

## Couplage de deux systèmes de la dynamique des gaz

A. Ambroso<sup>†</sup>, C. Chalons<sup>‡</sup>, F. Coquel<sup>‡</sup>, E. Godlewski<sup>‡</sup>, P.-A. Raviart<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>CEA-Saclay  
F-91191 Gif-sur-Yvette, France  
annalisa.ambroso@cea.fr

<sup>‡</sup>Université Pierre et Marie Curie-Paris 6  
Laboratoire Jacques-Louis Lions (UMR 7598 CNRS)  
Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05, France  
chalons@math.jussieu.fr, coquel@ann.jussieu.fr, godlewski@ann.jussieu.fr, raviart@ann.jussieu.fr

### Résumé :

*Dans la modélisation et la simulation des systèmes complexes, il est souvent nécessaire d'utiliser des modèles adaptés à chaque composante afin de prendre en compte leur comportement spécifique. Dès lors, un couplage de ces différents modèles doit être effectué pour obtenir une description complète et cohérente du système dans sa globalité. Dans ce travail, on se propose de coupler deux modèles de la dynamique des gaz eulérienne en une dimension d'espace, et d'étendre à ce contexte la méthode double-flux proposée par Abgrall et Karni [3]. Des expériences numériques illustreront le bien-fondé de l'approche.*

### Abstract :

*When modelling and simulating complex systems, one often needs to use specific models for each component to take into account their specific behavior. We are thus led to couple these models in order to get a complete and coherent description of the system as a whole. This study is devoted to the coupling of two systems of gaz dynamics written in eulerian coordinates, when extending to this setting the two-flux method proposed by Abgrall and Karni [3]. Some numerical evidences will justify the validity of our approach.*

### Mots-clefs :

**Couplage de modèles, Dynamique des gaz, Volumes finis, Méthode double-flux**

## 1 Introduction

Le cadre général de ce travail est l'étude numérique du couplage de modèles hydrodynamiques d'équations aux dérivées partielles. La véritable motivation concerne la simulation du fonctionnement de systèmes complexes qui nécessitent l'utilisation de plusieurs modèles pour décrire finement les comportements spécifiques à chaque composante. C'est le cas par exemple dans un réacteur à eau sous pression : l'écoulement du fluide de refroidissement peut être décrit par un modèle laminaire 1D dans les canalisations, et par un modèle turbulent 3D dans le cœur du réacteur. La description du dispositif complet s'obtient alors par un couplage des différents modèles utilisés au niveau d'interfaces fixes. Des situations similaires apparaissent dans l'approximation numérique des systèmes multifluides : dans ce contexte, la dynamique de l'écoulement est celle de deux fluides possédant des lois d'état différentes et couplés au niveau d'une interface physique en mouvement.

D'une manière générale, la problématique du couplage soulève des questions intéressantes mais difficiles. D'un point de vue théorique tout d'abord, la principale difficulté consiste à comprendre comment lier les systèmes devant être couplés afin d'obtenir une description cohérente

de l'écoulement vu dans sa globalité. En d'autres termes, il s'agit de définir des conditions dites de transmission permettant de préciser les informations devant être échangées par deux systèmes au niveau d'une interface de couplage. Nous n'aborderons pas ici l'étude de ces conditions pour laquelle nous renvoyons le lecteur à [1], [2]. D'un point de vue numérique maintenant, il s'agit de forcer la validité des conditions de transmission au niveau discret. Dans [1], les auteurs ont analysé et justifié dans le cas d'une équation scalaire la méthode *double flux* récemment proposée par Abgrall et Karni [3] et initialement dédiée à la simulation numérique des écoulements multifluides.

Afin de mettre en avant les principales difficultés liées à l'extension de cette approche au couplage de systèmes généraux, le présent travail se propose d'étudier numériquement le couplage de deux systèmes de la dynamique des gaz en une dimension d'espace. D'apparence simple, cet exemple illustre déjà un certain nombre de problèmes. Nous montrerons au cours de l'exposé comment coupler deux systèmes de taille différente. Le choix des conditions de transmission sera ici motivé par des considérations physiques. Des expériences numériques illustreront le bien-fondé de l'approche proposée.

## 2 Position du problème

On se propose d'étudier le couplage de deux systèmes de la dynamique des gaz écrits en coordonnées eulériennes et notés  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$ . Les équations d'évolution trouvent la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E + p)u = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Elles représentent la conservation de la masse  $\rho$ , de la quantité de mouvement  $\rho u$  et de l'énergie totale  $\rho E$ . Les propriétés thermodynamiques sont données par une équation d'état générale

$$p = p(\rho, \varepsilon), \quad \rho \varepsilon = \rho E - \frac{1}{2} \rho u^2, \quad (2)$$

dépendant du système considéré. On notera  $p_1 = p_1(\rho, \varepsilon)$  (respectivement  $p_2 = p_2(\rho, \varepsilon)$ ) la relation de fermeture associée au système  $\mathbf{S}_1$  (respectivement  $\mathbf{S}_2$ ). Pour des fluides parfaits par exemple, l'équation d'état est  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$  où  $\gamma$  représente le rapport des chaleurs spécifiques. On notera dans ce cas  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les coefficients associés aux systèmes  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$ .

En introduisant la forme condensée suivante pour le système  $\mathbf{S}_i$ ,  $i = 1, 2$  :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho E)^T,$$

le problème du couplage des systèmes  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  se pose de la manière suivante. On suppose que l'écoulement considéré est idéalement décrit par le système  $\mathbf{S}_1$  dans le domaine  $\Omega_1 = \{x < 0, t > 0\}$  et par le système  $\mathbf{S}_2$  dans le domaine  $\Omega_2 = \{x > 0, t > 0\}$ . Il s'agit donc de résoudre

le problème suivant :

$$\text{Domaine } \Omega_1 = \{x < 0, t > 0\}$$

Système  $S_1$  :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$\text{Domaine } \Omega_2 = \{x > 0, t > 0\}$$

Système  $S_2$  :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_2(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

(3)

Il reste maintenant à préciser comment coupler ces deux systèmes au niveau de l'interface fixe  $x = 0$ . D'un point de vue physique, une méthode naturelle viserait à imposer la continuité du flux  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  au niveau de l'interface afin d'assurer la conservation de  $\rho$ ,  $\rho u$  et  $\rho E$  dans le problème couplé. Une autre approche tout aussi naturelle proposerait quant à elle d'assurer, dans la mesure du possible, la continuité de variables physiques telles que la vitesse  $u$  et la pression  $p$  à l'interface de couplage. Dans la section suivante, nous mettons en évidence sur un exemple très simple une incompatibilité entre ces deux méthodes de couplage. Nous serons alors amenés à faire un choix avant d'aborder le traitement numérique du problème de couplage considéré.

### 3 Etude d'un profil uniforme

Dans cette section, nous considérons un profil initial constant pour le problème de couplage (3). Par constant, nous entendons que chaque variable physique densité, vitesse et pression a une valeur constante et identique de part et d'autre de l'interface de couplage :  $(\rho, u, p)(x, t = 0) = (\rho^0, u^0, p^0)$  pour  $x < 0$  et aussi pour  $x > 0$ . Nous supposons  $u^0 \neq 0$ . Ce profil initial étant physiquement stable, on se propose d'examiner la conservation de l'énergie totale  $\rho E$  pour la solution stationnaire associée. Notons tout d'abord que les lois d'état  $p_1(\rho, \varepsilon)$  et  $p_2(\rho, \varepsilon)$  étant distinctes à gauche et à droite de l'interface, les valeurs des énergies internes correspondantes  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont différentes. Pour des fluides parfaits par exemple, nous avons

$$\varepsilon_1 = \frac{p^0}{\gamma_1 - 1} \neq \varepsilon_2 = \frac{p^0}{\gamma_2 - 1}.$$

Une évaluation de la quantité  $\partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E + p)u$  en moyenne sur le volume élémentaire  $V = [-1/2, 1/2] \times [0, T]$  avec  $T > 0$  donne immédiatement la valeur

$$A(T) - A(0) + B(1/2) - B(-1/2) = \rho^0 u^0 p^0 \left( \frac{1}{\gamma_2 - 1} - \frac{1}{\gamma_1 - 1} \right) T \neq 0, \quad (4)$$

avec

$$A(t) = \int_{-1/2}^{1/2} (\rho E)(x, t) dx \quad \text{et} \quad B(x) = \int_0^T (\rho E u + p u)(x, t) dt.$$

Nous observons donc que l'énergie totale  $\rho E$  n'est pas conservée sur le domaine  $[-1/2, 1/2]$  entre les instants  $t = 0$  et  $t = T$ . Des calculs similaires montrent en revanche que  $\rho$  et  $\rho u$  sont conservés. Sur la base de cet exemple, il n'est donc pas possible de préserver la continuité de la vitesse et de la pression au niveau de l'interface, tout en conservant l'énergie totale. Bien

entendu, ce résultat persiste pour un profil initial associé à une onde de matière (*i.e.* présentant éventuellement une discontinuité en densité). Dans la section suivante, nous faisons le choix de proposer un schéma numérique conservant autant que possible la densité et la quantité de mouvement, et préservant les profils uniformes. Nous décidons donc d'abandonner la conservation de l'énergie totale.

#### 4 La méthode double-flux

Dans cette section, nous décrivons la méthode double-flux pour le problème de couplage posé. Nous étendons à ce contexte la stratégie proposée dans [3]. Il s'agit d'une méthode de type volumes finis. On considère pour cela un maillage formé à partir d'un pas d'espace  $\Delta x$ , d'un pas de temps  $\Delta t$ , et des points  $x_j = j\Delta x$  et  $t^n = n\Delta t$ , et on cherche à chaque instant  $t^n$  une valeur moyenne de la solution  $\mathbf{u}$  sur la cellule  $\mathcal{C}_{j+1/2} = [x_j, x_{j+1}]$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . On note que pour  $j < 0$  (respectivement  $j \geq 0$ ), la cellule  $\mathcal{C}_{j+1/2}$  est située dans le domaine associé à  $\Omega_1$  (respectivement  $\Omega_2$ ).

Dans ce contexte, on se donne deux fonctions flux numérique  $\mathbf{g}_1$  et  $\mathbf{g}_2$  pour approcher  $\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{f}_2$ , et on considère les schémas conservatifs à 3-points suivants (par souci de simplicité et sans aucune restriction) pour discrétiser les systèmes  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j-1/2}^{n+1} &= \mathbf{u}_{j-1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{g}_{1,j} - \mathbf{g}_{1,j-1}) \quad \underline{j \leq 0}, \\ \mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} &= \mathbf{u}_{j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{g}_{2,j+1} - \mathbf{g}_{2,j}), \quad \underline{j \geq 0}, \end{aligned} \quad (5)$$

avec pour tout  $j \neq 0$  :

$$\mathbf{g}_{1,j} = \mathbf{g}_1(\mathbf{u}_{j-1/2}^n, \mathbf{u}_{j+1/2}^n), \quad \mathbf{g}_{2,j} = \mathbf{g}_2(\mathbf{u}_{j-1/2}^n, \mathbf{u}_{j+1/2}^n). \quad (6)$$

Le couplage des systèmes  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  au niveau numérique se fait ici par l'évaluation des quantités  $\mathbf{g}_{1,0}$  et  $\mathbf{g}_{2,0}$ . Il s'agit de préciser l'information devant être transmise au niveau de l'interface à chacun des systèmes. Conformément à la section précédente, nous proposons que chaque système transmette à son homologue ses variables primitives  $(\rho, u, p)$ , ce qui se traduit par

$$\mathbf{g}_{1,0} = \mathbf{g}_1(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \bar{\mathbf{u}}_{1/2}^n), \quad \mathbf{g}_{2,0} = \mathbf{g}_2(\bar{\mathbf{u}}_{-1/2}^n, \mathbf{u}_{1/2}^n), \quad (7)$$

avec

$$\bar{\mathbf{u}}_{1/2}^n = (\rho_{1/2}^n, (\rho u)_{1/2}^n, (\overline{\rho E})_{1/2}^n), \quad \text{et} \quad (\overline{\rho E})_{1/2}^n = \frac{1}{2} \frac{(\rho u)_{1/2}^n{}^2}{\rho_{1/2}^n} + \rho_{1/2}^n \varepsilon_1(\rho_{1/2}^n, p_{1/2}^n),$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{-1/2}^n = (\rho_{-1/2}^n, (\rho u)_{-1/2}^n, (\overline{\rho E})_{-1/2}^n), \quad \text{et} \quad (\overline{\rho E})_{-1/2}^n = \frac{1}{2} \frac{(\rho u)_{-1/2}^n{}^2}{\rho_{-1/2}^n} + \rho_{-1/2}^n \varepsilon_2(\rho_{-1/2}^n, p_{-1/2}^n).$$

Notons bien que  $(\overline{\rho E})_{1/2}^n \neq (\rho E)_{1/2}^n$  et  $(\overline{\rho E})_{-1/2}^n \neq (\rho E)_{-1/2}^n$ . Dans le cas de gaz parfaits, nous avons par exemple

$$(\overline{\rho E})_{1/2}^n = \frac{1}{2} \frac{(\rho u)_{1/2}^n{}^2}{\rho_{1/2}^n} + \frac{p_{1/2}^n}{\gamma_1 - 1} \neq (\rho E)_{1/2}^n = \frac{1}{2} \frac{(\rho u)_{1/2}^n{}^2}{\rho_{1/2}^n} + \frac{p_{1/2}^n}{\gamma_2 - 1}.$$

Nous observerons dans la section suivante qu'une transmission des variables conservatives  $(\rho, \rho u, \rho E)$  (obtenue en remplaçant  $\bar{\mathbf{u}}_{1/2}^n$  par  $\mathbf{u}_{1/2}^n$  et  $\bar{\mathbf{u}}_{-1/2}^n$  par  $\mathbf{u}_{-1/2}^n$  dans (7)) ne permet pas

de préserver les ondes de matière isolées (et donc les profils constants étudiés dans la section précédente). Notons également que le schéma numérique obtenu n'est pas conservatif en  $\rho$ ,  $\rho u$  et  $\rho E$  puisqu'en général  $\mathbf{g}_1(\mathbf{u}_{-1/2}^n, \bar{\mathbf{u}}_{1/2}^n) \neq \mathbf{g}_2(\bar{\mathbf{u}}_{-1/2}^n, \mathbf{u}_{1/2}^n)$ . Concernant la masse et la quantité de mouvement, les erreurs de conservation se sont révélées être non significatives (voir également [3]). Soulignons toutefois qu'il est possible de construire un schéma conservatif en  $\rho$  et  $\rho u$  (au sens strict du terme) et préservant les ondes de matière par le biais d'une approche Lagrange+Projection. Nous renvoyons pour cela le lecteur à [4].

## 5 Tests numériques

Les exemples suivants illustrent numériquement le comportement de la méthode double-flux. Nous considérons pour cela des lois de gaz parfait associées aux coefficients  $\gamma_1 = 1.4$  et  $\gamma_2 = 1.6$ . Les grilles utilisées contiennent 200 points ( $\Delta x = 0.005$ ).

Nous étudions tout d'abord le cas d'un profil initial constant avec les valeurs  $\rho^0 = u^0 = p^0 = 1$ . La figure 1 représente les profils en vitesse et pression obtenus avec les deux versions de la méthode, suivant le choix des variables transmises à l'interface. Nous observons comme cela était attendu que seule une transmission des variables primitives permet de préserver l'état stationnaire. Le même phénomène est observé dans le cas d'une onde de matière quelconque. La figure 2 illustre quant à elle la perte relative de conservation de l'énergie totale mise en évidence dans la section 3.

L'expérience suivante explique le comportement du problème de couplage lorsqu'une onde de détente provenant du domaine de gauche vient frapper l'interface de couplage. Nous observons sur la figure 3 que le changement de loi d'état génère une onde réfléchie. La figure 4 met en évidence une perte d'énergie totale lorsque l'onde simple heurte l'interface de couplage.

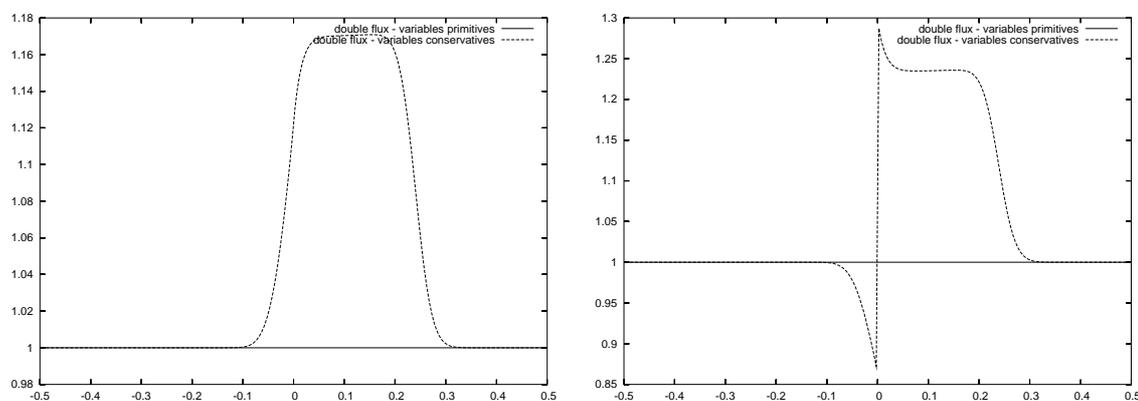


FIG. 1 – Etat initial constant : vitesse et pression

## Références

- [1] E. Godlewski and P.-A. Raviart. The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws : I. The scalar case. *Numer. Math.*, 97(1) : 81–130, 2004.
- [2] E. Godlewski, K.-C. Le Thanh, and P.-A. Raviart. The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws : II. The case of systems. *M2AN*, to appear.

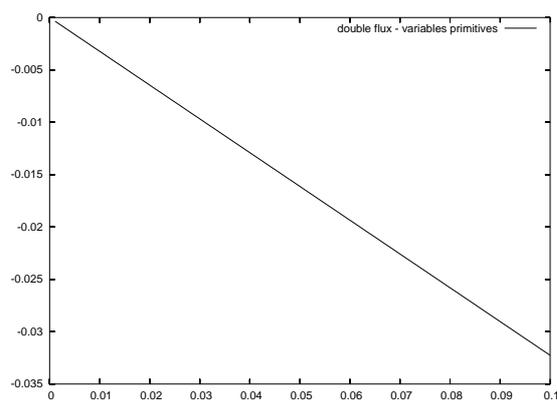


FIG. 2 – Etat initial constant : erreur de conservation sur l'énergie totale par rapport au temps

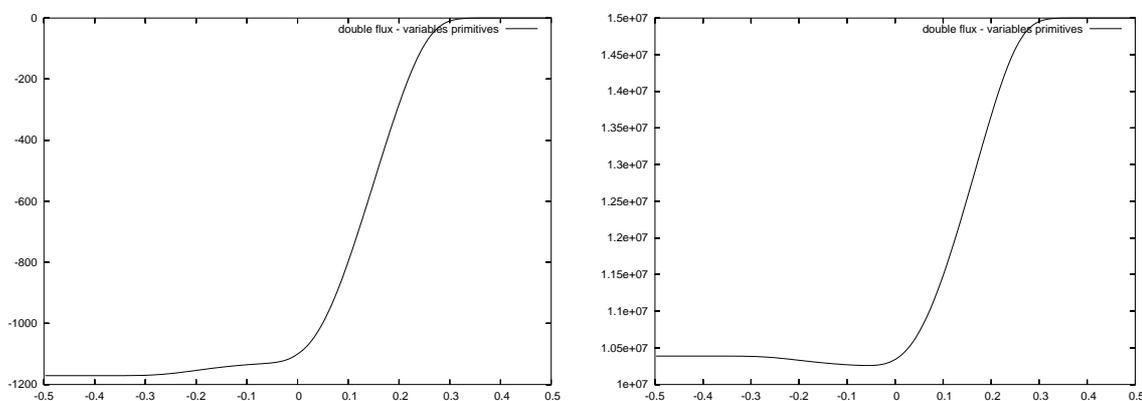


FIG. 3 – Onde de détente : vitesse et pression

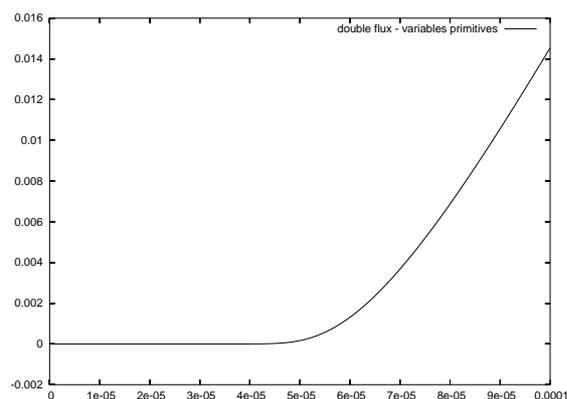


FIG. 4 – Onde de détente : erreur de conservation sur l'énergie totale par rapport au temps

[3] R. Abgrall and S. Karni. Computations of Compressible multifluids. *J. Comput. Phys.*, 169 : 594–623, 2001.

[4] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P.-A. Raviart, and J.-M.

Hérard. Coupling of multiphase flow models. proceedings of Nureth11, Avignon, France, 2005.