2016-2017
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines LSMA100

Corrigé succinct du contrôle du 13 décembre 2016

Exercice 1.
1) Les vecteurs suivants forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (3,0,-1), \quad v_3 = (-1,1,-1).$$

2) Montrer que les vecteurs suivants ne forment pas une base de $\mathbb{R}^3$ et dire quel est le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

$$v_1 = (1,2,3), \quad v_2 = (3,0,-1), \quad v_3 = (1,8,13).$$

Correction 1. 1) En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on a

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \iff \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = 0, \\ \alpha + \gamma = 0, \\ \alpha - \beta - \gamma = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = 0, \\ -3\beta + 2\gamma = 0, \\ -4\beta = 0, \end{cases}$$

$$\iff \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

ce qui montre que la famille est libre. Toute famille libre de $\mathbb{R}^3$ est également génératrice de $\mathbb{R}^3$. La famille forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Soit $v = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v \iff \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = x, \\ 2\alpha + 8\gamma = y, \\ 3\alpha - \beta + 13\gamma = z, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = x, \\ -6\beta + 6\gamma = y - 2x, \\ -10\beta + 10\gamma = z - 3x, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = x, \\ -6\beta + 6\gamma = y - 2x, \\ 0 = x - 5y + 3z. \end{cases}$$

On voit donc que les vecteurs ne forment pas une base de $\mathbb{R}^3$ mais engendrent le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs vérifiant la relation $x - 5y + 3z = 0$.

Exercice 2.
1) La famille formée des vecteurs $(1,1)$ et $(3,1)$ est-elle génératrice $\mathbb{R}^2$?
2) La famille formée des vecteurs $(1,0,2)$ et $(1,2,1)$ est-elle génératrice $\mathbb{R}^3$?

Correction 2. 1) Soit $v = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha + 3\beta = x,\\ \alpha + \beta = y,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\alpha + 3\beta = x,\\ -2\beta = y - x,\end{array}\right.$$

ce qui permet de définir de manière unique α et β (en fonction de v). La famille est donc génératrice de $\mathbb{R}^2$ (mais aussi libre) et en forme donc une base.
2) La famille n'étant composée que de deux vecteurs, elle ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0,\ x - y + z = 0\right\}.$$

Correction 3. Soit $v = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$. On a

$$v \in E \iff v = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -2x \end{pmatrix} \iff v = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $v = (1, -1, -2)$ est libre et générateur de E, il en forme donc une base.

Exercice 4.
1) La famille formée des trois vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?
2) La famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est-elle une famille libre ?
3) La famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est-elle génératrice de l'ensemble

$$E = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, 2x + 3y + z = 0\}?$$

4) Calculer dans le repère $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ les coordonnées du vecteur

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Correction 4. 1) En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on a

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \iff \left\{\begin{array}{l}\alpha + \beta + \gamma = 0,\\ \alpha - \beta = 0,\\ -5\alpha + \beta - 2\gamma = 0,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\alpha + \beta + \gamma = 0,\\ -2\beta - \gamma = 0,\\ 6\beta + 3\gamma = 0,\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0, \\ -2\beta-\gamma=0, \\ 0=0, \end{cases},$$

ce qui montre que la famille n'est pas libre (α, β et γ ne sont pas forcément égaux à 0).
2) En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on a

$$\alpha u+\beta v=0 \iff \begin{cases} \alpha+\beta=0, \\ \alpha-\beta=0, \\ -5\alpha+\beta=0, \end{cases} \iff \alpha=\beta=0,$$

ce qui montre que la famille est libre.
3) Soit $v=(x,y,z)$ un vecteur de E. En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on a

$$\alpha u+\beta v=v \iff \begin{cases} \alpha+\beta=x, \\ \alpha-\beta=y, \\ -5\alpha+\beta=z, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta=x, \\ -2\beta=y-x, \\ 6\beta=z+5x, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta=x, \\ -2\beta=y-x, \\ 0=z+2x+3y, \end{cases}$$

ce qui montre que la famille est bien génératrice de E.
4) En prenant $x=2$, $y=-8$ et $z=20$ dans les formules ci-dessus, on trouve que les coordonnées sont $\alpha=-3$ et $\beta=5$.