Corrigé du contrôle continu du 8 novembre 2016 [1]

Exercice 1. P, Q et R sont des assertions.

1. Donner la table de vérité de (P ou Q).
2. Donner la table de vérité de ($P \Rightarrow Q$).
3. En utilisant les tables de vérité, montrer que l'assertion "P ou (Q et R)" est équivalent à "(P ou Q) et (P ou R)".
4. Donner la table de vérité de ($P \Rightarrow$ (non Q)) et Q.

Correction 1. 1.

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

3.

P	Q	R	P ou Q	P ou R	(P ou Q) et (P ou R)	Q et R	P ou (Q et R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

1. inspiré en partie du site exo7

4.

P	Q	non Q	$P \Rightarrow$ non Q	$(P \Rightarrow$ non $Q)$ et Q
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	F

Exercice 2. Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Correction 2.

1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leqslant 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leqslant 0$, par exemple on peut prendre $y=-(x+1)$ et alors $x+y=x-x-1=-1 \leqslant 0$.
2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y=-x+1$ et alors $x+y=1>0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y \leqslant 0$.
3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ est fausse, par exemple $x=-1$, $y=0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x+y \leqslant 0$.
4. (d) est vraie, on peut prendre $x=-1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leqslant x$.

Exercice 3. a) Nier la proposition : "tous les habitants de Versailles qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".
b) Un père dit à son enfant "Si tu ne fais pas tes devoirs, alors tu ne joueras pas à Fifa". Que pouvez-vous en déduire (la réponse peut être "rien") si
- l'enfant joue à Fifa
- l'enfant ne joue pas à Fifa
- l'enfant ne fait pas ses devoirs
- l'enfant fait ses devoirs

Correction 3. a) “Il existe un habitant de Versailles qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans.”
b) Si
- l'enfant joue à Fifa : on peut dire qu'il a fait ses devoirs ;
- l'enfant ne joue pas à Fifa : on ne peut rien dire, car on ne sait pas si cela vient du fait qu'il n'ait pas fait ses devoirs.
- l'enfant ne fait pas ses devoirs : on peut dire qu'il ne jouera pas à Fifa ;
- l'enfant fait ses devoirs : on ne peut rien dire, car on ne sait pas si l'enfant a le droit de jouer s'il a bien fait ses devoirs (on sait juste qu'il n'a pas le droit de jouer s'il ne fait pas ses devoirs).

Exercice 4. Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon)$.

Correction 4.

1. "Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit." (bien sûr, cette dernière phrase est fausse, mais là n'est pas la question !)
2. "Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire."
3. $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha$ et $|5x - 7| \geqslant \varepsilon)$.

Exercice 5. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est bornée ;
2. f ne s'annule jamais ;
3. f n'est pas la fonction nulle ;
4. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
5. f n'est pas inférieure à g.

Correction 5.

1. $\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M$;
2. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq 0$;
3. $\exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \neq 0$;
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$;
5. $\exists x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > g(x)$.