\bar{x} \in O$ pour avoir (iv)

Or $M \leq L = \lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq M$

ce qui montre que $\lim_{\varepsilon \to 0} M_\varepsilon = M = \lim_{\varepsilon \to 0} u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)$, c'est-à-dire (i) et (ii).

Puisque, quitte à extraire une sous-suite, $\lim_{\varepsilon \to 0} u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) = u(\bar{x}) - v(\bar{x})$, on voit que $(\bar{x}, \bar{x})$ est un point qui réalise $M$. Puisque $M > 0$ et $u \leq v$ sur $\partial O$, on a donc forcement $\bar{x} \in O$, ce qui termine de montrer (iv).

Il reste à montrer (iii), c'est-à-dire que toute la suite $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in O \times O$ pour $\varepsilon$ suffisamment proche de $0$. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que $x_\varepsilon \notin O$ $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$. Il existe donc une suite (une sous suite) $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ avec $x_\varepsilon \in \partial O$ et $y_\varepsilon \in O$. Quitte à en extraire une nouvelle sous suite, on a donc $x_\varepsilon \to \bar{x}$, $y_\varepsilon \to \bar{x}$ avec $x_\varepsilon \in \partial O$ et $y_\varepsilon \in O$. Comme $u \leq v$ sur $\partial O$, on a donc $u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) \leq v(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)$

Or $\lim_{\varepsilon \to 0} u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) = M > 0$ tandis que $\lim_{\varepsilon \to 0} v(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon) = v(\bar{x}) - v(\bar{x}) = 0$

Ce qui donne la contradiction $0 < M \leq 0$. Nous avons donc montré (iii) ■

Reprenons la démonstration du théorème. Rappelons qu'on a supposé $M > 0$ et qu'on souhaite arriver à une contradiction.

Après avoir dédoublé les variables et introduit $M_\varepsilon$, nous allons maintenant combiner des inégalités de viscosité.

La fonction $x \to u(x) - v(y_\varepsilon) - \frac{|x - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}$ atteint donc son maximum en $x_\varepsilon \in O$ (pour $\varepsilon$ assez petit) tel que $x_\varepsilon \to \bar{x}$ (quitte à extraire une sous-suite).

La fonction $x \overset{\varphi_\varepsilon^1}{\mapsto} v(y_\varepsilon) + \frac{|x - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}$ étant régulière telle que $D\varphi_\varepsilon^1(x_\varepsilon) = \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}$ et $u$ étant une sous-solution de viscosité, on a

$$H(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), D\varphi_\varepsilon^1(x_\varepsilon)) = H\left(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) \leq 0.$$

De même, $y_\varepsilon$ est un point de maximum de la fonction

$$y \to u(x_\varepsilon) - v(y) - \frac{|x_\varepsilon - y|^2}{\varepsilon^2},$$

appartenant à $\mathcal{O}$ et tel que $y_\varepsilon \to \bar{x}$. La fonction $v$ étant une sur-solution on en déduit que

$$H\left(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) \geq 0.$$

En faisant la soustraction des deux inégalités, on obtient donc

$$H\left(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) - H\left(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) \leq 0.$$

On remarque que les premiers arguments sont différents ($x_\varepsilon$ et $y_\varepsilon$), tout comme les deuxièmes arguments ($u(x_\varepsilon)$ et $v(y_\varepsilon)$). Afin d'utiliser $(H_1)$ et $(H_2)$ on transforme cette inégalité en

$$H\left(x_\varepsilon, u(x_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) - H\left(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right)$$
$$\leq H\left(y_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right) - H\left(x_\varepsilon, v(y_\varepsilon), \frac{2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right).$$

En utilisant $(H_1)$ et $(H_2)$ on en déduit donc

$$\gamma_R \left( u(x_\varepsilon) - v(y_\varepsilon)\right) \leq \gamma_1 |x_\varepsilon - y_\varepsilon| \left(1 + \frac{2|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\varepsilon^2}\right)$$

et donc

$$\gamma_R \, M_\varepsilon \leq \gamma_1 |x_\varepsilon - y_\varepsilon| \left(1 + \frac{2|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\varepsilon^2}\right) - \gamma_R \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2}$$

En faisant tendre $\varepsilon$ vers $0$, on obtient donc

$$M \leq 0$$

ce qui est en contradiction avec $M > 0$. Ceci conclut la démonstration du théorème.

Remarque Le dédoublement de variables est un argument inévitable pour pouvoir utiliser que $u$ et $v$ sont respectivement sous- et sur-solution de viscosité.

# Un résultat de convergence des schémas numériques

On s'intéresse dans cette partie à une équation du premier ordre

$$H(x, u, D_x u) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O},$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert borné et $H$ une fonction continue sur $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ vérifiant les hypothèses (H1) et (H2) de sorte que le principe d'unicité est vérifié.

On se donne un pas de discrétisation $h$ et une grille régulière $\overline{G}$ de $\overline{\mathcal{O}}$, et un schéma numérique de la forme abstraite suivante

$$S_h(y_\ell, u_\ell^h, u^h) = 0 \quad \forall y_\ell \in G$$

où $u_\ell^h \simeq u(y_\ell)$ et $u^h$ représente une interpolée continue de $(u_\ell^h)_\ell$ sur $\overline{G}$.

L'objectif est de montrer la convergence de ce schéma vers la solution de viscosité de l'équation pourvu que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

## Hypothèse de consistance

$$\limsup_{\substack{z \to y \\ h \to 0 \\ \xi \to 0}} S_h(z, \phi(z) + \xi, \phi + \xi) \leq H(y, \phi(y), D_y \phi(y))$$

$$\liminf_{\substack{z \to y \\ h \to 0 \\ \xi \to 0}} S_h(z, \phi(z) + \xi, \phi + \xi) \geq H(y, \phi(y), D_y \phi(y))$$

pour toute fonction $\phi$ régulière de $\overline{\mathcal{O}}$ dans $\mathbb{R}$ et tout $y \in \mathcal{O}$.

## Hypothèse de monotonie

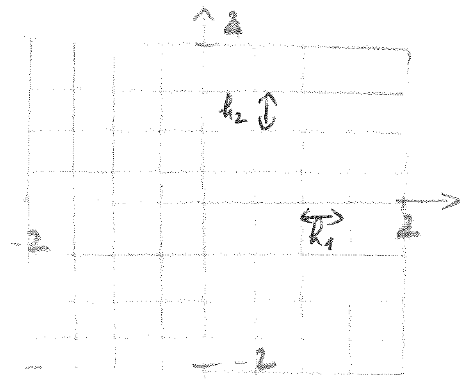
$$S_h(y, u, u_1) \leq S_h(y, u, u_2)$$

pour tout $y \in G$, $u \in \mathbb{R}$ et $u_1, u_2 : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$ régulières telles que $u_1 \geq u_2$. On dit que $S_h$ est monotone décroissant par rapport à sa troisième variable.

## Hypothèse de stabilité

L'interpolée $u^h$ est bornée indépendamment de $h$ sur $\bar{O}$.

(Pour se fixer les idées on peut par exemple considérer que $O \subset \mathbb{R}^2$, $O = ]-2,2[ \times ]-2,2[$ et que la grille est régulière, $h = (h_1, h_2)$)




Sous les hypothèses de consistance, monotonie et stabilité, l'interpolée $u^h$ converge uniformément vers $u$ lorsque $h \to 0$.

vérifier si on ne peut pas enlever toutes les limites en $\tilde{z}$ et $z$

Démontrons ce résultat.

On commence par définir les fonctions $\underline{u}$ et $\bar{u}$ par

$$\underline{u}(y) = \liminf_{\substack{z \to y \\ h \to 0}} u^h(z)$$

$$\bar{u}(y) = \limsup_{\substack{z \to y \\ h \to 0}} u^h(z)$$

en notant que $\underline{u}$ et $\bar{u}$ sont des fonctions bornées puisque $u^h$ est uniformément bornée. Il est par ailleurs clair que $\underline{u}$ est sci et $\bar{u}$ scs par définition de $\underline{u}$ et $\bar{u}$. On a enfin $\underline{u} \leq \bar{u}$.

Pour démontrer le résultat, il suffit de montrer que $\bar{u}$ est une sous-solution et $\underline{u}$ une sur-solution. En effet, le principe de viscosité de l'équation d'unicité entraîne $\bar{u} \leq u \leq \underline{u}$ et par suite $u = \bar{u} = \underline{u}$.

⚠ à la CI

OK si on peut enlever la limite en $z$ de la déf de $u$ et $\bar{u}$

On montrera seulement que $\bar{u}$ est une sous-solution, le fait que $\underline{u}$ soit sur-solution se faisant de manière analogue.

Soit $\varphi \in C^1(G)$ et soit $x_0$ un point de maximum strict de $\bar{u} - \varphi$.
Quitte à ajouter $\bar{u}(x_0) - \varphi(x_0)$ à $\varphi$, on peut toujours supposer que

$$\bar{u}(x_0) = \varphi(x_0) \quad \text{et} \quad \bar{u}(y) < \varphi(y) \quad \forall y \neq x_0$$

Quitte à ajouter à $\varphi$ une fonction positive, qui s'annule en $x_0$ et qui est suffisamment grande en dehors de la boule de $\mathbb{R}^N$ centrée en $0$ et de rayon $1$, on peut aussi supposer que

$$\varphi(y) \geq \|\bar{u}\|_{L^\infty(\bar{G})} + 1 \quad \forall y \in B(x_0, 1)^c$$

(on sq $B(x_0,1) \subset G$ quitte à diminuer la taille de la boule)

Par définition de $\bar{u}$ et par continuité de $\varphi$, on a

$$0 = \bar{u}(x_0) - \varphi(x_0) = \limsup_{\substack{z \to x_0 \\ h \to 0}} \left(u^h(z) - \varphi(z)\right).$$

De plus, en dehors de la boule $B(x_0, 1)$, on a

$$\bar{u}(y) - \varphi(y) \leq -1.$$

Il en résulte donc l'existence de $r \in (0,1)$ t.q

$$-1 < \bar{u}(y) - \varphi(y) \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in B(x_0, r) \subset B(x_0, 1).$$

$$\text{ie} \quad -1 < \limsup_{\substack{z \to y \\ h \to 0}} u^h(z) - \varphi(y) \leq 0 \quad \forall y \in B(x_0, r)$$

$$\text{ie} \quad -1 < u^h(y) - \varphi(y) \leq 0 \quad \forall y \in B(x_0, r) \quad \text{pour } h \text{ suffisamment petit.}$$

Puisqu'en dehors de $B(x_0, 1)$ on a $\bar{u}(y) - \varphi(y) \leq -1$

$$\text{ie} \quad \limsup_{\substack{z \to y \\ h \to 0}} u^h(z) - \varphi(y) \leq -1$$

$$\text{et donc} \quad u^h(y) - \varphi(y) \leq -1,$$

la fonction $u^h - \varphi$ atteint son maximum global ds la boule $B(x_0, 1)$ pour tout $h$ suffisamment petit. Notons $y_h$ ce point de maximum et $\bar{y}$ la limite d'une sous-suite encore notée $y_h$ ($y_h$ et $\bar{y}$ sont dans $B(x_0, 1)$)

Par définition de $y_h$ et $x_0$ on a

$$\limsup_{h\to 0} u^h(y_h) - \varphi(y_h) \geq \limsup_{\substack{h\to 0\\ y\to x_0}} u^h(y) - \varphi(y) = \bar{u}(x_0) - \varphi(x_0) = 0$$

Par ailleurs, $\bar{u}$ étant scs en $\bar{y}$ et $(y_h \to \bar{y}, h\to 0)$ représentant un chemin particulier pour aller vers $(\bar{y}, 0)$, on a

$$0 \geq \bar{u}(\bar{y}) - \varphi(\bar{y}) \geq \limsup_{\substack{h\to 0\\ y\to \bar{y}}} u^h(y) - \varphi(\bar{y}) \geq \limsup_{h\to 0} u^h(y_h) - \varphi(y_h).$$

On en déduit donc que $\bar{y} = x_0$.

Jusqu'à maintenant, nous avons donc montré l'existence d'une suite $y_h \to x_0$ telle que $y_h$ est le maximum global de $u^h - \varphi$ et

$$\limsup_{h\to 0} u^h(y_h) = \bar{u}(x_0)$$

Posons alors $\xi_h = u^h(y_h) - \varphi(y_h)$. Il est ainsi clair que

$$u^h(y_h) = \varphi(y_h) + \xi_h \quad \text{et} \quad u^h(y) \leq \varphi(y) + \xi_h .$$

Par définition de $u^h$ et par monotonie de $S_h$, on a

$$S_h(y_h, \varphi(y_h) + \xi_h, \varphi + \xi_h) = S_h(y_h, u^h(y_h), \varphi + \xi_h) \leq S_h(y_h, u^h(y_h), u^h) = 0.$$

En passant à la limite dans cette équation et en utilisant la consistance de $S_h$, on obtient finalement

$$H(x_0, \varphi(x_0), D\varphi(x_0)) \leq \liminf_{\substack{h\to 0\\ y\to x_0\\ \xi\to 0}} S_h(y, \varphi(y) + \xi, \varphi + \xi) \leq \liminf_{h\to 0} S_h(y_h, \varphi(y_h) + \xi_h, \varphi + \xi_h) \leq 0.$$

Ce qui prouve bien que $\bar{u}$ est une sous-solution. Ceci conclut la démonstration.

# Méthodes Semi-lagrangiennes pour les équations de HJ

L'objectif de ces quelques pages est de décrire progressivement les méthodes semi-lagrangiennes pour des équations de type HJ. On considérera tout d'abord le cas d'une équation de transport à vitesse constante 1D. Le cas plus "général" de l'évolution d'une interface dans la direction de sa normale sera ensuite considéré. Enfin, un cas plus général d'Hamiltonien sera abordé.

I) On considère tout d'abord l'équation de transport 1D à vitesse constante $c$ suivante $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$, avec $c > 0$. Il s'agit d'une forme très simple d'équation de HJ.

Une méthode de volumes finis habituelle pour discrétiser cette équation est donnée par le schéma upwind

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Ce schéma peut être vu également comme l'utilisation de formules aux différences finies décentrées pour discrétiser les termes $\partial_t u$ et $c\,\partial_x u$ sous leur forme initialement donnée par l'équation considérée.

Il est toutefois possible d'exprimer $c\,\partial_x u$ sous une forme différente, conduisant à une discrétisation semi-lagrangienne de l'équation :

$$\begin{aligned} c\,\partial_x u(x,t) &= \frac{d}{d\delta}\, u(x+c\delta, t)\,(0) \\ &= \lim_{\delta\to 0} \frac{u(x-c\delta, t) - u(x,t)}{-\delta} \\ &= \lim_{\delta\to 0} \frac{u(y(-\delta), t) - u(y(0), t)}{-\delta} \end{aligned}$$

avec $y$ défini par

$$\begin{cases} y'(\delta) = c \\ y(0) = x \end{cases}$$

. Cette équation est celle de la caractéristique issue de $x$.

Rappelons que la solution de l'équation $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$ est constante le long des caractéristiques puisque

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta}\big(u(y(\delta), \delta)\big) &= y'(\delta)\,\partial_x u(y(\delta),\delta) + \partial_t u(y(\delta),\delta) \\ &= c\,\partial_x u(y(\delta),\delta) + \partial_t u(y(\delta),\delta) = 0\,. \end{aligned}$$

Il est donc naturel de chercher à remonter les caractéristiques pour obtenir des informations et pour discrétiser le terme $c\partial_x u$.

$\Delta t$ étant donné, on propose la discrétisation suivante de l'équation $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u(y(-\Delta t), t^n) - u(y(0), t^n)}{-\Delta t} = 0$$

ie $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u^n(x_j - c\Delta t) - u_j^n}{-\Delta t} = 0.$$ On parle de discrétisation semi-lagrangienne de l'équation.

Quelques remarques s'imposent :

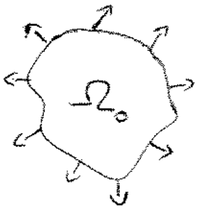
1. Il n'y a pas <u>pour l'instant</u> de $\Delta x$ dans l'équation discrétisée.
2. $x_j - c\Delta t$ ne coïncide pas forcément avec un point du maillage $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. Il faut donc interpoler $u^n(x_j - c\Delta t)$ en fonction des valeurs de $u^n$ sur les points du maillage voisins de $x_j - c\Delta t$. On notera $I[u^n](x_j - c\Delta t)$ l'interpolée de $u^n$ au point $x_j - c\Delta t$ sur le maillage considéré. La discrétisation semi-lagrangienne de l'équation s'écrit donc dans le cas général :
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{I[u^n](x_j - c\Delta t) - u_j^n}{-\Delta t} = 0,$$
c'est-à-dire $u_j^{n+1} = I[u^n](x_j - c\Delta t)$.
3. Si "par hasard" $c\Delta t = k\Delta x$ pour $k \geq 1$, alors la discrétisation semi-lagrangienne de l'équation s'écrit naturellement
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j-k}^n - u_j^n}{-\Delta t} = 0.$$
ie $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{k}\,\frac{u_j^n - u_{j-k}^n}{\Delta x} = 0.$$

→ On retrouve le schéma upwind pour $k = 1$

→ Plus généralement, le schéma s'écrit aussi
$$u_j^{n+1} = \left(1 - \frac{c}{k}\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n + \frac{c}{k}\frac{\Delta t}{\Delta x}\, u_{j-k}^n$$
ie $u_j^{n+1} = u_{j-k}^n$.

→ Il est important de remarquer que le schéma est exact ds ce cas.

II) On considère maintenant l'évolution d'une interface à la vitesse $c(x) \geq 0$ et le long de sa normale. Ce problème s'écrit typiquement



$$\begin{cases} y'(s) = c(y(s))\, \vec{n}_{y(s)} \\ y(0) = x \end{cases} \qquad \forall x \in \partial\Omega_0$$

On va considérer ce problème par le biais d'une fonction level-set $u$ qui sera par définition telle que
$u<0$ pour $x \in \mathring{\Omega}_t$ $\quad (u = u(x,t))$
$u=0$ pour $x \in \partial\Omega_t$
$u>0$ sinon

On a alors $\vec{\eta}_{y(t)} = \dfrac{\nabla_x u(x,t)}{\|\nabla_x u(x,t)\|}$

Puisque $u(y(t),t) = 0$ il vient

$$\partial_t u + y'(t) \cdot \nabla_x u(y(t),t) = 0$$

ie $\partial_t u + c(y(t))\, \vec{\eta}_{y(t)} \cdot \nabla_x u(y(t),t) = 0$

ie $\partial_t u(y(t),t) + c(y(t))\, \|\nabla_x u(y(t),t)\| = 0$.

On propose de résoudre cette équation sur tout $\mathbb{R}^n$, ie on est amené à considérer l'équation

$$\partial_t u(x,t) + c(x)\, \|\nabla_x u(x,t)\| = 0$$

(qui a priori n'est vraie que pour l'ensemble des points $(y(t),t)$ ie ceux qui seront touchés par le front à un instant $t$ quelconque on a donc fait d'une certaine manière un "choix" de modélisation)

<u>Remarque</u> : en considérant la fonction level-set, un degré de liberté a été ajouté au problème : il était posé ds $\mathbb{R}^n$, il l'est maintenant ds $\mathbb{R}^{n+1} = $ "$\mathbb{R}^n + u(x,t)$". Cette dimension supplémentaire peut s'avérer coûteuse.

La question est maintenant de savoir s'il est possible de procéder de la même manière que ds I), l'équation $\partial_t u + c\,\partial_x u = 0$ étant remplacée maintenant par

$$\partial_t u + c(x) \|\nabla_x u\| = 0.$$

L'idée est toujours de faire apparaître la caractéristique

$$\begin{cases} y'(s) = c(y(s))\, \vec{\eta}_{y(s)} \\ y(0) = x \end{cases} \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad \begin{cases} y'(s) = c(y(s)) \dfrac{\nabla_x u}{\|\nabla_x u\|}(y(s), t) \\ y(0) = x. \end{cases}$$

On écrit alors simplement

$$\partial_t u + c(x)\, \|\nabla_x u\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_t u + \frac{c(x)\, \nabla_x u}{\|\nabla_x u\|} \cdot \nabla_x u = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_t u + \frac{d}{ds} u(y(s), t)\, (0) = 0 .$$

qui conduit à la discrétisation naturelle suivante

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u(y_j(-\Delta t), t^n) - u(y_j(0), t^n)}{-\Delta t} = 0$$

ie $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u^n(y_j(-\Delta t)) - u_j^n}{-\Delta t} = 0$$

ou encore $u_j^{n+1} = u^n(y_j(-\Delta t))$.

Par rapport à la partie I), la différence principale ici est que la valeur $y_j(-\Delta t)$ n'est plus connue a priori ici (elle valait simplement $x_j - c\Delta t$ ds I)). Une possibilité pour obtenir une valeur approchée de $y_j(-\Delta t)$ est d'utiliser un schéma ODE.

Attention néanmoins, on remarque que le membre de droite de l'équation caractéristique $\begin{cases} y_j'(s) = c(y_j(s)) \dfrac{\nabla_x u}{\|\nabla_x u\|}(y_j(s), t) \\ y_j(0) = x_j \end{cases}$

dépend ici de $u$ (contrairement à la section I) qui est inconnue !!

Pour s'affranchir de cette nouvelle difficulté, on procède ainsi : on écrit que

$$\partial_t u + \frac{c(x)\, \nabla_x u}{\|\nabla_x u\|} \cdot \nabla_x u = 0 \Leftrightarrow \partial_t u + \max_{a/ \|a\| \le 1} \left(\nabla_x u \cdot c(x)\, a\right) = 0$$

car $|\nabla_x u \cdot c(x)\, a| \le c(x)\, \|\nabla_x u\|\, \|a\| \le c(x)\, \|\nabla_x u\|$ et cette borne est atteinte pour $a = \dfrac{\nabla_x u}{\|\nabla_x u\|}$.

On $\quad \partial_t u + \max_{\|a\| \leq 1} \left( \nabla_x u \cdot c(x)\, a \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_t u + \max_{\|a\| \leq 1} \left( \frac{d}{d\delta} u(y_a(\delta), t)\, (0) \right) = 0$$

avec la nouvelle caractéristique définie par

$$\begin{cases} y_a'(\delta) = c(y_a(\delta))\, a \\ y_a(0) = x \end{cases}$$

On est donc amené à considérer la discrétisation

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \max_{\|a\| \leq 1} \frac{u^n(y_a(-\Delta t)) - u_j^n}{-\Delta t} = 0$$

i.e. $\quad u_j^{n+1} = -\max_{\|a\| \leq 1} -u^n(y_a(-\Delta t)) = \min_{\|a\| \leq 1} u^n(y_a(-\Delta t))$

Remarque : on peut aussi écrire $\quad \partial_t u + \max_{\|a\| \leq 1} (\nabla_x u \cdot c(x)\, a) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_t u = -\max_{\|a\| \leq 1} (\nabla_x u \cdot c(x) a) = \min_{\|a\| \leq 1} (\nabla_x u \cdot c(x)\, a)$$

$$= \min_{\|a\| \leq 1} \frac{d}{d\delta} (u(y_a(\delta), t))(0)$$

pour arriver à la discrétisation suivante

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \min_{\|a\| \leq 1} \frac{u^n(y_a(-\Delta t)) - u_j^n}{-\Delta t}$$

i.e. $\quad u_j^{n+1} = \min_{\|a\| \leq 1} u^n(y_a(-\Delta t))$.

Le schéma consiste donc à

- utiliser un schéma ODE pour trouver une valeur approchée $\tilde{y}_a(-\Delta t)$ de $y_a(-\Delta t)$. On remarque que le membre de droite de l'équat° caractéristique satisfaite par $y_a$ ne dépend plus de l'inconnue, mais de $a$ qui est un paramètre.
- choisir une interpolation de $u^n(\tilde{y}_a(-\Delta t))$ en fonction des valeurs de $u^n$ sur les pts du maillage voisins de $\tilde{y}_a(-\Delta t)$.
- prendre le maximum (ou le minimum) en $a$.

Le schéma s'écrit alors $\quad u_j^{n+1} = \min_{\|a\| \leq 1} I[u^n](\tilde{y}_a(-\Delta t))$

Exemple

On se place en 1D, l'équation est donc $\partial_t u + c(x)\,|\partial_x u(x,t)| = 0$.
Pour approcher $y_a(-\Delta t)$, on choisit un schéma Euler explicite, ie

$$y_a(-\Delta t) \simeq \tilde{y}_a(-\Delta t) = x_j - c(x_j)\,a\,\Delta t$$

On choisit $\Delta t$ suffisamment petit pour que $x_j - c(x_j)a\Delta t$ appartienne à l'intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ si $a > 0$ et $[x_j, x_{j+1}]$ si $a < 0$.

On choisit comme formule d'interpolation

$$I[u^n](x) = u_j^n + \frac{x - x_j}{-\Delta x}\left(u_{j-1}^n - u_j^n\right) \quad \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j]$$

et
$$I[u^n](x) = u_j^n + \frac{x - x_j}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) \quad \text{si } x \in (x_j, x_{j+1}].$$
$$= u_{j+1}^n + \frac{x - x_{j+1}}{-\Delta x}\left(u_j^n - u_{j+1}^n\right)$$

Le schéma $u_j^{n+1} = \min\limits_{\|a\|\le 1} I[u^n](\tilde{y}_a(-\Delta t))$ s'écrit alors

$$u_j^{n+1} = \min\left(\min_{0\le a\le 1} u_j^n + \frac{-c(x_j)a\Delta t}{-\Delta x}\left(u_{j-1}^n - u_j^n\right), \min_{-1\le a\le 0} u_j^n + \frac{-c(x_j)a\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right)\right)$$

i $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \min\left(\min_{0\le a\le 1} -c(x_j)a\,\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x}, \min_{-1\le a\le 0} -c(x_j)a\,\frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x}\right)$$

ie $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \min\left(-c(x_j)\max\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, 0\right), c(x_j)\min\left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, 0\right)\right)$$

ie $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \max\left(c(x_j)\max\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, 0\right), -c(x_j)\min\left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, 0\right)\right) = 0$$

ie $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c(x_j)\max\left(\max\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, 0\right), \max\left(\frac{u_j^n - u_{j+1}^n}{\Delta x}, 0\right)\right) = 0$$

ie $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} + c(x_j)\max\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_j^n - u_{j+1}^n}{\Delta x}, 0\right) = 0.$$

On retrouve un schéma déjà vu dans les chapitres "Différences finies" et "Fast-Marching".

Remarque

Nous aurions également pu écrire l'équation sous la forme

$$\partial_t u + \max_{\|a\|=1} (\nabla_x u . c(x) a) = 0$$

puisque le max est atteint pour une valeur de $a$ t.q $\|a\| = 1$.

Le schéma s'écrit alors

$$u_j^{n+1} = \min_{\|a\|=1} I[u^n](\tilde{y}_a(-\Delta t))$$

Dans le contexte de l'exemple ci-dessus, on obtient alors

$$u_j^{n+1} = \min\left( u_j^n - \frac{c(x_j)\Delta t}{-\Delta x}(u_{j-1}^n - u_j^n),\ u_j^n + c(x_j)\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n)\right)$$

ie

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \min\left( c(x_j)\frac{u_{j-1}^n - u_j^n}{\Delta x},\ c(x_j)\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}\right)$$

ie

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c(x_j)\max\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x},\ \frac{u_j^n - u_{j+1}^n}{\Delta x}\right) = 0.$$

On retrouve un autre schéma déjà vu ds le chapitre Différences Finies.

## III) Méthodes SL et PPD.

On rappelle que le PPD permettant de caractériser la fonction level set $u$ solution de l'équation Eikonale

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \|\nabla_x u(x,t)\| C(x) = 0 & \forall x \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

s'écrit

$$u(x,t) = \min_{\|a\| \le 1} u(y_{tx}^a(t-s), t-s) \quad \forall s \in [0,t[$$

où les trajectoires $y_{tx}^a$ sont telles que

$$\begin{cases} y_{tx}^{a\,\prime}(s) = C(y_{tx}^a(s))\, a(s) & 0 < s < t \\ y_{tx}^a(t) = x. \end{cases}$$

On remarque donc que le schéma obtenu dans la section précédente et qui s'écrit

$$u_j^{n+1} = \min_{\|a\| \le 1} I[u^n](\tilde{y}_a(-\Delta t)) \quad \text{(avec les notations de la section précédente)}$$

$$= \min_{\|a\| \le 1} I[u^n](\tilde{y}_{tx_j}^a(0)) \quad \text{(avec les notations de la section présente)}$$

n'est rien d'autre qu'une discrétisation du principe de programmation dynamique de Bellmann.

Mise en oeuvre pratique

En pratique, le vecteur $a$ est une constante et un exemple simple pour définir $\tilde{y}^a_{tx}(0)$ est donné par le schéma d'Euler explicite :

$$\tilde{y}^a_{tx}(0) \simeq x_j - \Delta t\, c(x_j)\, a$$

Dans ce cas le schéma se réécrit :

$$u_j^{n+1} = \min_{\|a\| \leq 1} I[u^n]\left(x_j - \Delta t\, c(x_j)\, a\right).$$

Concernant maintenant le choix d'une interpolation, notons $\lambda^a_{jl}$ pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ les coordonnées barycentriques du point $x_j - \Delta t\, c(x_j)\, a$ telles que

$$x_j - \Delta t\, c(x_j)\, a = \sum_l \lambda^a_{jl}\, x_l$$

$$\sum \lambda^a_{jl} = 1 \;, \quad \lambda^a_{jl} \geq 0 .$$

Notons que ces coefficients barycentriques existent et sont uniques pour un choix de $(d+1)$ points $x_l$ formant un repère barycentrique du point $x_j - \Delta t\, c(x_j)\, a$.

Le choix d'une interpolation affine par morceaux (affine sur chaque maille) conduit alors à poser

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \min_{\|a\| \leq 1} \sum_l \lambda^a_{jl}\, u_l^n \\ u_j^0 = u_0(x_j). \end{cases}$$

# Schémas aux différences finies ou schémas hyperboliques pour la propagation de fronts

C. Chalons

# Plan du cours

# Plan du cours

## Solution de viscosité d'une équation de Hamilton-Jacobi

On considère l'équation de Hamilton-Jacobi suivante

$$\mathcal{F}(y, u(y), \nabla u(y)) = 0, \quad \forall y \in \Omega \tag{1}$$

où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ et $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

**Exemple : équation Eikonale**

On cherche une fonction $u = u(X, t)$ telle que

$$\partial_t u + ||\nabla_X u|| = 0.$$

Ici $y = (X, t)$ et

$$\nabla u = (\nabla_X u, \partial_t u)^t.$$

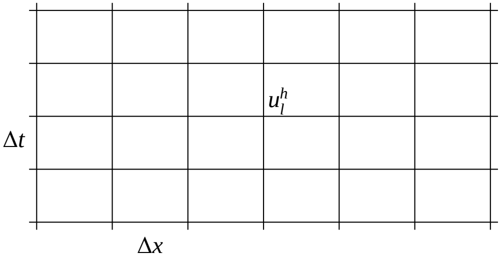
L'objectif est maintenant d'énoncer une théorème général de convergence d'une solution approchée d'un schéma numérique vers la solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi (1).

Nous verrons que les hypothèses seront principalement liées à la **monotonie**, la **stabilité** et la **consistance** de l'approximation proposée.

# Notations

$\longrightarrow$ Soit $\mathcal{G}$ un maillage régulier de $\Omega$ et $h$ le pas de discrétisation.

*Un exemple de maillage pour* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ : $h = (\Delta x, \Delta t)$




On notera $u_l^h$ l'approximation de la solution en un point courant $y_l$ du maillage

$\longrightarrow$ Soit le schéma numérique abstrait défini par les équations

$$S_h(y_l, u_l^h, u^h) = 0, \quad \forall y_l \in \mathcal{G}, \tag{2}$$

où $u_l^h \approx u(y_l)$ et $u^h$ est l'interpolée de $(u_l^h)_l$ sur la grille $\mathcal{G}$
(*i.e.* la fonction qui vaut $u_l^h$ en $y_l$)

# Définitions

Soit $S_h : \Omega \times \mathbb{R} \times C^1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'opérateur associé au schéma numérique (2). On suppose que $S_h$ est régulier.
On introduit les définitions suivantes.

## Définitions : monotonie, stabilité et consistance

On dit que le schéma numérique (2) est

- **monotone** si et seulement si

$$S_h(y, u, \varphi_1) \leq S_h(y, u, \varphi_2) \quad \forall\, \varphi_1 \geq \varphi_2 \quad (i.e.\ \varphi_1(y) \geq \varphi_2(y)\ \forall y \in \Omega)$$

- **stable** si et seulement si $u^h = (u^h_l)_l$ définie par (2) est bornée indépendamment de $h$
- **consistant** si et seulement si l'égalité suivante est satisfaite pour toute fonction $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\lim_{h \to 0} S_h(y, \varphi(y), \varphi) = \mathcal{F}(y, \varphi(y), \nabla\varphi(y))$$

## Théorème général de convergence

Le résultat général de convergence s'énonce alors comme suit.
(voir le polycopié pour la démonstration)

**Théorème**

On suppose que le principe d'unicité forte est vérifié et que le schéma numérique (2) est **monotone**, **stable** et **consistant**.
Alors, l'interpolée $u^h$ converge uniformément vers l'unique solution de viscosité $u$ de (1) lorsque $h \to 0$ (*i.e.* $u_l^h \to u(y_l)$ uniformément en $l$ lorsque $h$ tend vers 0)

# Plan du cours

# UN PREMIER EXEMPLE DE SCHÉMA CONVERGENT

⟶ On s'intéresse à la discrétisation de l'équation Eikonale 1$D$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \mid \partial_x u(x,t) \mid = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

⟶ En reprenant les notations utilisées précédemment, on a ici

$$y = (x,t), \quad \mathcal{F}(y, u(y), \nabla u(y)) = \partial_t u(y) + \mid \partial_x u(y) \mid$$

⟶ Le pas du maillage sera noté $h = (\Delta x, \Delta t)$, et un point du maillage sera noté $(x_j, t^n)$ avec $x_j = j\Delta x$, $t^n = n\Delta t$, et

$$u_j^n \approx u(y_j^n) = u(x_j, t^n).$$

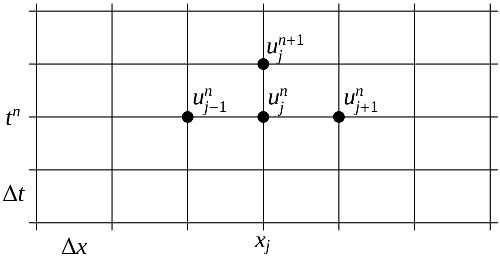
# UN PREMIER EXEMPLE DE SCHÉMA CONVERGENT

$\longrightarrow$ On s'intéresse à la discrétisation de l'équation Eikonale $1D$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \mid \partial_x u(x,t) \mid = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

à l'aide du schéma aux différences finies défini par

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \max\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, -\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}\right) = 0, \ \forall j, \ \forall n.$$



## UN PREMIER EXEMPLE DE SCHÉMA CONVERGENT

$\longrightarrow$ On définit l'opérateur $S_h$ en considérant le point courant $y_j^{n+1} = (x_j, t^{n+1})$ :

$$S_h(y_j^{n+1}, u_j^{n+1}, u^h) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \max\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, -\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}\right) = 0, \ \forall j, \ \forall n.$$

$\longrightarrow$ On a alors

$$S_h(y_j^{n+1}, u_j^{n+1}, u^h) = \frac{u_j^{n+1} - u^h(y_j^n)}{\Delta t} + \max\left(\frac{u^h(y_j^n) - u^h(y_{j-1}^n)}{\Delta x}, -\frac{u^h(y_{j+1}^n) - u^h(y_j^n)}{\Delta x}\right)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} S_h(y = (x,t), u, \varphi) &= \frac{u - \varphi(x, t - \Delta t)}{\Delta t} + \\ &\max\left(\frac{\varphi(x, t - \Delta t) - \varphi(x - \Delta x, t - \Delta t)}{\Delta x}, -\frac{\varphi(x + \Delta x, t - \Delta t) - \varphi(x, t - \Delta t)}{\Delta x}\right). \end{aligned}$$

# Consistance du schéma

Pour la consistance, on s'intéresse à la limite lorsque $h$ tend vers 0 de

$$S_h(y=(x,t),\varphi(y),\varphi) = \frac{\varphi(x,t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta t} +$$

$$\max\left(\frac{\varphi(x,t-\Delta t)-\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t)}{\Delta x}, -\frac{\varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta x}\right).$$

On a donc, puisque $h=(\Delta x,\Delta t)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} S_h(y=(x,t),\varphi(y),\varphi) &= \partial_t\varphi(x,t)+\max(\partial_x\varphi(x,t),-\partial_x\varphi(x,t)) \\
&= \partial_t\varphi(x,t)+\mid\partial_x\varphi(x,t)\mid \\
&= \mathcal{F}(y,\varphi(y),\nabla\varphi(y)).
\end{aligned}$$

**Le schéma est donc consistant.**

# REFORMULATION DE L'OPÉRATEUR $S_h$

Les propriétés de **monotonie** et de **stabilité** du schéma proposé s'obtiendront facilement à partir de la réécriture équivalente suivante de l'opérateur $S_h$.

$$S_h(y=(x,t),u,\varphi) = \frac{u-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta t} +$$

$$\max\Big(\frac{\varphi(x,t-\Delta t)-\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t)}{\Delta x}, -\frac{\varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta x}\Big)$$

$$= \frac{u-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta t} + \frac{\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta x} - \min\Big(\frac{\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t)}{\Delta x}, \frac{\varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)}{\Delta x}\Big)$$

$$= \frac{u-\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(.,t-\Delta t))}{\Delta t}$$

avec

$$\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(.,t-\Delta t)) = (1-\lambda)\varphi(x,t-\Delta t) + \lambda \min\left(\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t), \varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)\right)$$

et $\lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

# MONOTONIE DU SCHÉMA

On a

$$S_h(y = (x,t), u, \varphi) \quad = \frac{u - \mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}(\varphi(.,t-\Delta t))}{\Delta t}$$

avec $\lambda = \Delta t / \Delta x$ et

$$\mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}(\varphi(.,t-\Delta t)) = (1-\lambda)\varphi(x,t-\Delta t) + \lambda \min\left(\varphi(x-\Delta x, t-\Delta t), \varphi(x+\Delta x, t-\Delta t)\right).$$

La propriété de monotonie

$$S_h(y,u,\varphi_1) \leq S_h(y,u,\varphi_2) \quad \forall\, \varphi_1 \geq \varphi_2 \quad (i.e.\ \varphi_1(y) \geq \varphi_2(y)\ \forall y \in \Omega)$$

du schéma est donc vérifiée si et seulement si l'opérateur $\mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}$ est *monotone croissant*.

**Le schéma est donc monotone sous la condition CFL $0 \leq \lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.**

## Stabilité du schéma

En reprenant les calculs précédents, le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \max(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, -\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}) = 0$$

s'écrit aussi

$$u_j^{n+1} = (1-\lambda)u_j^n + \lambda \min\left(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n\right).$$

Sous la condition CFL $0 \leq \lambda \leq 1$, il est clair que

$$\min_k u_k^n \leq u_j^{n+1} \leq \max_k u_k^n, \quad \forall j.$$

Par récurrence, on obtient alors

$$\min_k u_k^0 \leq u_j^n \leq \max_j u_k^0, \quad \forall j, n.$$

Si la donnée initiale $u_0$ est bornée ($m \leq u_0(x) \leq M \ \forall x$), la suite $(u_j^n)$ l'est donc aussi :

$$m \leq \min_k u_k^0 \leq u_j^n \leq \max_j u_k^0 \leq M, \quad \forall j, n.$$

**Le schéma est donc stable sous la condition CFL $0 \leq \lambda \leq 1$ pourvu que la donnée initiale $u_0$ soit bornée.**

# Plan du cours

## Schémas aux différences finies

On s'intéresse à la discrétisation de l'équation de type Eikonale 1$D$ suivante

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + G(x, \partial_x u(x,t)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

avec par exemple $G(x, \partial_x u(x,t)) = F(x) \mid \partial_x u(x,t) \mid$ (équation habituelle).

$\longrightarrow$ En reprenant les notations utilisées précédemment, on a ici

$$y = (x,t), \quad \mathcal{F}(y, u(y), \nabla u(y)) = \partial_t u(y) + G(x, \partial_x u(y))$$

$\longrightarrow$ Le pas du maillage sera noté $h = (\Delta x, \Delta t)$, et un point du maillage sera noté $(x_j, t^n)$ avec $x_j = j\Delta x$, $t^n = n\Delta t$, et

$$u_j^n \approx u(y_j^n) = u(x_j, t^n).$$

On se propose d'utiliser un **schéma aux différences finies** de la forme suivante :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + g(x_j, \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}) = 0, \quad \forall\, n, \ \forall\, j,$$

# Lien avec les schémas hyperboliques

On remarque tout d'abord que la fonction $v(x,t) = \partial_x u(x,t)$ est solution de l'équation

$$\partial_t v(x,t) + \partial_x G(x, v(x,t)) = 0. \tag{5}$$

Il s'agit d'une **équation hyperbolique**, appelée aussi **loi de conservation scalaire**.

Un schéma donné par la méthode des volumes finis pour cette équation s'écrit alors

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0, \quad n \geq 0, j \in \mathbb{Z},$$

où $g_{j+1/2}^n := g(x_j, v_j^n, v_{j+1}^n)$ représente une approximation du flux G sur l'interface $x_j$ et entre les instants $t^n$ et $t^{n+1}$. La quantité $v_j^n \simeq \dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$ représente alors une approximation de la solution sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_j[$.

On peut montrer que sous certaines hypothèses , les fonctions $g$ utilisées pour approcher l'équation (5) conviennent également pour l'approximation de l'équation de Hamilton-Jacobi (4).

# Expression de l'opérateur $S_h$

$\longrightarrow$ On s'est proposé d'utiliser un **schéma aux différences finies** de la forme

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + g(x_j, \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}) = 0, \quad n \geq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

$\longrightarrow$ On définit l'opérateur $S_h$ en considérant le point courant $y_j^{n+1} = (x_j, t^{n+1})$ :

$$S_h(y_j^{n+1}, u_j^{n+1}, u^h) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + g(x_j, \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x})$$

$\longrightarrow$ On a alors

$$S_h(y_j^{n+1}, u_j^{n+1}, u^h) = \frac{u_j^{n+1} - u^h(y_j^n)}{\Delta t} + g(x_j, \frac{u^h(y_j^n) - u^h(y_{j-1}^n)}{\Delta x}, \frac{u^h(y_{j+1}^n) - u^h(y_j^n)}{\Delta x})$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} S_h(y = (x,t), u, \varphi) &= \frac{u - \varphi(x, t - \Delta t)}{\Delta t} + \\ & g(x, \frac{\varphi(x, t-\Delta t) - \varphi(x - \Delta x, t - \Delta t)}{\Delta x}, \frac{\varphi(x + \Delta x, t - \Delta t) - \varphi(x, t - \Delta t)}{\Delta x}). \end{aligned}$$

## Consistance du schéma

L'opérateur $S_h$ est défini par

$$\begin{aligned} S_h(y=(x,t),u,\varphi) &= \frac{u-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta t} + \\ & g(x, \frac{\varphi(x,t-\Delta t)-\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t)}{\Delta x}, \frac{\varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta x}). \end{aligned}$$

Pour la consistance, on s'intéresse à la limite lorsque $h$ tend vers 0 de

$$\begin{aligned} S_h(y=(x,t),\varphi(y),\varphi) &= \frac{\varphi(x,t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta t} + \\ & g(x, \frac{\varphi(x,t-\Delta t)-\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t)}{\Delta x}, \frac{\varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta x}). \end{aligned}$$

On a donc, puisque $h=(\Delta x,\Delta t)$,

$$\lim_{h\to 0} S_h(y,\varphi(y),\varphi) = \partial_t\varphi(x,t)+g(x,\partial_x\varphi(x,t),\partial_x\varphi(x,t)).$$

**Le schéma est donc consistant si et seulement si $g(x,v,v)=G(x,v)\ \forall\, x,v \in \mathbb{R}$.**

# REFORMULATION DE L'OPÉRATEUR $S_h$

Les propriétés de **monotonie** et de **stabilité** du schéma proposé s'obtiendront facilement à partir de la réécriture équivalente suivante de l'opérateur $S_h$.

$$S_h(y = (x,t), u, \varphi) = \frac{u - \varphi(x, t - \Delta t)}{\Delta t} +$$

$$g(x, \frac{\varphi(x, t-\Delta t) - \varphi(x - \Delta x, t - \Delta t)}{\Delta x}, \frac{\varphi(x + \Delta x, t - \Delta t) - \varphi(x, t - \Delta t)}{\Delta x})$$

$$= \frac{u - \mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}(\varphi(., t - \Delta t))}{\Delta t}$$

avec

$$\mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}(\varphi(., t - \Delta t)) =$$

$$\varphi(x, t - \Delta t) - \Delta t \; g(x, \frac{\varphi(x, t-\Delta t) - \varphi(x - \Delta x, t - \Delta t)}{\Delta x}, \frac{\varphi(x + \Delta x, t - \Delta t) - \varphi(x, t - \Delta t)}{\Delta x}).$$

## Monotonie du schéma

On a

$$S_h(y = (x,t), u, \varphi) \quad = \frac{u - \mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}(\varphi(.,t-\Delta t))}{\Delta t}$$

avec

$$\mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}(\varphi(.,t-\Delta t)) =$$

$$\varphi(x,t-\Delta t) - \Delta t \; g(x, \frac{\varphi(x,t-\Delta t) - \varphi(x-\Delta x, t-\Delta t)}{\Delta x}, \frac{\varphi(x+\Delta x, t-\Delta t) - \varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta x}).$$

La propriété de monotonie

$$S_h(y,u,\varphi_1) \leq S_h(y,u,\varphi_2) \quad \forall \, \varphi_1 \geq \varphi_2 \quad (i.e. \; \varphi_1(y) \geq \varphi_2(y) \; \forall y \in \Omega)$$

du schéma est donc vérifiée si et seulement si l'opérateur $\mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}$ est *monotone croissant*.

## Monotonie du schéma

On remarque par ailleurs que l'expression de l'opérateur

$$\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(.,t-\Delta t)) =$$

$$\varphi(x,t-\Delta t) - \Delta t \;\, g(x, \frac{\varphi(x,t-\Delta t)-\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t)}{\Delta x}, \frac{\varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta x}).$$

ne dépend que de $\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t)$, $\varphi(x,t-\Delta t)$ et $\varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)$.

Il est clair que l'opérateur $\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}$ est *monotone croissant* **si et seulement si** il l'est vis à vis de chacune de ces quantités (les autres étant fixées).

On remarque tout de suite que l'opérateur $\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}$ est *monotone croissant* vis à vis de $\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t)$ si et seulement si $g$ est croissante par rapport à sa deuxième variable. **On notera** $g(.,\uparrow,.)$ **cette propriété**.

De même, on remarque que l'opérateur $\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}$ est *monotone croissant* vis à vis de $\varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)$ si et seulement si $g$ est décroissante par rapport à sa troisième variable. **On notera** $g(.,.,\downarrow)$ **cette propriété**.

## Monotonie du schéma

On rappelle que l'opérateur $\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}$ est défini par

$$\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(.,t-\Delta t)) =$$

$$\varphi(x,t-\Delta t) - \Delta t\; g(x, \frac{\varphi(x,t-\Delta t)-\varphi(x-\Delta x,t-\Delta t)}{\Delta x}, \frac{\varphi(x+\Delta x,t-\Delta t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta x}).$$

Supposons que l'application $(x,v^-,v^+) \to g(x,v^-,v^+)$ soit dérivable par rapport à $v^-$ et $v^+$ et introduisons les notations $g^- = \partial_{v^-} g$ et $g^+ = \partial_{v^+} g$.

L'opérateur $\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}$ est *monotone croissant* vis à vis de $\varphi(x,t-\Delta t)$ si et seulement si

$$1-\frac{\Delta t}{\Delta x}(g^-(x,v^-,v^+)-g^+(x,v^-,v^+)) \geq 0, \quad (\text{avec } v^{\pm} = \pm\frac{\varphi(x\pm\Delta x,t-\Delta t)-\varphi(x,t-\Delta t)}{\Delta x}),$$

c'est-à-dire finalement si et seulement si

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}(g^-(x,v^-,v^+)-g^+(x,v^-,v^+)) \leq 1, \quad \forall v^{\pm} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Cette condition est appelée condition CFL.**

# Monotonie du schéma

On obtient finalement le théorème suivant.

**Monotonie du schéma**

On suppose que $g$ est localement lipschitzienne.
Alors, l'opérateur $\mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}$ est *monotone croissant* si et seulement si $g(., \uparrow, .)$, $g(., ., \downarrow)$ et la condition CFL suivante est satisfaite pour presque tout $(x, v^-, v^+) \in \mathbb{R}^3$ :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}(g^-(x, v^-, v^+) - g^+(x, v^-, v^+)) \leq 1.$$

On rappelle que d'après le théorème de Rademacher, toute fonction lipschitzienne sur un intervalle réel est dérivable presque partout pour la mesure de Lebesgue.

Lorsque $g(x, v^-, v^+) = \max(v^-, -v^+)$ comme dans le premier exemple, on trouve

$$g^-(x, v^-, v^+) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad v^- \geq -v^+, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad g^+(x, v^-, v^+) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad v^- \geq -v^+ \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on retrouve donc la condition CFL précédente $0 \leq \lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

## Stabilité du schéma

On montre le théorème suivant.

**Stabilité du schéma**

Soit $T > 0$ et $\Delta t = \dfrac{T}{N}$. On suppose que l'opérateur $\mathcal{T}_{\Delta x, \Delta t}$ est *monotone croissant* et que la donnée initiale $u_0$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (elle est donc localement bornée). Alors le schéma aux différences finies proposé est stable au sens suivant

- $\exists C > 0, \forall n \in [0, N] \bigcap \mathbb{N}$,
$$\max_j |u_j^n| \leq \max_j |u_j^0| + CT.$$
- si de plus $g(., 0, 0) = 0$, alors le principe du maximum suivant est vérifié :
$$\forall j, \quad m \leq u_j^0 \leq M \implies \forall j, n, \quad m \leq u_j^n \leq M.$$

La constante $C$ dépend éventuellement de $T$ et de la donnée initiale $u_0$, mais **ne dépend pas de** $h = (\Delta x, \Delta t)$.

**La monotonie du schéma entraîne donc ici sa stabilité.**

# Convergence du schéma

## Théorème de convergence

Supposons que la donnée initiale $u_0$ soit lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et que $g$ soit localement lipschitzienne. Alors le schéma aux différences finies

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + g(x_j, \dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}) = 0, \quad n \geq 0, j \in \mathbb{Z}, \\ u_j^0 = u_0(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

est **convergent** si $g(x, v, v) = G(v)$ (consistance), $g(., \uparrow, .)$, $g(., ., \downarrow)$ et la condition CFL suivante est satisfaite pour presque tout $(x, v^-, v^+) \in \mathbb{R}^3$ :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}(g^-(x, v^-, v^+) - g^+(x, v^-, v^+)) \leq 1$$

(monotonie et stabilité).

# Plan du cours

## Schémas aux différences finies

On s'intéresse à la discrétisation de l'équation de Hamilton-Jacobi $2D$ suivante

$$\begin{cases} \partial_t u(\mathbf{x},t) + G(\mathbf{x}, \partial_x u(\mathbf{x},t), \partial_y u(\mathbf{x},t)) = 0, \quad \mathbf{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{6}$$

On se propose d'utiliser un **schéma aux différences finies** de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + g(\mathbf{x}_{i,j}, \dfrac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x}, \dfrac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x}, \dfrac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \dfrac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y}) = 0, \quad n \geq 0, \ i,j \in \mathbb{Z}, \\ \\ u_{i,j}^0 = u_0(\mathbf{x}_{i,j}), \quad j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

où on a noté $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$.

On introduit les notations suivantes

- $(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+) \to g(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+)$,
- $g_1^-(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+) = \partial_{v_1^-} g(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+)$,
- $g_1^+(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+) = \partial_{v_1^+} g(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+)$,
- $g_2^-(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+) = \partial_{v_2^-} g(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+)$,
- $g_2^+(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+) = \partial_{v_2^+} g(\mathbf{x}, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+)$.

## Convergence du schéma

On montre alors les points suivants de la même manière que pour l'équation $1D$.

**Le schéma est consistant si et seulement si** $g(\mathbf{x}, v_1, v_1, v_2, v_2) = G(\mathbf{x}, v_1, v_2)$ $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$**,** $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$**.**

**Le schéma est monotone si et seulement si** $g(., \uparrow, \downarrow, \uparrow, \downarrow)$ **et la condition CFL suivante est satisfaite pour presque tout** $(x, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+) \in \mathbb{R}^5$ **:**

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_1^-(x, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+) - g_1^+(x, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+)\right) +$$
$$\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(g_2^-(x, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+) - g_2^+(x, v_1^-, v_1^+, v_2^-, v_2^+)\right) \leq 1.$$

**La monotonie du schéma entraîne sa stabilité.**

# Plan du cours

# Schémas de Lax-Friedrichs (Osher et Shu, sinum 1991)

- Schéma de **Lax-Friedrichs global**

$$g^{LF}(.,v^-,v^+) = G(.,\frac{v^- + v^+}{2}) - \frac{1}{2}\alpha\,(v^+ - v^-)$$

avec

$$\alpha = \max_{v} \mid \partial_v G(.,v) \mid .$$

- Schéma de **Lax-Friedrichs local**

$$g^{LLF}(.,v^-,v^+) = G(.,\frac{v^- + v^+}{2}) - \frac{1}{2}\alpha(v^-,v^+)\,(v^+ - v^-)$$

avec

$$\alpha = \max_{v \in I(v^-,v^+)} \mid \partial_v G(.,v) \mid .$$

# Schémas de Godunov et Roe (Osher et Shu, sinum 1991)

- Schéma de **Godunov**

$$g^G(., v^-, v^+) = \begin{cases} \min_{[v^-,v^+]} G(., v) & \text{si} \quad v^- \leq v^+, \\ \max_{[v^+,v^-]} G(., v) & \text{si} \quad v^+ \leq v^-. \end{cases}$$

- Schéma de **Roe**

$$g^R(., v^-, v^+) = \begin{cases} G(., v^\star) & \text{si } \partial_v G(., v) \text{ ne change pas de signe sur } I(v^-, v^+), \\ g^{LF}(., v^-, v^+) & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$v^\star = \begin{cases} v^- & \text{si } \partial_v G(., v) \geq 0, \\ v^+ & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Schéma de Osher-Sethian (Osher et Sethian, jcp 1988)

**Lorsque** $G(.,v) = f(v^2)$ **avec** $f$ **monotone :**

$$g^{OS}(.,v^-,v^+) = f(\overline{v}^2),$$

avec

$$\overline{v}^2 = \begin{cases} \min(v^-,0)^2 + \max(v^+,0)^2 & \text{si } f' \leq 0, \\ \min(v^+,0)^2 + \max(v^-,0)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Plan du cours

## A propos de l'ordre de précision en espace du schéma

Les schémas aux différences finies proposés ci-dessus sont souvent appelés **schémas monotones**.

**Les schémas monotones convergent vers l'unique solution de viscosité** de l'équation de Hamilton-Jacobi considérée.
(rappelons que dans ce contexte la monotonie du schéma entraîne sa stabilité)

On peut montrer que **l'erreur** entre la solution numérique d'un schéma monotone et la solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi considérée, mesurée en norme $L^\infty$, **est au moins d'ordre** $1/2$ (*i.e.* en $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta x})$).

On montre également que pour des solutions régulières **les schémas monotones ne peuvent pas être d'ordre plus élevé que** $1$.

Les schémas monotones vont néanmoins être utilisés pour construire des schémas (non monotones) d'ordre élevé **en espace**. La construction de schémas d'ordre élevé **en temps** interviendra dans un second temps.

Les stratégies utilisées seront du type *interpolation polynômiale*, *ENO* et *WENO* et seront décrites en une dimension d'espace uniquement (l'extension au cas multi-D étant immédiate).

# Réinterprétation des schémas monotones

Nous avons considéré jusque là un **schéma aux différences finies** de la forme

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+g\left(x_j,\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x},\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}\right)=0,\quad n\geq 0,\, j\in\mathbb{Z}$$

que l'on peut aussi réécrire

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+g(x_j,v_j^-,v_j^+)=0,\quad n\geq 0,\, j\in\mathbb{Z}$$

avec

$$v_j^-=\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x},\quad v_j^+=\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}.$$

Ainsi, $v_j^-$ et $v_j^+$ représentent des approximations de la dérivée $\partial_x u(x_j,t^n)$ à gauche et à droite du point $x_j$.

## Réinterprétation des schémas monotones

Soit $S_- = \{x_{j-1}, x_j\}$ et $p_-(x)$ le polynôme **de degré 1** qui interpole la fonction $u^n$ en chaque point de $S_-$, *i.e.* tel que $p_-(x_{j-1}) = u^n_{j-1}$ et $p_-(x_j) = u^n_j$. On remarque alors que

$$v_j^- = \frac{u^n_j - u^n_{j-1}}{\Delta x} = p'_-(x_j).$$

De même, soit $S_+ = \{x_j, x_{j+1}\}$ et $p_+(x)$ le polynôme **de degré 1** qui interpole la fonction $u^n$ en chaque point de $S_+$, *i.e.* tel que $p_+(x_j) = u^n_j$ et $p_+(x_{j+1}) = u^n_{j+1}$. On remarque alors que

$$v_j^+ = \frac{u^n_{j+1} - u^n_j}{\Delta x} = p'_+(x_j).$$

**On associe l'ordre du schéma au degré du polynôme d'interpolation choisi**.

**On peut ainsi construire des schémas d'ordre élevé basés sur des approximations d'ordre plus élevé des dérivées à gauche et à droite de $\partial_x u(x_j, t^n)$.**

# CONSTRUCTION D'UN SCHÉMA D'ORDRE 2 EN ESPACE

Soit $S_- = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$ et $p_-(x)$ le polynôme **de degré 2** qui interpole la fonction $u^n$ en chaque point de $S_-$, *i.e.* tel que $p_-(x_{j-1}) = u^n_{j-1}$, $p_-(x_j) = u^n_j$ et $p_-(x_{j+1}) = u^n_{j+1}$.
**On pose alors**

$$v_j^- = p_-'(x_j) = \frac{1}{2\Delta x}(u^n_{j+1} - u^n_{j-1}).$$

De même, soit $S_+ = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$ et $p_+(x)$ le polynôme **de degré 2** qui interpole la fonction $u^n$ en chaque point de $S_+$, *i.e.* tel que $p_+(x_{j-1}) = u^n_{j-1}$, $p_+(x_j) = u^n_j$ et $p_+(x_{j+1}) = u^n_{j+1}$.
**On pose alors**

$$v_j^+ = p_+'(x_j) = v_j^-.$$

# Construction d'un schéma d'ordre 3 en espace

Soit $S_- = \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$ et $p_-(x)$ le polynôme **de degré 3** qui interpole la fonction $u^n$ en chaque point de $S_-$, *i.e.* tel que $p_-(x_{j-2}) = u^n_{j-2}$, $p_-(x_{j-1}) = u^n_{j-1}$, $p_-(x_j) = u^n_j$ et $p_-(x_{j+1}) = u^n_{j+1}$. **On pose alors**

$$v_j^- = p'_-(x_j) = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{6}u^n_{j-2} - u^n_{j-1} + \frac{1}{2}u^n_j + \frac{1}{3}u^n_{j+1}\right).$$

De même, soit $S_+ = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}$ et $p_+(x)$ le polynôme **de degré 2** qui interpole la fonction $u^n$ en chaque point de $S_+$, *i.e.* tel que $p_+(x_{j-1}) = u^n_{j-1}$, $p_+(x_j) = u^n_j$, $p_+(x_{j+1}) = u^n_{j+1}$ et $p_+(x_{j+2}) = u^n_{j+2}$. **On pose alors**

$$v_j^+ = p'_+(x_j) = \frac{1}{\Delta x}\left( - \frac{1}{3}u^n_{j-1} - \frac{1}{2}u^n_j + u^n_{j+1} - \frac{1}{6}u^n_{j+2}\right)..$$

**Pour des questions de stabilité, on ne peut pas trop** *décaler* **le stencil d'un côté ou de l'autre.** Habituellement, le décalage se fait sur un point.

# Schémas d'ordre élevé en espace

**On peut construire des schémas d'ordre quelconque** en espace par ce procédé d'interpolation polynômiale.

**Ces schémas** marchent parfaitement pour le calcul numérique de solutions régulières, mais **peuvent générer des oscillations** lorsqu'il s'agit d'approcher des solutions de viscosité non différentiables par exemple.

**Pour éviter ces oscillations parasites, on utilise les stratégies de reconstruction ENO et WENO** (pour *Essentially Non Oscillatory* et *Weighted Essentially Non Oscillatory*).

# Schémas d'ordre élevé en espace

**L'objectif est d'obtenir un schéma précis dans les zones de régularité de la fonction et qui n'oscille pas dans les zones de discontinuité de la dérivée de la fonction** (près des *kinks*)

L'idée générale est que **les oscillations parasites apparaissent parce que le stencil** $S$ **peut traverser une discontinuité de la dérivée**.

Pour remédier à ce problème il est possible de *limiter* les approximations à l'aide de limiteurs de pente, stratégie que nous ne détaillerons pas ici.

**Nous étudions ici les procédures ENO et WENO** (voir les travaux de Osher et Shu, SINUM 1991).

# La procédure ENO

Supposons que l'objectif soit de calculer $v_j^-$ à l'aide d'un polynôme d'interpolation $p$ de degré $k \geq 2$ interpolant la fonction $u^n$ en chaque point d'un stencil $S_-^k$.

On suppose que le stencil $S$ contient les points du stencil $S_-^1 = \{x_{j-1}, x_j\}$ associé à un schéma d'ordre 1.

Rappelons la définition des différences divisées de Newton :

$$\varphi[j] = \varphi(x_j), \quad \varphi[j, j+1] = \frac{\varphi[j+1] - \varphi[j]}{x_{j+1} - x_j},$$

et plus généralement

$$\varphi[j, \ldots, j+m] = \frac{\varphi[j+1, \ldots, j+m] - \varphi[j, \ldots, j+m-1]}{x_{j+m} - x_j}.$$

On a alors par exemple

$$p_-^1(x) = u^n[j] + u^n[j-1, j](x - x_j).$$

# LA PROCÉDURE ENO

On va ajouter successivement des points dans le stencil $S_-^1$ pour finalement former le stencil $S_-^k$ formé de $k+1$ points (car on veut un polynôme de degré $k$).

A chaque étape, on ajoute soit le voisin gauche soit le voisin droit dans le stencil. Dans la première étape par exemple, on ajoute soit $x_{j-2}$ soit $x_{j+1}$ au stencil $S_-^1$.

Pour choisir entre les deux points, on part du principe que l'objectif est d'améliorer la précision du schéma sans trop s'éloigner du stencil précédent supposé conduire à un schéma avec peu ou pas d'oscillations (c'est le cas du stencil $S_-^1$).

Notons $S_-^{2l} = \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j\}$ et $S_-^{2r} = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$ les deux stencils candidats à devenir $S_-^2$, et $p_-^{2l}$ et $p_-^{2r}$ les polynômes d'interpolation correspondants. On a

$$p_-^{2l} = p_-^1(x) + u^n[j-2, j-1, j](x - x_{j-1})(x - x_j)$$

et

$$p_-^{2r} = p_-^1(x) + u^n[j-1, j, j+1](x - x_{j-1})(x - x_j)$$

# LA PROCÉDURE ENO

On pose alors $S_-^2 = S_-^{2l}$ si

$$| u^n[j-2, j-1, j] | < | u^n[j-1, j, j+1] |$$

et $S_-^2 = S_-^{2r}$ si

$$| u^n[j-2, j-1, j] | > | u^n[j-1, j, j+1] | \,.$$

On répète l'opération jusqu'à obtenir le stencil $S_-^k$.

On procède de la même manière pour le calcul de $v_j^+$ mais en partant du stencil initial $S_+^1 = \{x_j, x_{j+1}\}$.

# La procédure WENO

On donnera simplement l'idée générale de la procédure WENO.

La procédure d'interpolation WENO (Jiang et Peng, SISC 2000) est basée d'une certaine manière sur la procédure d'interpolation ENO.

Supposons par exemple que l'objectif soit de calculer $v_j^-$ à l'aide d'un polynôme d'interpolation $p$ de degré 3 interpolant la fonction $u^n$ en chaque point d'un stencil $S_-^3$ contenant le stencil $S_-^1$.

La procédure ENO conduit pour $S_-^3$ à l'un des trois stencils suivants :

$$S_-^{3a} = \{x_{j-3}, x_{j-2}, x_{j-1}, x_j\},$$

$$S_-^{3b} = \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\},$$

$$S_-^{3c} = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}.$$

# LA PROCÉDURE WENO

La procédure ENO conduit donc pour $v_j^-$ **à l'une** des approximations correspondantes notées $v_j^{-a}$, $v_j^{-b}$, $v_j^{-c}$, **les autres étant ignorées**.

Cette procédure est apparue naturelle pour éviter les oscillations près des *kinks*.

Dans les zones régulières, les trois valeurs conviennent toutes a priori, de sorte qu'il peut paraître coûteux et superflu de les comparer et d'en écarter deux d'entre elles.

Finalement, il apparaît naturel de choisir une combinaison de ces trois valeurs :

$$v_j^- = \lambda_j^{-a} v_j^{-a} + \lambda_j^{-b} v_j^{-b} + \lambda_j^{-c} v_j^{-c},$$

combinaison que l'on choisira **convexe** pour des raisons de consistance et de stabilité, *i.e.* telle que

$$\lambda_j^{-a} + \lambda_j^{-b} + \lambda_j^{-c} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_j^{-a} \geq 0, \quad \lambda_j^{-b} \geq 0, \quad \lambda_j^{-c} \geq 0.$$

**Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients $\lambda_j^{-a}$, $\lambda_j^{-b}$ et $\lambda_j^{-c}$...**

# La procédure WENO

Un petit peu d'algèbre montre que **le choix suivant**

$$\lambda_j^{-a} = 0.1, \quad \lambda_j^{-b} = 0.6, \quad \lambda_j^{-c} = 0.3$$

**est d'ordre 5** au sens où il conduit à une valeur de $v_j^-$ identique à celle obtenue par une interpolation polynômiale basée sur le stencil suivant

$$S_-^5 = S_-^{3a} \cup S_-^{3b} \cup S_-^{3c} = \{x_{j-3}, x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}.$$

**Mais attention, ce choix conduit a priori à une méthode numérique oscillante près des** *kinks* pour les mêmes raisons que précédemment (le stencil peut contenir un *kink*).

# La procédure WENO

**L'idée naturelle** est alors

- **dans les zones régulières** de choisir

$$\lambda_j^{-a} = 0.1 + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad \lambda_j^{-b} = 0.6 + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad \lambda_j^{-c} = 0.3 + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

- **près des** *kinks* de choisir par exemple le coefficient $\lambda_j^{-a}$ petit si le stencil $S_-^{3a}$ contient un *kink*...

La définition rigoureuse des coefficients repose alors sur la construction d'un **indicateur de régularité** de la solution...

Voir par exemple les travaux de Jiang et Shu, JCP 1996 et Jiang et Peng, SISC 2000.

# Plan du cours

# Discrétisation d'ordre élevé en temps

On utilise pour cela des méthodes de type **Runge-Kutta** TVD dont un exemple est donné ci-dessous (voir les travaux de Shu et Osher, JCP 1988).

**Outre la propriété TVD, ces schémas ont l'avantage d'être mono-pas.**

Soit le schéma semi-discret

$$\frac{du}{dt} = L(u),$$

où $L(u)$ représente une discrétisation de l'opérateur en espace.

**Le schéma TVD d'ordre** 3 **de Runge-Kutta s'écrit alors simplement**

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t L(u^n),$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}),$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}).$$

## DISCRÉTISATION D'ORDRE ÉLEVÉ EN TEMPS

Plus précisément, supposons un schéma d'ordre 1 en temps de la forme

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t L(u^n),$$

ce qui correspond à

$$S_h(y = (x,t), u, \varphi) = \frac{u - \mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(x, t - \Delta t))}{\Delta t}$$

avec

$$\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(x, t - \Delta t)) = \varphi(x, t - \Delta t) + \Delta t L(\varphi(x, t - \Delta t)).$$

**Le schéma TVD d'ordre 3 de Runge-Kutta se réécrit alors de manière équivalente sous la forme**

$$u^{(1)} = \mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(u^n),$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(u^{(1)}),$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(u^{(2)}).$$

## Discrétisation d'ordre élevé en temps

**On obtient finalement**

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}\Big(\frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(u^n))\Big)$$

ce qui correspond à

$$S_h^{RK3}(y = (x,t), u, \varphi) = \frac{u - \mathcal{T}^{RK3}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(x, t - \Delta t))}{\Delta t}$$

avec

$$\mathcal{T}^{RK3}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(x, t - \Delta t)) =$$

$$\frac{1}{3}\varphi(x, t - \Delta t) + \frac{2}{3}\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}\Big(\frac{3}{4}\varphi(x, t - \Delta t) + \frac{1}{4}\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(x, t - \Delta t)))\Big).$$

## Discrétisation d'ordre élevé en temps

**Supposons que $\mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(.)$ soit localement lipschitzienne, monotone croissant et telle que le schéma d'ordre $1$ en temps associé et défini par**

$$S_h(y = (x,t), u, \varphi) = \frac{u - \mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(\varphi(x, t - \Delta t))}{\Delta t}$$

**soit consistant.**
**Supposons en outre que**

$$m \leq u_j^n \leq M,\ \forall j \implies m \leq \mathcal{T}_{\Delta x,\Delta t}(u^n)_j \leq M,\ \forall j.$$

**On montre alors facilement que le schéma RK3 d'ordre $3$ en temps est consistant, stable et monotone. Il est donc convergent.**

# La méthode Fast-Marching pour la propagation de fronts

C. Chalons

# Plan du cours

# Plan du cours

# Evolution dans la direction normale

On s'intéresse à l'évolution d'un front $\Gamma_t$ dans la **direction normale** et avec la vitesse $c = c(y) > 0$, $y \in \mathbb{R}^d$.

**L'équation d'évolution** de ce front s'écrit

$$\frac{d\Gamma_t}{dt} = c\ \vec{n}_{\Gamma_t}, \tag{1}$$

où encore

$$\begin{cases} y'(t) = c(y(t))\ \vec{n}_{y(t)}, \\ y(0) = x, & \forall\, x \in \Gamma_0, \end{cases} \tag{2}$$

où $\vec{n}$ désigne la **normale unitaire** extérieure au front.

# La méthode Level-Set

**La méthode Level-Set** (ou méthode des lignes de niveaux) est très populaire dans les problèmes de propagation de fronts.

**L'idée principale** est de représenter le front par **la ligne de niveau zéro** d'une fonction $u$ :

$$\Gamma_t = \{x,\ u(x,t) = 0\}.$$

**L'inconvénient majeur** est d'ajouter **une dimension supplémentaire** au problème, ce qui peut engendrer des coûts calcul non négligeables.

Soit donc $u$ une fonction telle que

$$\begin{cases} u(x,t) < 0 & \text{si } x \text{ est situé } \textbf{à l'intérieur} \text{ de } \Gamma_t, \\ u(x,t) = 0 & \text{si } x \ \textbf{appartient} \text{ à } \Gamma_t, \\ u(x,t) > 0 & \text{si } x \text{ est situé } \textbf{à l'extérieur} \text{ de } \Gamma_t. \end{cases}$$

On a

$$\vec{n}_{\Gamma_t} = \frac{\nabla_x u(x,t)}{|\nabla_x u(x,t)|}.$$

# LA MÉTHODE LEVEL-SET

**Rappelons que**

$$\Gamma_t = \{x,\ u(x,t) = 0\}.$$

Pour toute trajectoire $t \to y(t) \in \Gamma_t$, **on peut écrire**

$$u(y(t),t) = 0 \implies \partial_t u(y(t),t) + \nabla_x u(y(t),t) \cdot y'(t) = 0,$$

**avec**

$$y'(t) = c(y(t))\ \vec{n}_{y(t)}$$

**et**

$$\vec{n}_{\Gamma_t} = \frac{\nabla_x u(x,t)}{|\nabla_x u(x,t)|}.$$

On aboutit à l'équation suivante

$$\partial_t u(y(t),t) + c(y(t))\,|\nabla_x u(y(t),t)| = 0,$$

que l'on propose de résoudre sur tout le domaine. On obtient **l'équation Eikonale**

$$\partial_t u(x,t) + c(x)\,|\nabla_x u(x,t)| = 0.$$

# Plan du cours

# Principe de la méthode Fast-Marching

L'objectif de la méthode Fast-Marching est de résoudre efficacement l'équation Eikonale

$$\partial_t u(x,t) + c(x) \mid \nabla_x u(x,t) \mid = 0,$$

et en adoptant **une approche stationnaire**.

Soit $x \mapsto T(x)$ la fonction donnant le temps d'arrivée du front en un point $x$ de l'espace, *i.e.*

$$T(y(t)) = t$$

pour toute trajectoire $t \to y(t) \in \Gamma_t$.

En dérivant cette équation par rapport à $t$, et en utilisant l'expression suivante de la normale extérieure

$$\vec{n}_{\Gamma_t} = \frac{\nabla_x T(x)}{\mid \nabla_x T(x) \mid},$$

on aboutit à l'équation $c(y(t)) \mid \nabla_x T(y(t)) \mid = 1$, que l'on propose de résoudre sur tout le domaine. On obtient **l'équation stationnaire**

$$c(x) \mid \nabla_x T(x) \mid = 1.$$

avec la condition au limite $T(x) = 0 \ \forall x \in \Gamma_0$.

## Principe de la méthode Fast-Marching

**Remarque 1.** On a

$$u(x,t) = T(x) - t.$$

En effet, $\partial_t u(x,t) = -1$ et $\nabla_x u(x,t) = \nabla_x T(x)$ de sorte que

$$\partial_t u(x,t) + c(x) \mid \nabla_x u(x,t) \mid = \partial_t u(x,t) + c(x) \mid \nabla_x T(x) \mid = -1 + 1 = 0.$$

Il est clair par ailleurs que $u(x,0) = T(x) = 0 \ \forall x \in \Gamma_0$.

**Remarque 2.** L'équation stationnaire s'écrit aussi

$$\nabla_x T(x) \cdot c(x) \, \vec{n}_{\Gamma_t} = 1,$$

de sorte que la fonction $T$ sera bien croissante le long de la normale au front.

**Remarque 3.** Lorsque l'on cherche à résoudre l'équation Eikonale instationnaire, l'initialisation $u(x,0) = u_0(x)$ se fait souvent en choisissant la fonction $u_0(x) = d(x,\Gamma_0)$ qui n'est pas toujours simple à calculer. Une possibilité consiste à résoudre numériquement l'équation stationnaire à vitesse constante $c$ puis à poser $d(x,\Gamma_0) = cT(x)$.

# Plan du cours

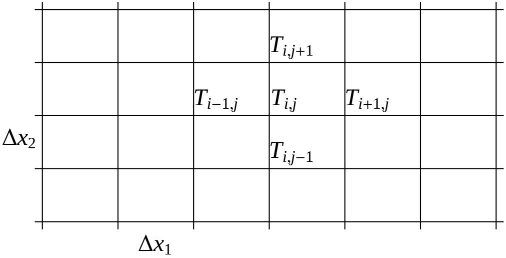
# Description de la méthode Fast-Marching

L'objectif est maintenant de **calculer numériquement** le temps d'arrivée $T$ solution de **l'équation stationnaire**

$$c(x) \mid \nabla_x T(x) \mid = 1.$$

On se place en **dimension 2 d'espace** $(x = (x_1, x_2))$ sur un maillage cartésien de pas d'espace $h = (\Delta x_1, \Delta x_2)$, et on propose la discrétisation suivante de l'équation stationnaire

$$\max\left(\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x_1}, -\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x_1}, 0\right)^2 + \max\left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta x_2}, -\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta x_2}, 0\right)^2 = \frac{1}{c^2(x_{i,j})}.$$



# DESCRIPTION DE LA MÉTHODE FAST-MARCHING

Une première idée serait d'appliquer un schéma itératif pour résoudre ce problème non linéaire, et attendre la convergence de l'algorithme à la précision souhaitée.
**Ceci peut être très long !**

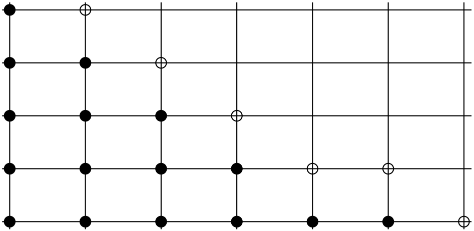
Une autre possibilité est de faire du **Fast-Marching**, qui va consister à calculer les valeurs $T_{i,j}$ dans un certain ordre pour obtenir *moralement* une convergence en une seule itération. **Il s'agit de calculer les $T_{i,j}$ en ordre croissant.**

Pour cela, les points $x_{i,j}$ du maillage sont répartis en trois régions :

- **Frozen points :** c'est la région des points définitivement calculés, *i.e. ceux ayant déjà été coupés par le front*. **Ils seront représentés par le symbole $\bullet$**
- **Narrow band :** c'est la région des points n'ayant pas encore été coupés par le front, mais sur le point de l'être, *i.e.* ayant un voisin qui l'a été.
**Ils seront représentés par le symbole $\circ$**
- **Far away :** c'est la région correspondant aux autres points.

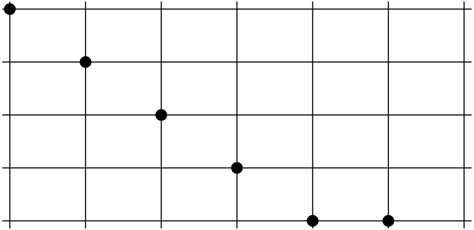
# DESCRIPTION DE LA MÉTHODE FAST-MARCHING

**Exemple :**



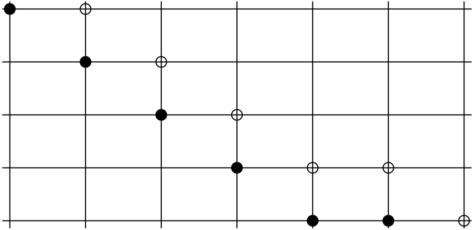
# Algorithme de la méthode Fast-Marching

1. On définit le front initial en gelant ($\bullet$) les points sur la frontière, et on initialise $T$ à 0 sur ces points.



# Algorithme de la méthode Fast-Marching

2. On définit la narrow band (∘) avec les points voisins de la frontière initiale et situés dans le sens de propagation du front.
   La région far away est composée des autres points situés dans le sens de propagation du front.



# Algorithme de la méthode Fast-Marching

3. **On initialise $T$ sur la narrow band** avec les formules correspondantes suivantes :

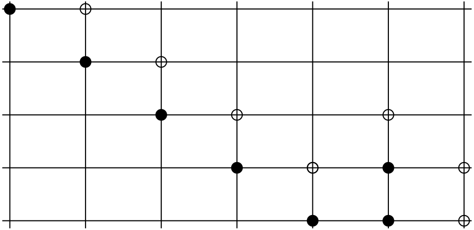
$$\frac{T_{i,j}^2}{\Delta x_1} = \frac{1}{c^2(x_{i,j})}, \quad \frac{T_{i,j}^2}{\Delta x_2} = \frac{1}{c^2(x_{i,j})} \text{ ou } \frac{T_{i,j}^2}{\Delta x_1} + \frac{T_{i,j}^2}{\Delta x_2} = \frac{1}{c^2(x_{i,j})}.$$

Ce qui revient à résoudre le système de manière *découplée*, *i.e.* en supposant dans le cas où plusieurs points de la narrow band seraient initialement voisins, la valeur de $T$ sur le point courant est plus petite que celle des voisins de la narrow band.
De manière naturelle, la valeur de $T$ sur le point courant est en revanche supposée plus grande (respectivement plus petite) que celle des voisins situés sur le front initial (respectivement dans la région far away).
**On initialise $T$ dans la région far away** à $+\infty$.

$$\max(\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x_1}, -\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x_1}, 0)^2 + \max(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta x_2}, -\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta x_2}, 0)^2 = \frac{1}{c^2(x_{i,j})}.$$

# Algorithme de la méthode Fast-Marching

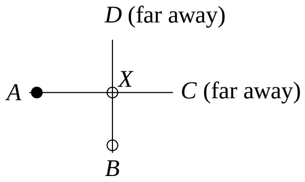
4. On cherche la plus petite valeur de $T$ sur la narrow band.
   Le point correspondant devient accepté (frozen).
   On redéfinit la narrow band en la complétant avec les voisins du point nouvellement accepté.



# Algorithme de la méthode Fast-Marching

5. On recalcule ensuite la valeur de $T$ sur les points $X$ voisins du point nouvellement accepté $A$, en résolvant la discrétisation de l'équation stationnaire. Il y a plusieurs possibilités, toutes conduisant à une unique définition de $T$ aux points $X$.

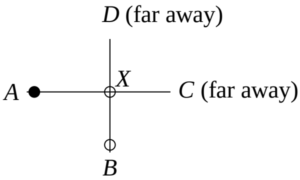
**Exemple 1.** Un cas où $X$ n'était pas déjà dans la narrow band




On cherche $T_X$ tel que $T_X \geq T_A$, $T_X \leq T_C$ et $T_X \leq T_D$ et $T_X$ solution de

$$\max\left(\frac{T_X - T_A}{\Delta x_1}, 0\right)^2 + \max\left(\frac{T_X - T_B}{\Delta x_2}, 0\right)^2 = \frac{1}{c^2(x_{i,j})},$$

## Algorithme de la méthode Fast-Marching




On cherche $T_X$ tel que $T_X \geq T_A$, $T_X \leq T_C$ et $T_X \leq T_D$ et $T_X$ solution de

$$\max(\frac{T_X - T_A}{\Delta x_1}, 0)^2 + \max(\frac{T_X - T_B}{\Delta x_2}, 0)^2 = \frac{1}{c^2(x_{i,j})},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} (\dfrac{T_X - T_A}{\Delta x_1})^2 + (\dfrac{T_X - T_B}{\Delta x_2})^2 = \dfrac{1}{c^2(x_{i,j})} & \text{si} \quad T_X \geq T_B \ \text{(notons que } T_B \geq T_A) \\ (\dfrac{T_X - T_A}{\Delta x_1})^2 = \dfrac{1}{c^2(x_{i,j})} & \text{si} \quad T_A \leq T_X \leq T_B. \end{cases}$$

# Algorithme de la méthode Fast-Marching

On cherche $T_X$ tel que $T_X \geq T_A$, $T_X \leq T_C$ et $T_X \leq T_D$ et $T_X$ solution de

$$\begin{cases} f_1(T_X) = (\frac{T_X - T_A}{\Delta x_1})^2 + (\frac{T_X - T_B}{\Delta x_2})^2 - \frac{1}{c^2(x_{i,j})} = 0 \quad \text{si} \quad T_X \geq T_B \ \text{(notons que } T_B \geq T_A) \\ \\ f_2(T_X) = (\frac{T_X - T_A}{\Delta x_1})^2 - \frac{1}{c^2(x_{i,j})} = 0 \quad \text{si} \quad T_A \leq T_X \leq T_B. \end{cases}$$

On a $f_1 \geq f_2$ et $f_1$ et $f_2$ **convexes et infinies à l'infini**.

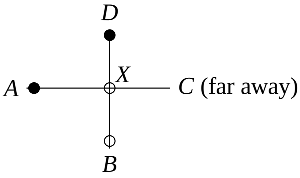
On a $f_2(T_A) < 0$ donc **c'est nécessairement la plus grande des deux racines de** $f_2$ **qui peut nous intéresser**.

**Si cette racine est plus petite ou égale à** $T_B$, on la conserve pour définir $T_X$. Remarquons dans ce cas que $f_1(T_X) \geq f_2(T_X) \geq f_2(T_B) = f_1(T_B) \geq 0$ pour $T_X \geq T_B$ donc il ne peut pas y avoir de racine de $f_1$ qui convienne également.

**Si cette racine est plus grande que** $T_B$, on ne peut pas la conserver pour définir $T_X$ et on tente de trouver une racine de $f_1$. Remarquons dans ce cas que $f_2(T_B) = f_1(T_B) < 0$ donc il existe un unique $T_X > T_B$ tel que $f_1(T_X) = 0$. Cette valeur est la plus grande des deux racines de $f_1$ et permet de définir $T_X$.

# Algorithme de la méthode Fast-Marching

**Exemple 2.** Un cas où $X$ était déjà dans la narrow band




On cherche $T_X$ tel que $T_X \geq T_A$, $T_X \geq T_D$ et $T_X \leq T_C$ et $T_X$ solution de

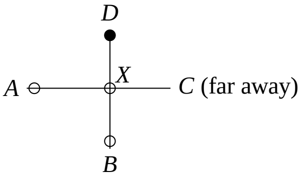
$$\max(\frac{T_X - T_A}{\Delta x_1}, 0)^2 + \max(\frac{T_X - T_B}{\Delta x_2}, \frac{T_X - T_D}{\Delta x_2}, 0)^2 = \frac{1}{c^2(x_{i,j})},$$

c'est-à-dire, puisque $T_D \leq T_B$,

$$(\frac{T_X - T_A}{\Delta x_1})^2 + (\frac{T_X - T_D}{\Delta x_2})^2 = \frac{1}{c^2(x_{i,j})}.$$

# Algorithme de la méthode Fast-Marching

Remarquons qu'à l'itération précédente, *i.e.* juste avant que le point $A$ ne soit accepté, la situation était la suivante




avec $T_X \geq T_A \geq T_D$ et $T_B \geq T_A$.

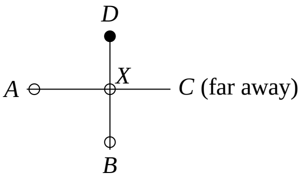
**Ainsi, soit l'équation**

$$f_1(T_X) := (\frac{T_X - T_A}{\Delta x_1})^2 + (\frac{T_X - T_D}{\Delta x_2})^2 - \frac{1}{c^2(x_{i,j})} = 0$$

**était déjà satisfaite** de manière unique par (l'ancienne valeur de) $T_X$ et dans ce cas le temps $T_X$ n'a pas besoin d'être recalculé.

# ALGORITHME DE LA MÉTHODE FAST-MARCHING

A l'itération précédente, la situation était la suivante avec $T_X \geq T_A \geq T_D$ et $T_B \geq T_A$ :




**Soit elle ne l'était pas** et dans ce cas cela signifie que l'ancienne valeur de $T_X$ était la valeur initiale de $T$ en ce point $X$, *i.e.* la racine de

$$f_2(T_X) := (\frac{T_X - T_D}{\Delta x_2})^2 - \frac{1}{c^2(x_{i,j})} = 0.$$

Dans ce cas, $f_1(T_X) \geq f_2(T_X) = 0$ et puisque $T_X \geq T_A$

$$f_1(T_A) = f_2(T_A) = (\frac{T_A - T_D}{\Delta x_2})^2 - \frac{1}{c^2(x_{i,j})} \leq f_2(T_X) = 0.$$

**Il existe donc une unique nouvelle valeur de** $T_X \geq T_A \geq T_D$ **telle que** $f_1(T_X) = 0$.

## Algorithme de la méthode Fast-Marching

6. On redémarre en 4.

**Remarque 4.** Il existe d'autres situations possibles dans l'étape 5. de l'algorithme.

**Remarque 5.** On itère au plus 4 fois sur chaque noeud.

**Remarque 6.** La complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}(N \log N)$ où $N$ est le nombre de noeuds total de la grille, pourvu qu'un algorithme optimal de recherche du temps minimal soit utilisé (algorithme de tri par tas ou heap sort par exemple).

# Plan du cours

# Etude de la méthode en 1D

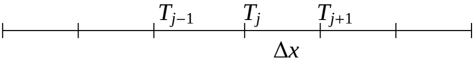
En 1D, l'équation stationnaire sur le temps d'arrivée $T$ s'écrit

$$c(x) \mid T'(x) \mid = 1.$$

La discrétisation correspondante est

$$\max\left(\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x}, -\frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta x}, 0\right)^2 = \frac{1}{c^2(x_j)},$$

où $h = \Delta x$ représente le pas d'espace du maillage.

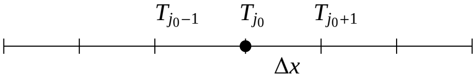



**On suppose pour fixer les idées qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $c(x) \geq C$ pour tout $x$.**

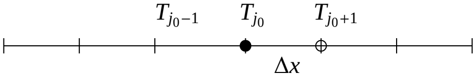
# Algorithme

On suppose que la frontière initiale n'est composée d'un seul point $x_{j_0}$, et pour simplifier que le sens de propagation se fait essentiellement vers la droite (*i.e.* $c(x_j) << 1$ pour $j < j_0$).

1. On définit le front initial en gelant ($\bullet$) les points sur la frontière, et on initialise $T$ à 0 sur ces points.




2. On définit la narrow band ($\circ$) avec les points voisins de la frontière initiale et situés dans le sens de propagation du front.
   La région far away est composée des autres points situés dans le sens de propagation du front.



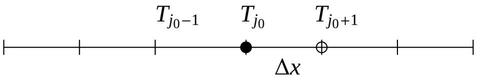
# Algorithme

3. **On calcule** $T_{j_0+1}$ avec la formule de discrétisation :

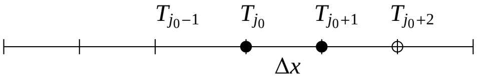
$$\max\left(\frac{T_{j_0+1} - T_{j_0}}{\Delta x}, -\frac{T_{j_0+2} - T_{j_0+1}}{\Delta x}, 0\right)^2 = \frac{1}{c^2(x_{j_0+1})},$$

c'est-à-dire

$$T_{j_0+1} = \frac{\Delta x}{c(x_{j_0+1})}.$$




4. Le point devient accepté (frozen), on redéfinit la narrow band et on réitère le processus.



# ALGORITHME

Pour tout $j > j_0$, on obtient facilement la formule suivante :

$$T_j = \Delta x \sum_{k=j_0+1}^{j} \frac{1}{c(x_k)}.$$

On remarque tout de suite que s'il existe une constante $C$ telle que $c(x) \geq C > 0$, alors

$$0 \leq T_j \leq \frac{(j - j_0)\Delta x}{C},$$

de sorte que **si le domaine de calcul est borné et de longueur $L$, la suite des $T_j$ est bornée indépendamment de $\Delta x$** :

$$0 \leq T_j \leq \frac{L}{C}, \quad \forall\, j \geq j_0.$$

## Convergence de l'algorithme

**On s'intéresse tout d'abord à la convergence de l'algorithme associé à la variable instationnaire $u(x, t)$.**

Rappelons (voir **Remarque 1.** ci-dessus) que $u(x, t)$ et $T(x)$ sont liés par la relation

$$u(x, t) = T(x) - t,$$

de sorte que si l'on pose $u_j^n = T_j - t^n$ pour tout $j$, il vient

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -1 = -c(x_j) \max\left(\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x}, -\frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta x}, 0\right).$$

En remarquant que $u_j^n - u_{j-1}^n = T_j - T_{j-1}$ pour tout $j$, on obtient finalement la discrétisation suivante pour la variable $u$ :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c(x_j) \max\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, -\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, 0\right) = 0.$$

**Ce schéma est convergent sous la condition CFL** $0 \leq \lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (voir le cours sur les schémas aux différences finies).

## Convergence de l'algorithme

Lorsque $\Delta t$ et $\Delta x$ tendent vers 0, on a donc

$$u_j^n \to u(x_j, t^n) = T(x_j) - t^n,$$

c'est-à-dire

$$T_j - t^n \to u(x_j, t^n) = T(x_j) - t^n,$$

ou encore

$$T_j \to T(x_j).$$

**On obtient donc également la convergence de l'algorithme associé à la variable stationnaire $T(x)$.**

**Nous allons maintenant montrer directement la convergence du schéma**

$$\max\left(\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x}, -\frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta x}, 0\right)^2 = \frac{1}{c^2(x_j)},$$

**en utilisant le théorème général de convergence énoncé dans le cours sur les schémas aux différences finies.**

# Convergence de l'algorithme

On s'intéresse à la convergence du schéma

$$\max\left(\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x}, -\frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta x}, 0\right)^2 = \frac{1}{c^2(x_j)}.$$

On définit l'opérateur $S_h$ par

$$S_h(x_j, T_j, T^h) = c(x_j)\,\max\left(\frac{T_j - T^h(x_{j-1})}{\Delta x}, -\frac{T^h(x_{j+1}) - T_j}{\Delta x}, 0\right) - 1$$

c'est-à-dire

$$S_h(x, T, \varphi) = c(x)\,\max\left(\frac{T - \varphi(x - \Delta x)}{\Delta x}, -\frac{\varphi(x + \Delta x) - T}{\Delta x}, 0\right) - 1,$$

qui se réécrit aussi sous la forme

$$S_h(x, T, \varphi) = \frac{c(x)}{\Delta x}\Big(T - \min\left(\varphi(x - \Delta x), \varphi(x + \Delta x), T\right)\Big) - 1.$$

## Consistance et monotonie du schéma

$\longrightarrow$ On a donc, puisque $h = \Delta x$,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to x,\xi\to 0,h\to 0} S_h(z,\varphi(z)+\xi,\varphi+\xi) &= c(x)\max(\varphi'(x),-\varphi'(x),0)-1 \\ &= c(x)\mid\varphi'(x)\mid -1\end{aligned}$$

**Le schéma est donc consistant.**

$\longrightarrow$ La propriété de monotonie $S_h(x,T,\varphi_1) \leq S_h(x,T,\varphi_2),\ \forall\ \varphi_1 \geq \varphi_2$ de l'opérateur

$$S_h(x,T,\varphi) = \frac{c(x)}{\Delta x}\Big(T - \min\left(\varphi(x-\Delta x),\varphi(x+\Delta x),T\right)\Big) - 1$$

est clairement vérifiée.

**Le schéma est donc monotone.**

## Stabilité du schéma

Le schéma s'écrit

$$\max\Big(\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x}, -\frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta x}, 0\Big)^2 = \frac{1}{c^2(x_j)},$$

de sorte que s'il existe une constante $C$ telle que $c(x) \geq C > 0$, on obtient

$$0 \leq \max\Big(\frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x}, -\frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta x}, 0\Big) \leq \frac{1}{C},$$

ou encore

$$0 \leq T_j - \min(T_{j-1}, T_j, T_{j+1}) \leq \frac{\Delta x}{C}.$$

# Stabilité du schéma

**Fixons une valeur de $j$ et montrons que $T_j$ est borné indépendamment de $\Delta x$.**
On se place dans la configuration de l'algorithme où le temps $T_j$ est nouvellement accepté (gelé), *i.e.* il est le plus petit temps des éléments de la narrow band. Notons $T_j^{-1}$ le temps précédemment accepté.
Au moins un des voisins de $T_j$ est nécessairement déjà accepté, donc plus petit ou égal à $T_j^{-1}$. On a donc

$$\min(T_{j-1}, T_j, T_{j+1}) \leq T_j^{-1},$$

ce qui implique

$$0 \leq T_j - T_j^{-1} \leq T_j - \min(T_{j-1}, T_j, T_{j+1}) \leq \frac{\Delta x}{C},$$

où encore

$$0 \leq T_j - T_j^{-1} \leq \frac{\Delta x}{C}.$$

En procédent de la même manière sur $T_j^{-1}$, on obtient avec des notations claires

$$0 \leq T_j^{-1} - T_j^{-2} \leq \frac{\Delta x}{C}.$$

## Stabilité et convergence du schéma

En réitérant le processus jusqu'à atteindre un temps $T_j^l = 0$ correspondant à un point situé sur le front initial, et en posant par convention $T_j = T_j^0$, on obtient

$$0 \leq T_j^k - T_j^{k-1} \leq \frac{\Delta x}{C}, \quad k = 0, ..., l+1,$$

d'où finalement

$$0 \leq T_j \leq l\frac{\Delta x}{C}.$$

**Si le domaine de calcul est borné et de longueur $L$, et puisque $l \leq L/\Delta x$, la suite des $T_j$ est donc bornée indépendamment de $\Delta x$ :**

$$0 \leq T_j \leq \frac{L}{C}, \quad \forall\, j.$$

On retrouve la même borne que dans le cas particulier traité précédemment (le front initial n'était composé que d'un unique point).

**Le schéma est donc stable, et finalement convergent.**

## Stabilité et convergence du schéma

On peut **essayer** de montrer de la même manière la convergence du schéma en 2D. Plus précisément, pour montrer la stabilité du schéma (qui constitue le point difficile de la démonstration), on procède comme ci-dessus : le schéma s'écrit

$$\max(\frac{T_{i,j}-T_{i-1,j}}{\Delta x_1}, -\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x_1}, 0)^2 + \max(\frac{T_{i,j}-T_{i,j-1}}{\Delta x_2}, -\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta x_2}, 0)^2 = \frac{1}{c^2(x_{i,j})},$$

de sorte que s'il existe une constante $C$ telle que $c(x) \geq C > 0$, on obtient

$$0 \leq \max(\frac{T_{i,j}-T_{i-1,j}}{\Delta x_1}, -\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x_1}, 0)^2 + \max(\frac{T_{i,j}-T_{i,j-1}}{\Delta x_2}, -\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta x_2}, 0)^2 \leq \frac{1}{C^2},$$

ou encore

$$0 \leq \Big(T_{i,j} - \min(T_{i-1,j}, T_{i,j}, T_{i+1,j})\Big)^2 + \Big(T_{i,j} - \min(T_{i,j-1}, T_{i,j}, T_{i,j+1})\Big)^2 \leq \frac{\max(\Delta x_1, \Delta x_2)^2}{C^2}.$$

## Stabilité et convergence du schéma

En reprenant les notations introduites ci-dessus, on a alors

$$0 \leq \left(T_{i,j} - T_{i,j}^{-1}\right)^2 \leq \frac{\max(\Delta x_1, \Delta x_2)^2}{C^2}.$$

En réitérant le processus jusqu'à atteindre un temps $T_{i,j}^{l} = 0$ correspondant à un point situé sur le front initial, et en posant par convention $T_{i,j} = T_{i,j}^{0}$, on obtient

$$0 \leq T_{i,j}^{k} - T_{i,j}^{k-1} \leq \frac{\max(\Delta x_1, \Delta x_2)}{C}, \quad k = 0, ..., l+1, \quad \text{d'où finalement}$$

$$0 \leq T_{i,j} \leq l\frac{\max(\Delta x_1, \Delta x_2)}{C}.$$

**Si le domaine de calcul est borné et de longueurs $L_1$ et $L_2$, et puisque $l \leq L_1 L_2 / \Delta x_1 \Delta x_2$, la suite des $T_{i,j}$ vérifie donc** :

$$0 \leq T_{i,j} \leq L_1 L_2 \frac{\max(\Delta x_1, \Delta x_2)}{C \Delta x_1 \Delta x_2}, \quad \forall\ i, j,$$

**ce qui n'est pas assez précis pour obtenir une borne indépendante de $\Delta x_1, \Delta x_2$...**

**Remarque 7.** Il est naturel de se placer sur un domaine borné car dans le cas contraire, il est clair que $T$ va tendre vers l'infini.

# Plan du cours

# Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

Pour mettre en œuvre la méthode, nous aurons à manipuler plusieurs tableaux :

- un tableau $T(i,j)$ contenant les valeurs $T_{i,j}$ aux nœuds $x_{i,j}$.
- un tableau $TAB(i,j)$ indiquant la nature du point $x_{i,j}$ : par exemple, $TAB(i,j)=1$ si le point est gelé, $TAB(i,j)=-1$ s'il est dans la narrow band et $TAB(i,j)=0$ sinon (région far away)
- un tableau $Pile(i,j,T(i,j))$ contenant les indices des éléments de la narrow band. **Les lignes de Pile seront triées selon les valeurs croissantes de la troisième colonne. Un algorithme de tri sera donc nécessaire.**
- un tableau $Pile\_test(i,j)$ contenant les indices des 4 points voisins d'un point nouvellement accepté. Ces 4 points, s'ils ne sont pas déjà acceptés, seront ajoutés ensuite au tableau $Pile(i,j,T(i,j))$ (s'ils ne sont pas déjà dedans) et la valeur de $T(i,j)$ (re)calculée.

# Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

Le schéma s'écrit

$$\max\Big(\frac{T_{i,j}-T_{i-1,j}}{\Delta x_1},-\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x_1},0\Big)^2+\max\Big(\frac{T_{i,j}-T_{i,j-1}}{\Delta x_2},-\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta x_2},0\Big)^2=\frac{1}{c^2(x_{i,j})}.$$

Pour mettre à jour la narrow band à chaque itération, nous serons amenés à chercher $T_{i,j}$ solution de cette équation, les valeurs $(t_1,t_2):=(T_{i-1,j},T_{i+1,j})$ et $(t_3,t_4):=(T_{i,j-1},T_{i,j+1})$ étant fixées. Il s'agira donc de trouver $\theta$ solution de

$$\max\Big(\frac{\theta-t_1}{\Delta x_1},-\frac{t_2-\theta}{\Delta x_1},0\Big)^2+\max\Big(\frac{\theta-t_3}{\Delta x_2},-\frac{t_4-\theta}{\Delta x_2},0\Big)^2=\frac{1}{c^2},$$

*i.e.*

$$\frac{1}{\Delta x_1^2}\Big(\theta-\min(t_1,t_2,\theta)\Big)^2+\frac{1}{\Delta x_2^2}\Big(\theta-\min(t_3,t_4,\theta)\Big)^2=\frac{1}{c^2},$$

où pour alléger les notations, on a noté $c=c(x_{i,j})$.

## Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

En posant $h_1 = \Delta x_1$, $h_2 = \Delta x_2$, $v_1 = \min(t_1, t_2)$ et $v_2 = \min(t_3, t_4)$, l'équation s'écrit aussi

$$\frac{1}{h_1^2}\Big(\theta - \min(v_1, \theta)\Big)^2 + \frac{1}{h_2^2}\Big(\theta - \min(v_2, \theta)\Big)^2 = \frac{1}{c^2},$$

Il y a plusieurs cas :

$\theta > v_1$ ET $\theta > v_2$ : On résout le polynôme

$$\frac{1}{h_1^2}\Big(\theta - v_1\Big)^2 + \frac{1}{h_2^2}\Big(\theta - v_2\Big)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

La plus grande des deux racines de ce polynôme est donnée par

$$\theta = \frac{h_2^2 v_1 + h_1^2 v_2}{h_1^2 + h_2^2} + \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}\sqrt{-(v_2 - v_1)^2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{c^2}}$$

et vérifie les contraintes $\theta > v_1$ et $\theta > v_2$ **sous la condition**

$$\begin{cases} v_1 - v_2 < \frac{h_2}{c} & \text{si} \quad v_1 \geq v_2, \\ v_2 - v_1 < \frac{h_1}{c} & \text{si} \quad v_1 \leq v_2. \end{cases}$$

**On vérifie aisément que ces conditions assurent la positivité du terme sous la racine.**

# Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

Remarquons que lorsque $h_1 = h_2 = h$, on trouve

$$\theta = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-(v_2 - v_1)^2 + \frac{2h^2}{c^2}}$$

et les contraintes $\theta > v_1$ et $\theta > v_2$ sont vérifiées **sous la condition**

$$\max(v_1, v_2) - \min(v_1, v_2) < \frac{h}{c}.$$

# Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

$v_2 < \theta \leq v_1$ : On résout le polynôme

$$\frac{1}{h_2^2}\left(\theta - v_2\right)^2 = \frac{1}{c^2},$$

ce qui donne

$$\theta = v_2 + \frac{h_2}{c}.$$

Les contraintes $v_2 < \theta \leq v_1$ sont vérifiées **sous la condition**

$$v_1 - v_2 \geq \frac{h_2}{c}.$$

Remarquons que lorsque $h_1 = h_2 = h$, on trouve

$$\theta = \min(v_1, v_2) + \frac{h}{c}$$

et les contraintes $v_2 < \theta \leq v_1$ sont vérifiées **sous la condition**

$$\max(v_1, v_2) - \min(v_1, v_2) \geq \frac{h}{c}.$$

## Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

$v_1 < \theta \leq v_2$ : On résout le polynôme

$$\frac{1}{h_1^2}\left(\theta - v_1\right)^2 = \frac{1}{c^2},$$

ce qui donne

$$\theta = v_1 + \frac{h_1}{c}.$$

Les contraintes $v_1 < \theta \leq v_2$ sont vérifiées **sous la condition**

$$v_2 - v_1 \geq \frac{h_1}{c}.$$

Remarquons que lorsque $h_1 = h_2 = h$, **on retrouve**

$$\theta = \min(v_1, v_2) + \frac{h}{c}$$

et les contraintes $v_1 < \theta \leq v_2$ sont vérifiées **sous la même condition**

$$\max(v_1, v_2) - \min(v_1, v_2) \geq \frac{h}{c}.$$

## Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

**Remarque 8.** La situation $\theta \leq min(v_1, v_2)$ n'est pas envisageable, car au moins un des voisins du point associé à $\theta$ est déjà accepté en pratique et la vitesse de propagation du front est supposée strictement positive.

**Résumé lorsque $h_1 = h_2 = h$.**

$\longrightarrow$ **Si** $\max(v_1, v_2) - \min(v_1, v_2) < \frac{h}{c}$,

$$\theta = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-(v_2 - v_1)^2 + \frac{2h^2}{c^2}}.$$

On a alors $\theta > v_1$ et $\theta > v_2$.

$\longrightarrow$ **Si** $\max(v_1, v_2) - \min(v_1, v_2) \geq \frac{h}{c}$,

$$\theta = \min(v_1, v_2) + \frac{h}{c}.$$

On a alors $\min(v_1, v_2) < \theta \leq \max(v_1, v_2)$.

## Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

**Nous décrivons maintenant brièvement l'algorithme de tri par tas, ou heap frog (voir par exemple le site wikipedia).**

On souhaite trier les éléments d'un vecteur $v$ de dimension $n$.

L'idée principale de l'algorithme consiste à voir le vecteur $v$ comme un arbre binaire : le premier élément est la racine, le deuxième et le troisième sont les deux descendants du premier élément, ...

Dans l'algorithme, on cherchera plus précisément à obtenir **un tas**, c'est-à-dire un arbre binaire vérifiant les propriétés suivantes :

- la différence maximale de profondeur entre deux feuilles est de 1 (*i.e.* toutes les feuilles se trouvent sur la dernière ou sur l'avant-dernière ligne)
- les feuilles de profondeur maximale sont tassées sur la gauche
- **chaque nœud est de valeur supérieure (resp. inférieure) à celles de ses deux fils pour un tri ascendant (resp. descendant)**.

# Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

Notons dès à présent que pour un tableau indicé à partir de 1, les deux descendants de l'élément d'indice $n$ sont les éléments d'indices $2n$ et $2n+1$.

En d'autres termes, les nœuds de l'arbre sont placés dans le tableau ligne par ligne, chaque ligne étant décrite de gauche à droite.

Remarquons que si le tableau n'est pas de taille $2^n - 1$, les branches ne se finissent pas toutes à la même profondeur.

**Pour fixer les idées, on se focalise désormais sur le tri croissant.**

# ELÉMENTS DE PROGRAMMATION DE LA MÉTHODE FAST-MARCHING

Supposons le tas de départ obtenu, *i.e.* supposons que l'arbre binaire associé au vecteur $v$ soit un tas. **L'algorithme est le suivant :**

1. **On échange** $v(1)$ (le plus grand élément) et $v(n)$. L'arbre associé au vecteur $v$ (privé ou non de sa dernière composante) n'est donc plus un tas. En revanche, le dernier élément du vecteur est désormais bien placé, on n'y touchera plus.
2. Le vecteur $v$ privé de sa dernière composante est presque un tas, l'élément $v(1)$ (la racine) étant essentiellement le seul mal placé. **On tamise** alors ce vecteur de dimension $n-1$. L'opération de tamisage, ou percolation, consiste à échanger la racine avec le plus grand de ses fils, et ainsi de suite récursivement jusqu'à ce qu'elle soit ï¿$\frac{1}{2}$ sa place dans ce nouveau vecteur de dimension $n-1$, *i.e.* jusqu'à obtenir un nouveau tas (de dimension $n-1$).
3. On retourne en 1. avec $n \leftarrow n-1$.

Pour construire un tas à partir d'un arbre quelconque (étape d'initialisation), on tamise les racines de chaque sous-tas, de bas en haut (par taille croissante) et de droite à gauche.

# ELÉMENTS DE PROGRAMMATION DE LA MÉTHODE FAST-MARCHING

**Voici le script Scilab de l'algorithme :**

```
function [v] = tamiser(v,i,n)
k = i ; j = 2 * k ;

while (j <= n) then

if ( (j+1) <= n & v(j+1) > v(j) ) then
j = j +1 ;
end

if ( v(k) < v(j) ) then
temp = v(k) ; v(k) = v(j) ; v(j) = temp ;
k = j ; j = 2 * k ;
else
j=n+1
end

end

endfunction
```

## Eléments de programmation de la méthode Fast-Marching

```
function [v] = heap_sort(v)

n=max(size(v))

// construction du tas de départ
for i=n :-1 :1
v = tamiser(v,i,n)
end

// échange et tamisage
for i=n :-1 :2
temp = v(i) ;
v(i) = v(1) ;
v(1) = temp ;
v = tamiser(v,1,i-1)
end

endfunction
```