Université de Versailles Saint-Quentin
Année 2016/2017
MA100 Semestre 1

Contrôle Continu 1 - Mardi 11 octobre 2016

Sans calculatrice ni document.
La propreté et la qualité de la copie seront évaluées.

Exercice 1

1) Calculer l'intégrale de la fonction $f_1(x) = (1/x)\ln x$ entre 1 et e.
2) Même question avec la fonction $f_2(x) = x \ln x$.
3) Calculer l'intégrale de la fonction $f_3(t) = \sin(3t)$ entre 0 et π.

Corrigé succinct.

1) Une primitive de la fonction $f_1(x) = (1/x)\ln x$ est donnée par la fonction $F_1(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$. L'intégrale est donc égale à $F_1(e) - F_1(1) = \frac{1}{2}$.
2) En utilisant une formule d'intégration par partie, une primitive de la fonction $f_2(x) = x\ln x$ est donnée par la somme d'une primitive de la fonction $-x/2$ et de la fonction $\frac{x^2}{2}\ln x$. On obtient alors que l'intégrale est égale à $\frac{e^2+1}{4}$.
3) Une primitive de la fonction $f_3(t) = \sin(3t)$ est donnée par la fonction $F_3(x) = -\frac{1}{3}\cos(3t)$. L'intégrale est donc égale à $F_3(\pi) - F_3(0) = 1/3 + 1/3 = 2/3$.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x - 1 - e^x, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}}.$$

Corrigé succinct.

En posant $f(x) = \sqrt{1-x}$, on a $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} x - 1 - e^x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = (+\infty) \times (1 - 0 - (+\infty)) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{1+5/x}-\sqrt{5}/\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+5/x} - \sqrt{5}/\sqrt{x} = 1.$$

Exercice 3

1) Donner pour $x > 0$ la forme générale d'une solution de l'équation différentielle

$$x^2 y' + xy = 1 + x^2,$$

puis donner la solution qui prend la valeur 1 en $x = 1$.
2) On considère l'équation différentielle

$$y' + y = x.$$

a) Trouver une solution particulière de la forme $y(x) = ax + b$.
b) Donner la forme générale d'une solution.
c) Donner la solution qui prend la valeur 0 en $x = 1$.

Corrigé succinct.
1) La résolution de l'équation homogène donne $y(x) = K/x$ où K est une constante. La méthode de la variation de la constante donne alors la forme générale d'une solution de l'équation, c'est-à-dire $y(x) = k/x + x/2 + \ln(x)/x$ où k est une constante. On retrouve bien la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation. On fixe ensuite k pour que $y(1) = 1$ ce qui donne $k = 1/2$.
2) a) Une solution particulière de la forme $y(x) = ax + b$ est telle que $y'(x) = a$ et vérifie donc l'équation $1 + ax + b = x$ pour tout x, ce qui donne en identifiant les coefficients des polynômes $a = 1$ et $b = -1$. Une solution particulière de l'équation est donc $y(x) = x - 1$.
b) La résolution de l'équation homogène donne $y(x) = Ke^{-x}$ où K est une constante. La forme générale d'une solution de l'équation est donc $y(x) = Ke^{-x} + x - 1$ où K est une constante.
c) On fixe ensuite K pour que $y(1) = 0$ ce qui donne $K = 0$.

Exercice 4
Soit la fonction f définie par $f(x, y) = e^{y \ln x}$. Donner le domaine de définition de f et calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Corrigé succinct.
La fonction f est définie pour tout $x > 0$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x} e^{y \ln x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(x) e^{y \ln x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1 + y \ln(x)}{x} e^{y \ln x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{y(y-1)}{x^2} e^{y \ln x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \ln^2(x) e^{y \ln x}.$$