2016-2017 LSMA 100
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Corrigé du contrôle continu du 15 novembre 2016 [1]

Exercice 1. Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Pour les espaces vectoriels, on montrera rigoureusement les propriétés devant être satisfaites, et pour les autres ensembles on donnera un contre-exemple.
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x-7y-z=0\}$, $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2-z^2=0\}$
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2)=0\}$

Correction 1.

1. (a) $(0,0,0) \in E_1$.
   (b) Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments de E_1. On a donc $3x-7y-z=0$ et $3x'-7y'-z'=0$. Donc $3(x+x')-7(y+y')-(z+z')=0$, d'où $(x+x', y+y', z+z')$ appartient à E_1.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in E_1$. Alors la relation $3x-7y-z=0$ implique que $3(\lambda x)-7(\lambda y)-\lambda z=0$ donc que $\lambda(x,y,z)=(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à E_1.
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2-z^2=0\}$. Les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(1,0,1)$ appartiennent donc à E_2. En revanche, leur somme $(1,0,-1)+(1,0,1)=(2,0,0)$ n'appartient pas à E_2. E_2 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ appartiennent à E_3 mais leur somme $(1,0,0)+(0,0,1)=(1,0,1)$ ne lui appartient pas donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Correction 2. On applique le pivot de Gauss $L_2 \leftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-L_1$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

1. inspiré en partie du site exo7

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2/2$ pour obtenir un système équivalent qui est triangulaire donc facile à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre et discuter suivant les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t & = & b_1 \\ x+4y+7z+3t & = & b_2 \\ x+2y+3z+2t & = & b_4 \\ y+2z & = & b_3 \end{array}\right.$$

Correction 3. En appliquant la méthode du pivot de Gauss de manière habituelle, on trouve facilement que le système est équivalent à

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+5z+3t & = & b_1 \\ y+2z & = & b_2-b_1 \\ -t & = & b_4-2b_1+b_2 \\ 0 & = & b_3-b_2+b_1. \end{array}\right.$$

On peut donc en conclure qu'il n'y a aucune solution si $b_3-b_2+b_1 \neq 0$. Au contraire, si $b_3-b_2+b_1=0$, on a une famille de solutions à un paramètre z donnée par

$$t=-(b_4-2b_1+b_2), \quad y=b_2-b_1-2z, \quad x=b_1-3(b_2-b_1-2z)+3(b_4-2b_1+b_2)-5z,$$

c'est-à-dire, puisque $b_2=b_1+b_3$,

$$t=-b_4+b_1-b_3, \quad y=b_3-2z, \quad x=-2b_1+3b_4+z.$$

Exercice 4. Trouver les solutions de

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ 3y & + & 3t & & & + & z & = & 0 \\ -y & - & t & + & 2x & + & z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Correction 4. On commence le pivot de Gauss avec les opération $L_2 \leftarrow L_2-3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3+L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ & & & - & 3x & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Les 3 dernières lignes sont identiques, on se ramène donc à un système avec 2 équations et 4 inconnues :

$$\begin{cases} y + t + x + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$$

En choisissant z et t comme paramètres, on obtient alors une famille à deux paramètres de solutions données par $x = -\frac{2}{3}z$ et $y = -\frac{1}{3}z - t$.

Exercice 5. Étudier la convergence des suites :
1. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$;
2. $v_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$;
3. $w_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$.

Correction 5.

1.
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1+\frac{1}{n})} - \sqrt{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1+\frac{1}{n}} - 1) = +\infty.$$
La suite est donc divergente.

2. On a
$$-\frac{n}{n^2+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{n}{n^2+1}$$
donc d'après le théorème des gendarmes
$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0.$$
La suite est donc convergente et tend vers 0.

3. La suite w_n n'a pas de limite car $1/n$ tend vers 0 mais $(-1)^n$ oscille entre -1 et 1 selon la parité de n.

Exercice 6. On considère la suite définie par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation

$$u_{n+1} = 0.95u_n + 3.$$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = 60 - u_n.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0.95.
2. Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction 6.
1. On a $v_{n+1} = 60 - u_{n+1} = 60 - (0.95u_n + 3) = 57 - 0.95u_n = 0.95(60 - u_n)$ donc

$$v_{n+1} = 0.95v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0.95.
2. On a

$$v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10.$$

On a donc $v_n = 10 \times 0.95^n$.
3. Nous avons $u_n = 60 - v_n$ donc $u_n = 60 - 10 \times (0.95)^n$.
4. On sait que la limite à l'infini de q^n est 0 si q est strictement compris entre 0 et 1. Donc

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 60.$$