Université Paris-Saclay
M2 Analyse, Modélisation et Simulation
Année 2019-2020

Corrigé succinct de l'examen du cours sur les systèmes hyperboliques

Jeudi 13 février 2020

Exercice 1

On considère le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\alpha\rho - \rho^2) = 0, \\ \partial_t(\rho\alpha) + \partial_x(\rho\alpha^2 - \rho^2\alpha) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathbf{u}(x,t) = (\rho, \rho\alpha)(x,t)$ est le vecteur des inconnues avec $\rho(x,t) > 0$ et $\alpha(x,t) \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que le système est strictement hyperbolique. On pourra pour cela considérer le changement de variable $\mathbf{u} = (\rho, \rho\alpha) \to \mathbf{v} = (\rho, \alpha)$.
2) Déterminer la nature des champs caractéristiques associés aux valeurs propres du système.
3) a) Donner un invariant de Riemann associé à la plus petite des valeurs propres. On le notera I^1.
b) Donner un invariant de Riemann associé à la plus grande des valeurs propres. On le notera I^2.
4) Quelle est la forme de la solution du problème de Riemann associée à (1) avec la donnée initiale

$$\mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbf{u}_R & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$ sont deux états constants tels que $\rho_L > 0$ et $\rho_R > 0$.
5) Déterminer à l'aide des invariants de Riemann l'ensemble des états que l'on peut connecter à droite de $\mathbf{u}_L$ par une 1-onde de détente. On remarquera notamment que la densité est décroissante le long d'une 1-détente.
6) Déterminer à l'aide des invariants de Riemann l'ensemble des états que l'on peut connecter à gauche de $\mathbf{u}_R$ par une 2-discontinuité de contact ?
7) En supposant que les états gauche et droit soient tels que la solution du problème de Riemann consiste en une 1-onde de détente suivie d'une 2-discontinuité de contact, déterminer l'état intermédiaire correspondant.

Quelle est la condition sur les états gauche et droit pour que la solution soit effectivement de cette forme ?
8) Ecrire les relations de Rankine-Hugoniot et les inégalités de Lax satisfaites à la traversée d'une 1-onde de choc entre $\mathbf{u}_L$ et un état droit noté $(\rho, \rho\alpha)$.
9) En admettant (ou pourquoi pas en le montrant...) que les conditions de la question 8) sont équivalentes à

$$\alpha = \alpha_L \quad \text{et} \quad \rho_L < \rho,$$

et en supposant que les états gauche et droit soient tels que la solution du problème de Riemann consiste en une 1-onde de choc suivie d'une 2-discontinuité de contact, déterminer l'état intermédiaire correspondant.
Quelle est la condition sur les états gauche et droit pour que la solution soit effectivement de cette forme ?

Exercice 1, corrigé succinct
1) Dans le jeu de variable (ρ, α), la matrice jacobienne de ce système est donnée par

$$A(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \alpha - 2\rho & \rho \\ 0 & \alpha - \rho \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \alpha - 2\rho < \lambda_2 = \alpha - \rho$ (rappelons que $\rho > 0$). Le système est donc strictement hyperbolique.
2) Des calculs simples montrent que les vecteurs propres sont donnés par

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et que

$$\nabla\lambda_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla\lambda_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\nabla\lambda_1.r_1 = -2 \quad \text{et} \quad \nabla\lambda_2.r_2 = 0.$$

Le premier champ caractéristique est donc vraiment non linéaire tandis que le deuxième est linéairement dégénéré.
3) Les relations définissant les invariants de Riemann I sont

$$\nabla I.r_1 = 0 \quad \text{et} \quad \nabla I.r_2 = 0.$$

a) On a donc ici

$$\partial_\rho I = 0$$

et donc
$$I^1 = \alpha.$$
b) On a donc ici
$$\partial_\rho I + \partial_\alpha I = 0$$
et donc
$$I^2 = \alpha - \rho.$$
4) La solution du problème de Riemann est composée de deux ondes simples de type onde de détente ou choc pour la première, et de type discontinuité de contact pour la deuxième. Il y a un unique état intermédiaire.
5) Les états $(\rho, \rho\alpha)$ que l'on peut connecter à droite de $\mathbf{u}_L$ par une 1-onde de détente sont tels que le premier invariant est constant et la première valeur propre croissante, ce qui donne
$$\alpha = \alpha_L \quad \text{et} \quad \alpha_L - 2\rho_L \leq \alpha - 2\rho$$
où encore
$$\alpha = \alpha_L \quad \text{et} \quad \rho_L \geq \rho.$$
6) Les états $(\rho, \rho\alpha)$ que l'on peut connecter à gauche de $\mathbf{u}_R$ par une 2-discontinuité de contact sont tels que le deuxième invariant est constant, ce qui donne
$$\alpha - \rho = \alpha_R - \rho_R.$$
7) D'après les deux questions précédentes, si la solution du problème de Riemann consiste en une 1-onde de détente suivie d'une 2-discontinuité de contact, alors l'état intermédiaire est entièrement défini par
$$\alpha = \alpha_L \quad \text{et} \quad \rho = \rho_R - (\alpha_R - \alpha_L).$$
La condition sur les états gauche et droit pour que la solution soit effectivement de cette forme est $\rho \leq \rho_L$, c'est-à-dire
$$\rho_R - \rho_L \leq \alpha_R - \alpha_L.$$
8) En notant σ la vitesse de propagation, les relations de Rankine-Hugoniot et les inégalités de Lax satisfaites à la traversée d'une 1-onde de choc entre $\mathbf{u}_L$ et un état droit noté $(\rho, \rho\alpha)$ s'écrivent
$$\begin{cases} -\sigma(\rho - \rho_L) + \rho(\alpha - \rho) - \rho_L(\alpha_L - \rho_L) = 0, \\ -\sigma(\rho\alpha - \rho_L\alpha_L) + \rho\alpha(\alpha - \rho) - \rho_L\alpha_L(\alpha_L - \rho_L) = 0, \end{cases}$$

et

$$\alpha_L - 2\rho_L > \sigma > \alpha - 2\rho$$

ce qui conduit après quelques manipulations algébriques à

$$\alpha = \alpha_L \quad \text{et} \quad \rho_L < \rho.$$

9) D'après la question précédente, si la solution du problème de Riemann consiste en une 1-onde de choc suivie d'une 2-discontinuité de contact, alors l'état intermédiaire est entièrement défini par

$$\alpha = \alpha_L \quad \text{et} \quad \rho = \rho_R - (\alpha_R - \alpha_L).$$

La condition sur les états gauche et droit pour que la solution soit effectivement de cette forme est $\rho > \rho_L$, c'est-à-dire

$$\rho_R - \rho_L > \alpha_R - \alpha_L.$$

Exercice 2

Dans cet exercice, on cherche à proposer un schéma numérique pour approche numériquement les solutions de l'équation de l'exercice 1. On propose de considérer la méthode de Godunov approchée associée au solveur de Riemann approché simple suivant :

$$\mathbf{u}(x/t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si} \quad x/t < -a, \\ \mathbf{u}^* & \text{si} \quad -a < x/t < a, \\ \mathbf{u}_R & \text{si} \quad x/t > a, \end{cases}$$

où $a > 0$ est une constante à préciser.

1) Déterminer l'état intermédiaire $\mathbf{u}^*$ en fonction de $\mathbf{u}_L$, $\mathbf{u}_R$ et a pour que ce solveur simple soit bien consistant au sens intégral avec l'équation considérée. *On ne demande pas de vérifier la consistance avec une inégalité d'entropie.*

2) Ecrire le schéma de Godunov approché correspondant, en précisant bien l'expression du flux numérique, ainsi que la condition CFL en fonction de a.

3) En vous inspirant des discussions que nous avons eues en cours et en TP, comment choisiriez-vous la constante a au niveau de chaque interface ?

Exercice 2, corrigé succinct

1) Avec des notations claires, on écrit le système sous la forme condensée

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0.$$

Les relations de consistance au sens intégral s'écrivent ici

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) = -a(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_L) + a(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}^*).$$

On a donc

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_R) - \frac{1}{2a}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)).$$

2) Le schéma s'écrit, avec des notations habituelles,

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{j-1}^n, \mathbf{u}_j^n))$$

où le flux numérique s'écrit

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)) - \frac{a}{2}(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L).$$

La condition CFL permettant d'éviter l'interaction des ondes issues des problèmes de Riemann posés à chaque interface s'écrit

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2a}.$$

3) Un choix naturel (voir cours) est

$$a = \max(|\alpha_L - 2\rho_L|, |\alpha_L - \rho_L|, |\alpha_R - 2\rho_R|, |\alpha_R - \rho_R|).$$