Corrigé succinct du contrôle du 6 décembre 2016

Exercice 1. Déterminer les ensembles

$$I = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right[\qquad \text{et} \qquad J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n \right]$$

Correction 1. $I = [0, 2]$ et $J =]1, +\infty[$.

Exercice 2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Correction 2. $f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2$ et $g \circ f(x) = g(f(x)) = (3x + 1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x$. On a donc $f \circ g \neq g \circ f$.

Exercice 3. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n \quad ; \quad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \quad ; \quad i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

Correction 3. f est injective mais non surjective. g est injective et surjective donc bijective. h n'est ni injective ni surjective. i est surjective mais non injective.

Exercice 4. Soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle injective, surjective, bijective ?

Correction 4. f est injective et surjective donc bijective.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

1. $\ln(3x + 5) = \ln(2x + 1)$,
2. $|x - 2| = 5$,
3. $|x - 2| = 2x$.

Correction 5.

1. L'équation est définie pour $x > -5/3$ et $x > -1/2$, donc finalement pour $x > -1/2$. L'équation est alors vérifiée si $3x + 5 = 2x + 1$ et donc $x = -4$ qui n'appartient pas au domaine de définition de l'équation. Il n'y a donc pas de solution.

2. L'équation est vérifiée si $x-2=5$ ou $x-2=-5$, et donc $x=7$ ou $x=-3$. Il y a donc deux solutions.
3. x doit être positif ou nul. L'équation est alors vérifiée si $x-2=2x$ ou $x-2=-2x$, et donc $x=-2$ ou $x=2/3$. Il n'y a donc qu'une seule solution qui est $x=2/3$.

Exercice 6. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Soit x un élément de E. On note $P(x)$ l'assertion "$x \in A$" et $Q(x)$ l'assertion "$x \in B$".

1. Ecrire à l'aide de P et Q l'équivalence $x \in \overline{A \cup B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. En déduire, en utilisant une table de vérité, une démonstration de l'égalité ensembliste $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Correction 6.

1. non (P ou Q) = (non P) et (non Q).
2.

P	Q	non P	non Q	P ou Q	non (P ou Q)	non P et non Q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Exercice 7. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :
$A \cap (\overline{A} \cup B)$; $A \cup (\overline{A} \cap B)$, $A \cap (\overline{A \cup B})$

Correction 7. On obtient $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$, puis $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ et enfin $A \cap (\overline{A \cup B}) = \emptyset$.