

Construction de schémas de type Godunov pour les systèmes hyperboliques avec terme source

Groupe de Travail « Couplage de modèles en thermohydraulique »*

Résumé

On présente dans ce rapport un travail issu de la collaboration entre le CEA Saclay et le Laboratoire Jacques-Louis Lions. Nous nous intéressons à l'approximation numérique des équations d'Euler avec termes source de gravité et de friction. Lorsque le coefficient de friction tend vers l'infini, ce modèle devient un modèle de type Darcy généralisé. Le schéma que nous proposons est compatible avec ce comportement asymptotique, au sens où, quand le coefficient de friction tend vers l'infini, le schéma devient un schéma numérique naturel pour le modèle de type Darcy généralisé. Plusieurs tests numériques illustrent le bon comportement de ce schéma.

abstract

We present a joint work developed within a collaboration between CEA Saclay and Laboratoire Jacques-Louis Lions. We are interested in the numerical approximation of the gas dynamics equations with gravity and friction source terms. When the friction coefficient tends to infinity, this model becomes a generalized Darcy model. The numerical scheme we propose is asymptotic preserving, in the sense that it becomes a natural numerical scheme for the generalized Darcy model when the friction coefficient tends to infinity. Several numerical results illustrate the good behavior of the new scheme.

*Ce groupe de travail est composé de : Annalisa Ambroso, Benjamin Boutin, Christophe Chalons, Frédéric Coquel, Thomas Galié, Edwige Godlewski, Frédéric Lagoutière, Pierre-Arnaud Raviart et Nicolas Seguin.

1 Présentation du problème.

On considère un système hyperbolique non linéaire avec terme source

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

et le problème de Riemann (généralisé) associé correspondant à la condition initiale

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & x < 0, \\ \mathbf{U}_d, & x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

On notera $\mathbf{W}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ la solution de (1),(2). Un schéma de type Godunov de résolution du problème de Cauchy pour le système (1) consiste à se donner un “solveur de Riemann approché” $\widetilde{\mathbf{W}}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$, c’est à dire une approximation de $\mathbf{W}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$, et à lui associer le schéma numérique

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n) dx + \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) dx \right\}. \quad (3)$$

Le problème est de construire des solveurs de Riemann approchés de façon que le schéma de Godunov (3) ait de bonnes propriétés de type *équilibre* ou de type *“asymptotic preserving”*. Par propriété d’équilibre, on désire que le schéma (3) préserve dans un sens à préciser les solutions stationnaires ou d’équilibre de (1), c’est à dire vérifiant

$$\frac{d}{dx} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad (4)$$

En ce qui concerne la propriété “asymptotic preserving”, on désire que le schéma (3) préserve le comportement asymptotique en temps des solutions de (1). Cette notion sera précisée sur des exemples.

Dans ce rapport, on suivra l’approche utilisée par G. Gallice pour construire des solveurs de Riemann approchés conduisant à des schémas équilibre (cf. [Gal02b] et [Gal02a]) et on la comparera à une approche de type relaxation (cf. par exemple [Bou04]) et à une approche introduite par P. Cargo et A.Y. LeRoux (cf. [CL94]). On l’appliquera à l’approximation du système de la dynamique des gaz avec termes de friction et de gravité.

On peut citer en outre des travaux très proches de cette problématique, notamment ceux de Enaux [Ena07] et de Bouchut *et al.* [BOP07].

2 Les solveurs de Riemann approchés.

Dans toute la suite, on fera les hypothèses classiques suivantes :

- (i) La fonction flux \mathbf{F} (resp. le terme source \mathbf{S}) est une fonction de classe C^1 (resp. de classe C^0) d’un ouvert convexe Ω de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .
- (ii) Les valeurs propres $\lambda_k(\mathbf{U})$, $1 \leq k \leq n$, de la matrice Jacobienne $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}'(\mathbf{U})$ de la fonction flux \mathbf{F} sont réelles et les vecteurs propres (à droite) $\mathbf{R}_k(\mathbf{U})$, $1 \leq k \leq n$, correspondants forment une base de \mathbb{R}^n .

Par ailleurs, si (η, q) est un couple entropique composé d’une entropie $\eta = \eta(\mathbf{U})$ convexe et d’un flux d’entropie $q = q(\mathbf{U})$, c’est à dire tel que¹

$$q'(\mathbf{U}) = \eta'(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{U}), \quad (5)$$

¹On identifie ici les dérivées $\eta'(\mathbf{U})$ et $q'(\mathbf{U})$ à des vecteurs lignes.

on trouve que toute solution régulière de (1) vérifie

$$\partial_t \eta(\mathbf{U}) + \partial_x q(\mathbf{U}) = \sigma(\mathbf{U})$$

où

$$\sigma(\mathbf{U}) = \eta'(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad (6)$$

Nous nous intéresserons ici uniquement aux solutions entropiques de (1), c'est à dire vérifiant l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \eta(\mathbf{U}) + \partial_x q(\mathbf{U}) \leq \sigma(\mathbf{U}). \quad (7)$$

On désigne par $\mathbf{W}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ “la” solution entropique du problème de Riemann (1),(2). On note que, à la différence du problème homogène, une telle solution n'est plus auto-semblable. Néanmoins, en raison de l'invariance par translation du système (1), on remarque que “la” solution entropique de (1) avec la condition initiale

$$\mathbf{U}(x, t_0) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & x < x_0, \\ \mathbf{U}_d, & x > x_0 \end{cases}$$

n'est autre que

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{W}(x - x_0, t - t_0; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d).$$

On fait maintenant la remarque suivante : les lignes de discontinuité de $\mathbf{W}(x, t) = \mathbf{W}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ sont situées à l'intérieur du rectangle $(-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}) \times (0, \Delta t)$ pour $t \leq \Delta t$ et $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ assez petit de sorte que, en intégrant l'équation (1) (avec \mathbf{U} remplacé par \mathbf{W}) dans le rectangle $(-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}) \times (0, \Delta t)$, on obtient pour $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ assez petit la propriété suivante de \mathbf{W}

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \{\mathbf{W}(x, \Delta t) - \mathbf{W}(x, 0)\} dx + \int_0^{\Delta t} \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{W}(\frac{\Delta x}{2}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{W}(-\frac{\Delta x}{2}, t)) \right\} dt \\ = \int_0^{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \mathbf{S}(\mathbf{W}(x, t)) dx dt. \end{aligned}$$

Comme, pour $0 \leq t \leq \Delta t$,

$$\mathbf{W}(-\frac{\Delta x}{2}, t) = \mathbf{U}_g + O(\Delta t), \quad \mathbf{W}(\frac{\Delta x}{2}, t) = \mathbf{U}_d + O(\Delta t),$$

on trouve

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \mathbf{W}(x, \Delta t) dx &= \frac{\Delta x}{2} (\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_d) - \Delta t (\mathbf{F}(\mathbf{U}_d) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_g)) + \\ &+ \int_0^{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \mathbf{S}(\mathbf{W}(x, t)) dx dt + \Delta t O(\Delta x + \Delta t). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

On est ainsi amené à introduire la

Définition 1 Un solveur de Riemann approché $\widetilde{\mathbf{W}}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ de (1) est consistant avec la forme intégrale de (1) s'il existe une fonction $\widetilde{\mathbf{S}} = \widetilde{\mathbf{S}}(\xi, \tau; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ telle que

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) dx &= \frac{\Delta x}{2} (\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_d) - \Delta t (\mathbf{F}(\mathbf{U}_d) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_g)) + \\ &+ \Delta x \Delta t \widetilde{\mathbf{S}}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) \end{aligned} \right. \quad (9)$$

avec

$$\lim_{\substack{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \\ \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d \rightarrow \mathbf{U}}} \widetilde{\mathbf{S}}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad (10)$$

De la même façon, partant de l'inégalité d'entropie (7), on obtient par intégration sur $(-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}) \times (0, \Delta t)$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \{\eta(\mathbf{W}(x, \Delta t)) - \eta(\mathbf{W}(x, 0))\} dx + \\ & + \int_0^{\Delta t} \left\{ q(\mathbf{W}(\frac{\Delta x}{2}, t)) - q(\mathbf{W}(-\frac{\Delta x}{2}, t)) \right\} dt \leq \int_0^{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \sigma(\mathbf{W}(x, t)) dx dt \end{aligned}$$

soit

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \eta(\mathbf{W}(x, \Delta t)) dx &\leq \frac{\Delta x}{2} (\eta(\mathbf{U}_g) + \eta(\mathbf{U}_d)) - \Delta t (q(\mathbf{U}_d) - q(\mathbf{U}_g)) + \\ &+ \int_0^{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \sigma(\mathbf{W}(x, t)) dx dt + \Delta t O(\Delta x + \Delta t). \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Définition 2 Le solveur de Riemann approché $\widetilde{\mathbf{W}}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ est consistant avec la forme intégrale de la condition d'entropie (7) s'il existe une fonction $\tilde{\sigma}(\xi, \tau; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ telle que

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \eta(\widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t)) dx &\leq \frac{\Delta x}{2} (\eta(\mathbf{U}_g) + \eta(\mathbf{U}_d)) - \Delta t (q(\mathbf{U}_d) - q(\mathbf{U}_g)) + \\ &+ \Delta x \Delta t \tilde{\sigma}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

avec

$$\lim_{\substack{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \\ \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d \rightarrow \mathbf{U}}} \tilde{\sigma}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \sigma(\mathbf{U}). \quad (13)$$

On se donne désormais un pas d'espace Δx et un pas de temps Δt que l'on supposera constants pour simplifier. En posant

$$x_j = j\Delta x, j \in \mathbb{Z}, \quad t_n = n\Delta t, n \in \mathbb{N}$$

et en notant \mathbf{U}_j^n une approximation de $\mathbf{U}(x_j, t_n)$, on associe au solveur de Riemann approché $\widetilde{\mathbf{W}} = \widetilde{\mathbf{W}}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ le schéma (3). On dira que ce schéma (3) est de *type Godunov* si $\widetilde{\mathbf{W}}$ vérifie la propriété de consistance (9) et qu'il est *entropique* s'il vérifie de plus la la propriété (12).

Donnons une forme plus utilisable du schéma (3). On définit auparavant

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{2}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) dx, \\ \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) dx \end{cases} \quad (14)$$

de sorte que le schéma (3) s'écrit

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,+} + \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,-}). \quad (15)$$

Vérifions la

Proposition 1 *On suppose que le solveur de Riemann approché $\widetilde{\mathbf{W}}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ est consistant avec la forme intégrale de (1). Alors le schéma (3) associé s'écrit sous la forme conservative*

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{G}_{j+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{G}_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{\Delta t}{2}(\widetilde{\mathbf{S}}_{j-\frac{1}{2}}^n + \widetilde{\mathbf{S}}_{j+\frac{1}{2}}^n) \quad (16)$$

où

$$\mathbf{G}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1})) - \frac{\Delta x}{4\Delta t}((\mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^+) - (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^-)) \quad (17)$$

et

$$\widetilde{\mathbf{S}}_{j+\frac{1}{2}}^n = \widetilde{\mathbf{S}}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \quad (18)$$

Démonstration. On peut écrire (15) sous la forme

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t, \mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n) dx + \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} - \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,-})$$

c'est à dire en tenant compte de la propriété de consistance (10) et en utilisant la notation (18)

$$\begin{cases} \mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{U}_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-1}^n)) + \\ \quad + \Delta t \widetilde{\mathbf{S}}_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} - \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,-}). \end{cases} \quad (19)$$

De la même façon, on a

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t, \mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) dx - \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,+} - \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,+})$$

soit

$$\begin{cases} \mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n)) + \\ \quad + \Delta t \tilde{\mathbf{S}}_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,+} - \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,+}). \end{cases} \quad (20)$$

En sommant (19) et (20), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^{n+1} &= \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-1}^n)) + \\ &+ \frac{1}{4}((\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,+}) - (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,+}) - (\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,-}) + (\mathbf{U}_{j-1}^n - \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,-})) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2}(\tilde{\mathbf{S}}_{j-\frac{1}{2}}^n + \tilde{\mathbf{S}}_{j+\frac{1}{2}}^n) \end{aligned}$$

c'est à dire (16) si on définit $\mathbf{G}_{j+\frac{1}{2}}$ par (17).

De manière analogue on vérifie la

Proposition 2 *On suppose que le solveur de Riemann approché $\widetilde{\mathbf{W}}(x, t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ est consistant avec la forme intégrale de l'inégalité d'entropie (7). Alors on a*

$$\eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) \leq \eta(\mathbf{U}_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{q}_{j+\frac{1}{2}}^n - \tilde{q}_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{\Delta t}{2}(\tilde{\sigma}_{j-\frac{1}{2}}^n + \tilde{\sigma}_{j+\frac{1}{2}}^n) \quad (21)$$

où

$$\begin{cases} \tilde{q}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(q(\mathbf{U}_j) + q(\mathbf{U}_{j+1})) - \\ - \frac{\Delta x}{4\Delta t}((\eta(\mathbf{U}_{j+1}) - \eta(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^+)) - (\eta(\mathbf{U}_j) - \eta(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^-))) \end{cases} \quad (22)$$

et

$$\tilde{\sigma}_{j+\frac{1}{2}} = \tilde{\sigma}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}). \quad (23)$$

Démonstration. Elle est analogue à celle de la Proposition 1 à ceci près qu'elle utilise l'inégalité de Jensen. On déduit de (15)

$$\eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) \leq \frac{1}{2}(\eta(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,+}) + \eta(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,-}))$$

ce que l'on peut écrire

$$\eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) \leq \frac{1}{2}(\eta(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,-}) + \eta(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,+})) + \frac{1}{2}(\eta(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,-}) - \eta(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,-}))$$

Or on a toujours d'après l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^-) &= \eta\left(\frac{2}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j) dx\right) \\ &\leq \frac{2}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \eta(\widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j)) dx \end{aligned}$$

et de même

$$\eta(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^+) \leq \frac{2}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \eta(\widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j)) dx$$

de sorte que

$$\eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \eta(\widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)) dx + \frac{1}{2}(\eta(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,-}) - \eta(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,-})).$$

On a également

$$\eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \eta(\widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)) dx - \frac{1}{2}(\eta(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{n,+}) - \eta(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{n,+})).$$

La démonstration se termine comme précédemment en utilisant la propriété de consistance (12).

Dans toute la suite, il sera commode d'utiliser les notations suivantes

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{U}}^-(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \frac{2}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) dx, \\ \widetilde{\mathbf{U}}^+(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) dx, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_g) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_d)) - \\ - \frac{\Delta x}{4\Delta t}((\mathbf{U}_d - \widetilde{\mathbf{U}}^+(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)) - (\mathbf{U}_g - \widetilde{\mathbf{U}}^-(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d))) \end{cases} \quad (25)$$

de sorte que

$$\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^\pm = \widetilde{\mathbf{U}}^\pm(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}), \quad \mathbf{G}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{G}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}).$$

Remarque 1. Il convient de noter que

$$\mathbf{W}(x, \Delta t; \mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{U} + O(\Delta t) \neq \mathbf{U}$$

si bien que l'on a en général

$$\widetilde{\mathbf{W}}(x, \Delta t; \mathbf{U}, \mathbf{U}) \neq \mathbf{U}$$

d'où

$$\widetilde{\mathbf{U}}^\pm(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \neq \mathbf{U}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \neq \mathbf{F}(\mathbf{U}).$$

Passons à l'étude des propriétés d'équilibre d'un schéma de type Godunov. On note que, d'après (15), une solution stationnaire $(\mathbf{U}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ d'un tel schéma est caractérisée par

$$\mathbf{U}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^+ + \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^-) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (26)$$

relation qu'il faut comparer à l'analogie discret de (4) soit

$$\frac{1}{\Delta x}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_j)) = \tilde{\mathbf{S}}_{j+\frac{1}{2}} \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Pour que (26) ait lieu, il *suffit* de demander que

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^+ = \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^- \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

On dira "abusivement" que la suite $(\mathbf{U}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est solution d'équilibre du schéma de type Godunov si elle vérifie les relations (28). On obtient alors la

Proposition 3 Une solution d'équilibre vérifie (27) pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Étant donné une suite $(\mathbf{U}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, on pose

$$\bar{\mathbf{U}}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^+ + \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^-).$$

On a d'après (20)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_j &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}_j + \mathbf{U}_{j+1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_j)) + \\ &\quad + \Delta t \tilde{\mathbf{S}}_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^+) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_j &= \mathbf{U}_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_j)) + \Delta t \tilde{\mathbf{S}}_{j+\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{U}_j + \mathbf{U}_{j+1}). \end{aligned}$$

Si (\mathbf{U}_j) est solution d'équilibre, on a

$$\bar{\mathbf{U}}_j = \mathbf{U}_j = \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^+, \quad \mathbf{U}_{j+1} = \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^+$$

d'où la relation (27).

On dira que le schéma de type Godunov est un schéma d'équilibre si, pour toute condition initiale (\mathbf{U}_j) vérifiant la relation (27) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la solution du schéma est solution d'équilibre (c'est à dire vérifie (28)).

Il est clair que les relations (28) sont de vérification délicate du moins en général. On est ainsi amené à introduire une notion plus forte que la notion de solution d'équilibre mais de vérification plus aisée. On dira que (\mathbf{U}_j) est solution d'équilibre fort si on a pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{\mathbf{W}}(x, t; \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) = \begin{cases} \mathbf{U}_j, & x < 0, \\ \mathbf{U}_{j+1}, & x > 0. \end{cases} \quad (29)$$

Puisque cette propriété (29) entraîne trivialement les relations (28), une solution d'équilibre fort est solution d'équilibre. Le schéma de type Godunov sera qualifié de *schéma d'équilibre fort* s'il fournit pour toute condition initiale (\mathbf{U}_j) vérifiant la relation (27) pour $j \in \mathbb{Z}$ une solution d'équilibre fort.

Nous en venons maintenant à la construction effective de solveurs de Riemann approchés. Dans toute la suite, nous nous limiterons à considérer des *solveurs de Riemann simples* de la forme

$$\widetilde{\mathbf{W}}\left(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d\right) = \begin{cases} \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_g, & \frac{x}{t} < \lambda_1, \\ \mathbf{U}_k, & \lambda_{k-1} < \frac{x}{t} < \lambda_k, \quad k = 2, \dots, l, \\ \mathbf{U}_{l+1} = \mathbf{U}_d, & \frac{x}{t} > \lambda_l. \end{cases} \quad (30)$$

Il convient de noter que, dans le cas d'un solveur de Riemann simple, $\widetilde{\mathbf{W}}$ est une fonction auto-semblable comme pour un système homogène!

Proposition 4 *Le solveur de Riemann simple (30) est consistant avec la forme intégrale du système (1) dès qu'il existe une fonction $\widetilde{\mathbf{S}} = \widetilde{\mathbf{S}}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ vérifiant la propriété (10) et telle que*

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_d) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_g) - \Delta x \widetilde{\mathbf{S}}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \sum_{k=1}^l \lambda_k (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k). \quad (31)$$

Démonstration. Sous la condition C.F.L.

$$\max_{1 \leq k \leq l} |\lambda_k| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}, \quad (32)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \widetilde{\mathbf{W}}\left(\frac{x}{\Delta t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d\right) dx = \\ & = \left(\lambda_1 \Delta t + \frac{\Delta x}{2}\right) \mathbf{U}_g + \sum_{k=2}^l (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \Delta t \mathbf{U}_k + \left(\frac{\Delta x}{2} - \lambda_l \Delta t\right) \mathbf{U}_d = \\ & = \frac{\Delta x}{2} (\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_d) - \Delta t \sum_{k=1}^l \lambda_k (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k). \end{aligned}$$

En comparant avec (9)-(10) le résultat suit.

Proposition 5 *Le solveur de Riemann simple (30) est consistant avec la forme intégrale de l'inégalité d'entropie (7) s'il existe une fonction $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ vérifiant la propriété (13) et telle que*

$$q(\mathbf{U}_d) - q(\mathbf{U}_g) - \Delta x \tilde{\sigma}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) \leq \sum_{k=1}^l \lambda_k (\eta(\mathbf{U}_{k+1}) - \eta(\mathbf{U}_k)). \quad (33)$$

Démonstration. Toujours sous la condition C.F.L. (32), on a

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \eta(\tilde{\mathbf{W}}(\frac{x}{\Delta t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)) dx = \\ & = \frac{\Delta x}{2} (\eta(\mathbf{U}_g) + \eta(\mathbf{U}_d)) - \Delta t \sum_{k=1}^l \lambda_k (\eta(\mathbf{U}_{k+1}) - \eta(\mathbf{U}_k)). \end{aligned}$$

En comparant avec (12)-(13), on obtient le résultat.

Proposition 6 *Pour un solveur de Riemann simple (30), le flux numérique $G(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ est donné par*

$$G(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{U}_g) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_d) - \sum_{k=1}^l |\lambda_k| (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) \right\}. \quad (34)$$

Démonstration. On utilise l'expression (25) du flux numérique. Il s'agit alors de vérifier que

$$\frac{\Delta x}{2\Delta t} ((\mathbf{U}_d - \tilde{\mathbf{U}}^+(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)) - (\mathbf{U}_g - \tilde{\mathbf{U}}^-(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d))) = \sum_{k=1}^l |\lambda_k| (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k).$$

On montre d'abord que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^+ &= \tilde{\mathbf{U}}^+(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \frac{2}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \tilde{\mathbf{W}}(\frac{x}{\Delta t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) dx \\ &= \mathbf{U}_d - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^l \lambda_k^+ (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) \end{aligned}$$

où

$$\lambda_k^+ = \max(0, \lambda_k).$$

En effet, soit $m \in \{1, \dots, l\}$ tel que $\lambda_{m-1} \leq 0 < \lambda_m$ (avec $\lambda_0 = -\infty$); on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^+ &= \frac{2}{\Delta x} \left\{ \lambda_m \Delta t \mathbf{U}_m + \sum_{k=m}^{l-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \Delta t \mathbf{U}_{k+1} + \left(\frac{\Delta x}{2} - \lambda_l \Delta t \right) \mathbf{U}_d \right\} \\ &= \mathbf{U}_d - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=m}^l \lambda_k (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) = \mathbf{U}_d - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^l \lambda_k^+ (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k). \end{aligned}$$

On a de même

$$\tilde{\mathbf{U}}^- = \tilde{\mathbf{U}}^-(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \mathbf{U}_g - \frac{2\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^l \lambda_k^- (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k), \quad \lambda_k^- = \min(0, \lambda_k).$$

On en déduit que

$$(\mathbf{U}_d - \tilde{\mathbf{U}}^+) - (\mathbf{U}_g - \tilde{\mathbf{U}}^-) = \frac{2\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^l (\lambda_k^+ - \lambda_k^-) (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k)$$

$$= \frac{2\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^l |\lambda_k| (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k)$$

d'où le résultat.

Remarque 2. Lorsque $\mathbf{U}_g = \mathbf{U}_d = \mathbf{U}$, on a en vertu de (31)

$$\sum_{k=1}^l \lambda_k (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) = -\Delta x \tilde{\mathbf{S}}(\Delta x, \Delta t; \mathbf{U}, \mathbf{U})$$

de sorte que, à la différence du cas d'un système homogène, on n'a pas en général $\mathbf{U}_k = \mathbf{U}$, $1 \leq k \leq l$. Dans ces conditions, on trouve

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l |\lambda_k| (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) \neq \mathbf{F}(\mathbf{U}).$$

3 Le système de la dynamique des gaz avec termes de friction et de gravité.

Dans toute la suite de ce rapport, nous allons nous restreindre au cas modèle du système de la dynamique des gaz avec termes de friction et de gravité. *En coordonnées d'Euler*, ce système est de la forme

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p) = \varrho(g - \alpha\varphi(u)), \\ \partial_t(\varrho e) + \partial_x((\varrho e + p)u) = \varrho(gu - \alpha\psi(u)) \end{cases} \quad (35)$$

où $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ sont des termes qui modélisent la friction et $\alpha > 0$ est un coefficient de friction *constant* que l'on sera amené à supposer "très grand" par la suite. Pour fixer les idées, les termes de friction seront pris de la forme

$$\begin{cases} \varphi(u) = |u|^\chi u, \\ \psi(u) = a|u|^{\chi+2}, \quad 0 \leq a \leq 1 \end{cases} \quad (36)$$

où typiquement $\chi = 0$ (friction linéaire) ou $\chi = 1$ (friction quadratique) et a est une constante. Enfin g est une constante qui représente l'accélération de la pesanteur.

En coordonnées de Lagrange, le système (35) devient

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t u + \partial_m p = g - \alpha\varphi(u), \\ \partial_t e + \partial_m(pu) = gu - \alpha\psi(u) \end{cases} \quad (37)$$

où $\tau = \frac{1}{\varrho}$ et m désigne une variable de masse. Si on introduit l'entropie *physique* spécifique s telle que

$$Tds = d\varepsilon + pd\tau,$$

on vérifie immédiatement que, pour une solution régulière (c'est à dire sans choc) de (37), l'équation de conservation de l'énergie peut s'écrire

$$T\partial_t s = \alpha(\varphi(u)u - \psi(u)) = (1-a)\alpha|u|^{\chi+2}. \quad (38)$$

En particulier, pour $a = 1$, il n'y a pas de dissipation d'entropie due à la friction tandis que, pour $a = 0$ (i.e., pour $\psi(u) = 0$), toute la friction est transformée en énergie interne. On note que, dans le cadre des applications aux écoulements diphasiques rencontrés au C.E.A., le modèle pertinent correspond à $\chi = 1$ et $a = 1$ (i.e., $\psi(u) = \varphi(u)u$).

On passe à l'étude des solutions stationnaires du système (37). Elles sont caractérisées par

$$\begin{cases} \frac{du}{dm} = 0, \\ \frac{dp}{dm} = g - \alpha\varphi(u), \\ \frac{d}{dm}(pu) = gu - \alpha\psi(u) \end{cases} \quad (39)$$

soit

$$\begin{cases} u = Cte, \\ \frac{dp}{dm} = g - \alpha\varphi(u), \\ u\frac{dp}{dm} = gu - \alpha\psi(u). \end{cases}$$

On distingue alors les cas $u = 0$ et $u \neq 0$. D'une part

$$\begin{cases} u = 0, \\ \frac{dp}{dm} = g \end{cases} \quad (40)$$

fournit une solution stationnaire. D'autre part, pour $u \neq 0$, on doit avoir

$$\frac{dp}{dm} = g - \alpha\varphi(u) = g - \alpha\frac{\psi(u)}{u}$$

soit

$$\psi(u) = \varphi(u)u.$$

Autrement dit, *uniquement dans le cas* $a = 1$,

$$\begin{cases} u = Cte \neq 0, \\ \frac{dp}{dm} = g - \alpha\varphi(u) \end{cases} \quad (41)$$

fournit une solution stationnaire de (39).

L'étude des solutions stationnaires du système (35) se révèle un peu plus délicate. Elles sont caractérisées par

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\varrho u) = 0, \\ \frac{d}{dx}(\varrho u^2 + p) = \varrho(g - \alpha\varphi(u)), \\ \frac{d}{dx}((\varrho e + p)u) = \varrho(gu - \alpha\psi(u)). \end{cases} \quad (42)$$

On obtient donc

$$\begin{cases} \varrho u = Cte, \\ \varrho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = \varrho(g - \alpha\varphi(u)), \\ \varrho u \frac{de}{dx} + \frac{d}{dx}(pu) = \varrho(gu - \alpha\psi(u)). \end{cases}$$

On se limite ici à considérer les solutions stationnaires correspondant à $u = Cte$. On distingue à nouveau les cas $u = 0$ et $u \neq 0$. D'une part

$$\begin{cases} u = 0, \\ \frac{dp}{dx} = \varrho g \end{cases} \quad (43)$$

fournit une solution stationnaire classique. Par ailleurs, pour $u \neq 0$, on obtient

$$\begin{cases} \varrho = Cte, \\ \frac{dp}{dx} = \varrho(g - \alpha\varphi(u)), \\ \varrho u \frac{d\varepsilon}{dx} + u \frac{dp}{dx} = \varrho(gu - \alpha\psi(u)) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \varrho = Cte, \\ \frac{dp}{dx} = \varrho(g - \alpha\varphi(u)), \\ u \frac{d\varepsilon}{dx} = \alpha(u\varphi(u) - \psi(u)). \end{cases} \quad (44)$$

Si $\psi(u) = \varphi(u)u$, on obtient $\frac{d\varepsilon}{dx} = 0$ de sorte que

$$p = p(\varrho, \varepsilon) = Cte$$

Ainsi, dans le cas $a = 1$,

$$\begin{cases} \varrho = Cte, & \varepsilon = Cte, \\ g = \alpha\varphi(u) \end{cases} \quad (45)$$

fournit la solution stationnaire. Par contre, pour $a < 1$, on obtient une équation non triviale pour $\varepsilon = \varepsilon(x)$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \alpha(\varphi(u) - \frac{\psi(u)}{u}).$$

Pour fixer les idées, plaçons nous dans le cas d'un gaz parfait polytropique pour lequel $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$. Alors (44) donne

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{\gamma - 1}(g - \alpha\varphi(u)) = \alpha(\varphi(u) - \frac{\psi(u)}{u})$$

de sorte que u est solution de

$$g = \alpha(\gamma\varphi(u) - (\gamma - 1)\frac{\psi(u)}{u}) = \alpha(\gamma - (\gamma - 1)a)\varphi(u)$$

soit

$$u = \varphi^{-1}\left(\frac{g}{\alpha(\gamma - (\gamma - 1)a)}\right)$$

avec

$$\varphi^{-1}(v) = |v|^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}v. \quad (46)$$

On passe au comportement asymptotique des solutions de (35) ou (37) lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. On commence par le système (37). On postule des développements asymptotiques en $\frac{1}{\alpha}$:

$$\begin{cases} \tau = \tau^0 + \frac{1}{\alpha}\tau^1 + \dots, \\ u = u^0 + \frac{1}{\alpha}u^1 + \dots, \\ \varepsilon = \varepsilon^0 + \frac{1}{\alpha}\varepsilon^1 + \dots \end{cases} \quad (47)$$

Avec l'équation d'état $p = p(\tau, \varepsilon)$, on trouve

$$p = p^0 + \frac{1}{\alpha}p^1 + \dots, \quad p^0 = p(\tau^0, \varepsilon^0)$$

tandis que

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2 = e^0 + \frac{1}{\alpha}e^1 + \dots, \quad e^0 = \varepsilon^0 + \frac{1}{2}(u^0)^2.$$

En remplaçant dans (37) τ , u et ε par leurs développements (47), on obtient

$$\begin{cases} \partial_t\tau^0 - \partial_m u^0 + \frac{1}{\alpha}(\partial_t\tau^1 - \partial_m u^1) + \dots = 0, \\ \partial_t u^0 + \partial_m p^0 + \frac{1}{\alpha}(\partial_t u^1 + \partial_m p^1) + \dots = -\alpha\varphi(u^0) + g - \varphi'(u^0)u^1 + \dots, \\ \partial_t e^0 + \partial_m(p^0 u^0) + \frac{1}{\alpha}(\partial_t e^1 + \partial_m(pu)^1) + \dots = -\alpha\psi(u^0) + gu^0 - \psi'(u^0)u^1 + \dots \end{cases}$$

Les termes en $O(\alpha)$ donnent

$$\begin{cases} \varphi(u^0) = 0, \\ \psi(u^0) = 0 \end{cases}$$

soit $u^0 = 0$ tandis que les termes en $O(1)$ s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t \tau^0 - \partial_m u^0 = 0, \\ \partial_t u^0 + \partial_m p^0 = g - \varphi'(u^0)u^1, \\ \partial_t \varepsilon^0 + \partial_m (p^0 u^0) = g u^0 - \psi'(u^0)u^1 \end{cases}$$

c'est à dire puisque $u^0 = 0$

$$\begin{cases} \tau^0 = \tau^0(m), \\ \partial_m p^0 = g - \varphi'(0)u^1, \\ \partial_t \varepsilon^0 = -\psi'(0)u^1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^0 = \varepsilon^0(m). \end{cases}$$

Lorsque $\chi = 0$ (friction linéaire), on a $\varphi'(0) = 1$ d'où

$$\begin{cases} \tau^0 = \tau^0(m), & \varepsilon^0 = \varepsilon^0(m) \\ \frac{dp^0}{dm} = g - u^1. \end{cases}$$

Par contre, lorsque $\chi > 0$, on a $\varphi'(0) = 0$ d'où

$$\begin{cases} \tau^0 = \tau^0(m), & \varepsilon^0 = \varepsilon^0(m) \\ \frac{dp^0}{dm} = g \end{cases}$$

ce qui implique que la donnée initiale est "bien préparée". Dans le cas contraire, on obtient une couche limite en temps. Néanmoins, on conclut de cette discussion *formelle* qu'il est naturel de postuler que

$$u \rightarrow u^0 = 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow +\infty. \quad (48)$$

Analysons alors le comportement en temps long des solutions de (37). On effectue le changement d'échelle

$$t = \beta s, \quad v = \beta u, \quad \beta = \alpha^{\frac{1}{\chi+1}} \quad (49)$$

ce qui est loisible en vertu de (48). En notant que

$$\varphi(u) = \frac{1}{\alpha} \varphi(v), \quad \psi(u) = \frac{1}{\alpha\beta} \psi(v),$$

il est immédiat de voir que le système (37) s'écrit alors compte tenu de (36)

$$\begin{cases} \partial_s \tau - \partial_m v = 0, \\ \frac{1}{\beta^2} \partial_s v + \partial_m p = g - \varphi(v), \\ \partial_s \varepsilon + \frac{1}{2\beta^2} \partial_s v^2 + \partial_m (pv) = gv - \psi(v), \end{cases} \quad (50)$$

système auquel il faut rajouter l'équation d'état $p = p(\tau, \varepsilon)$. A l'ordre 0 en $\frac{1}{\beta}$, on trouve le système

$$\begin{cases} \partial_s \tau - \partial_m v = 0, \\ \partial_m p = g - \varphi(v), \\ \partial_s \varepsilon + \partial_m(pv) = gv - \psi(v). \end{cases}$$

La fonction φ étant inversible d'inverse donné par (46), on obtient le système en (τ, ε)

$$\begin{cases} \partial_s \tau - \partial_m v = 0, \\ \partial_s \varepsilon + \partial_m(pv) = gv - \psi(v) \end{cases} \quad (51)$$

avec

$$\begin{cases} v = \varphi^{-1}(g - \partial_m p), \\ p = p(\tau, \varepsilon). \end{cases} \quad (52)$$

En particulier, dans le cas d'une friction linéaire $\chi = 0$, on a

$$v = g - \partial_m p$$

et le système (51) devient

$$\begin{cases} \partial_s \tau + \partial_m^2 p = 0, \\ \partial_s \varepsilon + 2(1-a)g\partial_m p + a(\partial_m p)^2 - \partial_m(p\partial_m p) = (1-a)g^2 \end{cases}$$

soit pour $a = 1$

$$\begin{cases} \partial_s \tau + \partial_m^2 p = 0, \\ \partial_s \varepsilon - p\partial_m^2 p = 0. \end{cases}$$

On considère maintenant le système (35). En effectuant le changement d'échelle (49), il devient

$$\begin{cases} \partial_s \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \\ \frac{1}{\beta^2}(\partial_s(\varrho v) + \partial_x(\varrho v^2)) + \partial_x p = \varrho(g - \varphi(v)), \\ \frac{1}{2\beta^2}(\partial_s(\varrho v^2) + \partial_x(\varrho v^3)) + \partial_s(\varrho \varepsilon) + \partial_x((\varrho \varepsilon + p)v) = \varrho(gv - \psi(v)). \end{cases} \quad (53)$$

A l'ordre 0 en $\frac{1}{\beta}$, on obtient

$$\begin{cases} \partial_s \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \\ \partial_x p = \varrho(g - \varphi(v)), \\ \partial_s(\varrho \varepsilon) + \partial_x((\varrho \varepsilon + p)v) = \varrho(gv - \psi(v)) \end{cases}$$

c'est à dire le système en (ϱ, ε)

$$\begin{cases} \partial_s \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \\ \partial_s(\varrho \varepsilon) + \partial_x((\varrho \varepsilon + p)v) = \varrho(gv - \psi(v)) \end{cases} \quad (54)$$

avec

$$\begin{cases} v = \varphi^{-1}\left(g - \frac{1}{\varrho} \partial_x p\right), \\ p = p(\varrho, \varepsilon). \end{cases} \quad (55)$$

Remarque 3. Si on se restreint au cas du système de la dynamique des gaz barotropes, on obtient à la place de (54) et (55) l'équation parabolique non linéaire

$$\begin{cases} \partial_s \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \\ v = \varphi^{-1}\left(g - \frac{1}{\varrho} \partial_x p\right), \quad p = p(\varrho). \end{cases} \quad (56)$$

En particulier, dans le cas d'une friction linéaire pour laquelle

$$v = g - \frac{1}{\varrho} \partial_x p$$

on trouve

$$\partial_s \varrho + g \partial_x \varrho - \partial_x^2 p = 0$$

qui est un modèle de type Darcy. Deux questions de nature théorique se posent alors de manière naturelle. Il s'agit d'une part de montrer que le modèle (54),(55) de type Darcy généralisé (ou le modèle correspondant (51),(52) en variables de Lagrange) est effectivement bien posé et d'autre part de vérifier que (54),(55) est bien le système limite de (53) lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, généralisant ainsi le résultat de Marcati (cf. [MM90]).

4 Un schéma d'équilibre et "asymptotic preserving" pour le système de la dynamique des gaz avec termes de friction et de gravité en coordonnées de Lagrange.

On s'intéresse dans cette section à l'approximation du système (37).

4.1 Le cas homogène.

A titre introductif, on commence par considérer le système homogène

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t u + \partial_m p = 0, \\ \partial_t e + \partial_m(pu) = 0 \end{cases} \quad (57)$$

que l'on écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_m \mathbf{F}(\mathbf{V}) = 0 \quad (58)$$

avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} -u \\ p \\ pu \end{pmatrix}. \quad (59)$$

On va lui associer un schéma de type Godunov entropique ayant de bonnes propriétés de positivité. On suit en cela Gallice (cf. [Gal03]). On introduit le solveur de Riemann simple

$$\widetilde{\mathbf{W}}\left(\frac{m}{t}; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d\right) = \begin{cases} \mathbf{V}_g, & \frac{m}{t} < -C, \\ \mathbf{V}_g^*, & -C < \frac{m}{t} < 0, \\ \mathbf{V}_d^*, & 0 < \frac{m}{t} < C, \\ \mathbf{V}_d, & \frac{m}{t} > C \end{cases} \quad (60)$$

où $C > 0$ est un paramètre qui ‘‘approche’’ la vitesse lagrangienne des ondes acoustiques, paramètre qu'il s'agit de choisir au mieux. Afin de choisir les états intermédiaires \mathbf{V}_g^* et \mathbf{V}_d^* , on écrit les relations de saut de Rankine-Hugoniot à la traversée de chaque onde du solveur de Riemann simple (60) soit

$$\begin{cases} (i) \mathbf{F}(\mathbf{V}_g^*) - \mathbf{F}(\mathbf{V}_g) = -C(\mathbf{V}_g^* - \mathbf{V}_g), \\ (ii) \mathbf{F}(\mathbf{V}_d^*) - \mathbf{F}(\mathbf{V}_g^*) = 0, \\ (iii) \mathbf{F}(\mathbf{V}_d) - \mathbf{F}(\mathbf{V}_d^*) = C(\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_d^*). \end{cases} \quad (61)$$

La relation (61 ii) donne

$$\begin{cases} u_d^* = u_g^* = u^*, \\ p_d^* = p_g^* = p^* \end{cases} \quad (62)$$

de sorte qu'il y a continuité de u et p à la traversée de la discontinuité stationnaire. Alors la relation (61 i) devient

$$\begin{cases} -u^* + u_g = -C(\tau_g^* - \tau_g), \\ p^* - p_g = -C(u^* - u_g), \\ p^* u^* - p_g u_g = -C(e_g^* - e_g) \end{cases} \quad (63)$$

tandis que la relation (61 iii) s'écrit

$$\begin{cases} -u_d + u^* = C(\tau_d - \tau_d^*), \\ p_d - p^* = C(u_d - u^*), \\ p_d u_d - p^* u^* = C(e_d - e_d^*). \end{cases} \quad (64)$$

Les deuxièmes équations (63) et (64) donnent

$$\begin{cases} u^* = u_a - \frac{1}{2C}\Delta p, \\ p^* = p_a - \frac{C}{2}\Delta u \end{cases} \quad (65)$$

où, de manière générale, on a posé pour tout couple (ϕ_g, ϕ_d)

$$\phi_a = \frac{1}{2}(\phi_g + \phi_d), \quad \Delta\phi = \phi_d - \phi_g.$$

On peut ensuite calculer les couples (τ_g^*, τ_d^*) et (e_g^*, e_d^*) . D'une part, on déduit de chaque première équation (63),(64) et (65)

$$\begin{cases} \tau_g^* = \tau_g + \frac{1}{2C}\Delta u - \frac{1}{2C^2}\Delta p, \\ \tau_d^* = \tau_d + \frac{1}{2C}\Delta u + \frac{1}{2C^2}\Delta p. \end{cases} \quad (66)$$

D'autre part, on déduit de chaque troisième équation (63),(64) et de (65)

$$\begin{aligned} e_g^* &= e_g + \frac{1}{C} \left\{ p_g u_g - \left(p_a - \frac{C}{2}\Delta u \right) \left(u_a - \frac{1}{2C}\Delta p \right) \right\} \\ &= e_g + \frac{1}{2}u_a \Delta u + \frac{1}{C}(p_g u_g - p_a u_a - \frac{1}{4}\Delta u \Delta p) + \frac{1}{2C^2}p_a \Delta p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e_d^* &= e_d - \frac{1}{C} \left\{ p_d u_d - \left(p_a - \frac{C}{2}\Delta u \right) \left(u_a - \frac{1}{2C}\Delta p \right) \right\} \\ &= e_d - \frac{1}{2}u_a \Delta u + \frac{1}{C}(p_a u_a + \frac{1}{4}\Delta u \Delta p - p_d u_d) - \frac{1}{2C^2}p_a \Delta p. \end{aligned}$$

Puisque

$$p_a u_a + \frac{1}{4}\Delta u \Delta p = \frac{1}{2}(p_g u_g + p_d u_d),$$

on trouve

$$\begin{cases} e_g^* = e_g + \frac{1}{4}(u_d^2 - u_g^2) - \frac{1}{2C}(p_d u_d - p_g u_g) + \frac{1}{4C^2}(p_d^2 - p_g^2), \\ e_d^* = e_d - \frac{1}{4}(u_d^2 - u_g^2) - \frac{1}{2C}(p_d u_d - p_g u_g) - \frac{1}{4C^2}(p_d^2 - p_g^2). \end{cases} \quad (67)$$

On note que le solveur de Riemann simple (60) ainsi défini est bien consistant avec la forme intégrale du système (58). En effet, la relation de consistence

$$\Delta \mathbf{F} = -C(\mathbf{V}_g^* - \mathbf{V}_g) + C(\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_d^*)$$

est une conséquence des relations (61). Par ailleurs, toujours en utilisant ces relations, on obtient d'après la Proposition 6 que le flux numérique du schéma de type Godunov associé est donné par

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{V}_g^*) + \mathbf{F}(\mathbf{V}_d^*)) = \begin{pmatrix} -u^* \\ p^* \\ p^*u^* \end{pmatrix}. \quad (68)$$

On constate que n'y interviennent que les valeurs du couple (u^*, p^*) . De fait ce schéma coïncide avec le schéma acoustique (cf. [God59]).

Il reste à choisir le paramètre $C > 0$. On cherche d'abord à quelles conditions le solveur de Riemann (60) est *positif*, c'est à dire produit des états intermédiaires \mathbf{V}_g^* et \mathbf{V}_d^* vérifiant

$$\tau_g^*, \tau_d^* > 0, \quad \varepsilon_g^*, \varepsilon_d^* > 0. \quad (69)$$

Proposition 7 *Le solveur de Riemann (60) est positif pour $C > 0$ assez grand.*

Démonstration. En utilisant (66), on vérifie immédiatement que l'on a $\tau_g^* > 0$ et $\tau_d^* > 0$ pour C assez grand. Calculons ensuite des expressions explicites de ε_g^* et ε_d^* . On déduit de (67)

$$\begin{aligned} \varepsilon_g^* &= \varepsilon_g + \frac{1}{4}(u_g^2 + u_d^2 - 2(u^*)^2) - \frac{1}{2C}(p_d u_d - p_g u_g) + \frac{1}{4C^2}(p_d^2 - p_g^2), \\ \varepsilon_d^* &= \varepsilon_d + \frac{1}{4}(u_g^2 + u_d^2 - 2(u^*)^2) - \frac{1}{2C}(p_d u_d - p_g u_g) - \frac{1}{4C^2}(p_d^2 - p_g^2). \end{aligned}$$

Or on a en vertu de la première équation (65)

$$\begin{aligned} u_g^2 + u_d^2 - 2(u^*)^2 &= u_g^2 + u_d^2 - 2(u_a - \frac{1}{2C}\Delta p)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\Delta u)^2 + \frac{2}{C}u_a \Delta p - \frac{1}{2C^2}(\Delta p)^2. \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \varepsilon_g^* &= \varepsilon_g + \frac{1}{8}(\Delta u)^2 + \frac{1}{2C}(u_a \Delta p - p_d u_d + p_g u_g) + \frac{1}{8C^2}(2(p_d^2 - p_g^2) - (\Delta p)^2), \\ \varepsilon_d^* &= \varepsilon_d + \frac{1}{8}(\Delta u)^2 + \frac{1}{2C}(u_a \Delta p - p_d u_d + p_g u_g) - \frac{1}{8C^2}(2(p_d^2 - p_g^2) + (\Delta p)^2). \end{aligned}$$

Puisque

$$u_a \Delta p - p_d u_d + p_g u_g = -p_a \Delta u$$

et

$$2(p_d^2 - p_g^2) - (\Delta p)^2 = \Pi_g \Delta p, \quad 2(p_d^2 - p_g^2) + (\Delta p)^2 = \Pi_d \Delta p$$

où

$$\Pi_g = 3p_g + p_d, \quad \Pi_d = p_g + 3p_d, \quad (70)$$

on obtient

$$\varepsilon_g^* = \varepsilon_g + \frac{1}{8}(\Delta u)^2 - \frac{1}{2C}p_a \Delta u + \frac{1}{8C^2}\Pi_g \Delta p,$$

$$\varepsilon_d^* = \varepsilon_d + \frac{1}{8}(\Delta u)^2 - \frac{1}{2C}p_a\Delta u - \frac{1}{8C^2}\Pi_d\Delta p$$

soit encore

$$\begin{cases} \varepsilon_g^* = \varepsilon_g + \frac{1}{8C^2}(C\Delta u - \Pi_g)(C\Delta u - \Delta p), \\ \varepsilon_d^* = \varepsilon_d + \frac{1}{8C^2}(C\Delta u - \Pi_d)(C\Delta u + \Delta p). \end{cases} \quad (71)$$

A nouveau, il est clair que l'on a $\varepsilon_g^* > 0$ et $\varepsilon_d^* > 0$ pour C assez grand.

Remarque 4. En fait, la condition $C > 0$ assez grand se détermine explicitement en résolvant des inéquations du second degré en C .

Corollaire 1 *Le schéma de type Godunov associé vérifie*

$$\tau_j^{n+1} > 0, \quad \varepsilon_j^{n+1} > 0 \quad (72)$$

dès que $C_{j\pm\frac{1}{2}}^n$ sont choisis assez grands.

Démonstration. On introduit (cf. (24))

$$\tilde{\mathbf{V}}^-(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \frac{2}{\Delta m} \int_{-\frac{\Delta m}{2}}^0 \tilde{\mathbf{W}}\left(\frac{m}{\Delta t}; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d\right) dm,$$

$$\tilde{\mathbf{V}}^+(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \frac{2}{\Delta m} \int_0^{\frac{\Delta m}{2}} \tilde{\mathbf{W}}\left(\frac{m}{\Delta t}; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d\right) dm$$

et on pose

$$\left(\tilde{\mathbf{V}}^\pm\right)_{j+\frac{1}{2}}^n = \tilde{\mathbf{V}}^\pm(\mathbf{V}_j^n, \mathbf{V}_{j+1}^n). \quad (73)$$

On a alors en vertu de (15)

$$\mathbf{V}_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\left(\tilde{\mathbf{V}}^+\right)_{j-\frac{1}{2}}^n + \left(\tilde{\mathbf{V}}^-\right)_{j+\frac{1}{2}}^n \right). \quad (74)$$

Puisque $\tilde{\mathbf{V}}^-$ et $\tilde{\mathbf{V}}^+$ vérifient $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$ pour C assez grand, on obtient immédiatement $\tau_j^{n+1} > 0$ pour $C_{j\pm\frac{1}{2}}^n$ assez grands. En ce qui concerne ε_j^{n+1} , on note que $\varepsilon = e - \frac{1}{2}u^2$ est une fonction concave de \mathbf{V} d'où

$$\varepsilon_j^{n+1} \geq \frac{1}{2} \left(\varepsilon \left(\left(\tilde{\mathbf{V}}^+\right)_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \varepsilon \left(\left(\tilde{\mathbf{V}}^-\right)_{j+\frac{1}{2}}^n \right) \right)$$

et la conclusion suit.

Nous supposons désormais que l'équation d'état du gaz $p = p(\tau, \varepsilon)$ dérive d'une équation d'état *complète* $\varepsilon = \varepsilon(\tau, s)$ où ε est une fonction convexe de (τ, s) . Alors on a une famille de couples entropiques $(\eta = \phi(s), q = 0)$ où ϕ est une fonction telle que $(\tau, u, e) \rightarrow \phi(s((\tau, e - \frac{1}{2}u^2)))$ soit convexe. On sait (cf. [Bou04]) qu'une telle fonction ϕ est nécessairement décroissante.²

²Il suffit en fait que ϕ soit de plus convexe pour que $\phi(s)$ soit une entropie.

Proposition 8 *Pour $C > 0$ assez grand, le solveur de Riemann (60) est consistant avec la condition d'entropie $\partial_t \eta \leq 0$. Bien plus sous la condition C.F.L.*

$$C_{j \pm \frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{2}, \quad (75)$$

on a

$$\eta_j^{n+1} \leq \eta_j^n. \quad (76)$$

Démonstration. Il s'agit d'abord de vérifier que (cf. (33))

$$-C(\eta_g^* - \eta_g) + C(\eta_d - \eta_d^*) \geq 0.$$

On montrera plus loin (cf. démonstration de la Proposition 13) que, pour C assez grand, on a

$$s_g^* \geq s_g, \quad s_d^* \geq s_d$$

Puisque $\eta = \phi(s)$ est une fonction décroissante de s , on obtient alors

$$\eta_g^* \leq \eta_g, \quad \eta_d^* \leq \eta_d$$

ce qui implique la consistance avec la forme intégrale de la condition d'entropie.

On note ensuite que, sous la condition C.F.L. $C \frac{\Delta t}{\Delta m} \leq \frac{1}{2}$, on a

$$\tilde{\mathbf{V}}^- = 2C \frac{\Delta t}{\Delta m} \mathbf{V}_g^* + (1 - 2C \frac{\Delta t}{\Delta m}) \mathbf{V}_g,$$

$$\tilde{\mathbf{V}}^+ = 2C \frac{\Delta t}{\Delta m} \mathbf{V}_d^* + (1 - 2C \frac{\Delta t}{\Delta m}) \mathbf{V}_d.$$

Autrement dit, $\tilde{\mathbf{V}}^-$ (resp. $\tilde{\mathbf{V}}^+$) est une combinaison convexe de \mathbf{V}_g et \mathbf{V}_g^* (resp. de \mathbf{V}_d et \mathbf{V}_d^*). On en déduit que

$$\eta(\tilde{\mathbf{V}}^-) \leq 2C \frac{\Delta t}{\Delta m} \eta(\mathbf{V}_g^*) + (1 - 2C \frac{\Delta t}{\Delta m}) \eta(\mathbf{V}_g) \leq \eta_g,$$

$$\eta(\tilde{\mathbf{V}}^+) \leq 2C \frac{\Delta t}{\Delta m} \eta(\mathbf{V}_d^*) + (1 - 2C \frac{\Delta t}{\Delta m}) \eta(\mathbf{V}_d) \leq \eta_d$$

et en utilisant (74)

$$\eta(\mathbf{V}_j^{n+1}) \leq \frac{1}{2} \left(\eta \left(\left(\tilde{\mathbf{V}}^+ \right)_{j-\frac{1}{2}} \right) + \eta \left(\left(\tilde{\mathbf{V}}^- \right)_{j+\frac{1}{2}} \right) \right)$$

soit (76).

4.2 La prise en compte des termes source.

On va maintenant généraliser l'approche précédente à l'approximation du système (37) que l'on écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{S}(\mathbf{V}) \quad (77)$$

avec

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} -u \\ p \\ pu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g - \alpha \varphi(u) \\ gu - \alpha \psi(u) \end{pmatrix}. \quad (78)$$

On utilise à nouveau un solveur de Riemann simple de la forme (60). En vertu de la Proposition 4, ce solveur est consistant avec la forme intégrale du système (77) s'il existe une fonction $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{S}}(\Delta m; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d)$ ³ avec

$$\lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d \rightarrow \mathbf{V}}} \tilde{\mathbf{S}}(\Delta m; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \mathbf{S}(\mathbf{V})$$

telle que

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}_d) - \mathbf{F}(\mathbf{V}_g) - \Delta m \tilde{\mathbf{S}}(\Delta m; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = -C(\mathbf{V}_g^* - \mathbf{V}_g) + C(\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_d^*). \quad (79)$$

Il est naturel de choisir $\tilde{\mathbf{S}}$ de la forme

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \begin{pmatrix} 0 \\ g - \alpha\varphi(\tilde{u}) \\ g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u}) \end{pmatrix} \quad (80)$$

avec

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\Delta m; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d), \quad \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d \rightarrow \mathbf{V}}} \tilde{u}(\Delta m; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = u. \quad (81)$$

Les relations de consistance (79) s'écrivent alors

$$\begin{cases} -\Delta u = C(\tau_g - \tau_g^* + \tau_d - \tau_d^*), \\ \Delta p - \Delta m(g - \alpha\varphi(\tilde{u})) = C(u_g - u_g^* + u_d - u_d^*), \\ \Delta(pu) - \Delta m(g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u})) = C(e_g - e_g^* + e_d - e_d^*). \end{cases} \quad (82)$$

Puisque l'équation de conservation de la masse ne comporte pas de terme source, il est naturel d'imposer les relations de saut de Rankine-Hugoniot relatives à cette équation de conservation à la traversée de chaque onde de (60), soit

$$\begin{cases} u_g^* - C\tau_g^* = u_g - C\tau_g, \\ u_d^* = u_g^*, \\ u_d + C\tau_d = u_d^* + C\tau_d^*. \end{cases} \quad (83)$$

La première relation de consistance (82) est alors conséquence immédiate des relations de saut (83). On pose ensuite

$$u^* = u_g^* = u_d^*. \quad (84)$$

La deuxième relation de consistance (82) s'écrit ainsi

$$\Delta p - \Delta m(g - \alpha\varphi(\tilde{u})) = 2C(u_a - u^*).$$

Si on pose

$$\Delta P = \Delta p - \Delta m(g - \alpha\varphi(\tilde{u})), \quad (85)$$

³Plus généralement, on pourrait supposer que $\tilde{\mathbf{S}}$ dépend également de Δt mais on verra que, dans notre cas, $\tilde{\mathbf{S}}$ est effectivement indépendant de Δt

on obtient

$$u^* = u_a - \frac{1}{2C}\Delta P \quad (86)$$

et en utilisant les première et troisième relations (83)

$$\begin{cases} \tau_g^* = \tau_g + \frac{1}{2C}\Delta u - \frac{1}{2C^2}\Delta P, \\ \tau_d^* = \tau_d + \frac{1}{2C}\Delta u + \frac{1}{2C^2}\Delta P. \end{cases} \quad (87)$$

A ce stade, les états \mathbf{V}_g^* et \mathbf{V}_d^* ne sont pas complètement déterminés : il reste à calculer e_g^* et e_d^* . La troisième équation de consistance (82) ne fournit qu'une relation liant e_g^* et e_d^* si bien qu'on dispose d'un degré de liberté dans la détermination du couple (e_g^*, e_d^*) .

Explicitons auparavant les composantes du flux numérique qui, en vertu de la Proposition 6, est donné ici par

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{F}(\mathbf{V}_g) + \mathbf{F}(\mathbf{V}_d) - C(\mathbf{V}_g^* - \mathbf{V}_g + \mathbf{V}_d - \mathbf{V}_d^*) \}. \quad (88)$$

La première composante de ce flux numérique s'écrit en utilisant (86) et (87)

$$\frac{1}{2} \{-u_g - u_d - C(\tau_g^* - \tau_g + \tau_d - \tau_d^*)\} = \frac{1}{2}(-2u_a + \frac{1}{C}\Delta P) = -u^*.$$

La seconde composante du flux est donnée par

$$\frac{1}{2} \{p_g + p_d - C(u^* - u_g + u_d - u^*)\} = p^*$$

où on a posé

$$p^* = p_a - \frac{C}{2}\Delta u. \quad (89)$$

Enfin la troisième composante du flux numérique s'écrit

$$\frac{1}{2} \{p_g u_g + p_d u_d - C(e_g^* - e_g + e_d - e_d^*)\}.$$

Par analogie avec le cas homogène, on impose qu'elle soit égale à p^*u^* . Alors, compte tenu de la troisième relation de consistance (82), on obtient que $e_g^* - e_g$ et $e_d^* - e_d$ sont solutions du système

$$\begin{cases} C(e_d^* - e_d) - C(e_g^* - e_g) = 2p^*u^* - p_g u_g - p_d u_d, \\ C(e_d^* - e_d) + C(e_g^* - e_g) = -\Delta(pu) + \Delta m(g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u})). \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} e_g^* - e_g = \frac{1}{C} \left\{ p_g u_g - p^*u^* + \frac{\Delta m}{2}(g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u})) \right\}, \\ e_d^* - e_d = \frac{1}{C} \left\{ p^*u^* - p_d u_d + \frac{\Delta m}{2}(g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u})) \right\}. \end{cases} \quad (90)$$

Ceci achève de déterminer les états \mathbf{V}_g^* et \mathbf{V}_d^* sous la seule réserve de choisir \tilde{u} . On notera qu'en fait le flux numérique

$$\mathbf{G}(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \begin{pmatrix} -u^* \\ p^* \\ p^*u^* \end{pmatrix} \quad (91)$$

ne dépend pas explicitement de e_g^* et de e_d^* .

Passons à l'étude des propriétés d'équilibre et "asymptotic preserving" du schéma numérique associé. Commençons par les propriétés d'équilibre. La condition d'équilibre (27) s'écrit ici

$$\frac{1}{\Delta m}(\mathbf{F}(\mathbf{V}_d) - \mathbf{F}(\mathbf{V}_g)) = \tilde{\mathbf{S}}(\Delta m; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) \quad (92)$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \Delta p - \Delta m(g - \alpha\varphi(\tilde{u})) = 0, \\ \Delta(pu) - \Delta m(g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u})) = 0. \end{cases} \quad (93)$$

Les deux premières conditions (93) donnent

$$\begin{cases} u_g = u_d = u, \\ \Delta P = 0 \Leftrightarrow \tilde{u} = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{\Delta p}{\Delta m} + g\right)\right). \end{cases}$$

On trouve alors en vertu de (86),(87) et(89)

$$\begin{cases} u^* = u_a = u, \\ \tau_g^* = \tau_g, \quad \tau_d^* = \tau_d, \\ p^* = p_a. \end{cases}$$

La troisième condition (93) donne alors

$$u\Delta p - \Delta m(g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u})) = 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned} p_g u_g - p^* u^* + \frac{\Delta m}{2}(g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u})) &= p^* u^* - p_a u_d + \frac{\Delta m}{2}(g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u})) \\ &= -\frac{1}{2}(u\Delta p - \Delta m(g\tilde{u} - \alpha\psi(\tilde{u}))) = 0 \end{aligned}$$

soit d'après (90)

$$e_g^* = e_g, \quad e_d^* = e_d.$$

La condition d'équilibre (92) entraîne ainsi

$$\mathbf{V}_g^* = \mathbf{V}_g, \quad \mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d.$$

Le schéma possède la propriété d'équilibre fort pour tout choix consistant de \tilde{u} .

Nous en venons à l'étude des propriétés asymptotiques du schéma lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$. A la différence de la propriété d'équilibre, le schéma n'a pas le bon comportement asymptotique pour tout choix consistant de \tilde{u} ainsi qu'on le verra plus loin (cf. Remarque 5 ci-après). En fait, on va désormais prendre

$$\tilde{u} = u^*. \quad (94)$$

On a alors en vertu de (85) et (86)

$$u^* = u_a - \frac{1}{2C}(\Delta p - \Delta m(g - \alpha\varphi(u^*)))$$

si bien que u^* est solution de l'équation *non linéaire* en général

$$u^* + \frac{\alpha\Delta m}{2C}\varphi(u^*) = u_a - \frac{1}{2C}(\Delta p - \Delta m g) \quad (95)$$

Puisque $u^* \rightarrow u^* + \frac{\alpha\Delta m}{2C}\varphi(u^*)$ est une fonction strictement croissante qui applique \mathbb{R} sur \mathbb{R} , (95) admet une solution unique que l'on écrit

$$u^* = \Phi(u_a - \frac{1}{2C}(\Delta p - \Delta m g); \frac{\alpha\Delta m}{2C}) \quad (96)$$

où $\frac{\alpha\Delta m}{2C}$ joue le rôle d'un paramètre.

En posant

$$u_{j+\frac{1}{2}} = u^*(\Delta m; \mathbf{V}_j, \mathbf{V}_{j+1}), \quad p_{j+\frac{1}{2}} = p^*(\mathbf{V}_j, \mathbf{V}_{j+1})$$

le schéma numérique s'écrit en supprimant l'indice n pour simplifier les notations

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau}_j = \tau_j + \frac{\Delta t}{\Delta m}(u_{j+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}), \\ \bar{u}_j = u_j - \frac{\Delta t}{\Delta m}(p_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}) + \Delta t(g - \frac{\alpha}{2}(\varphi(u_{j-\frac{1}{2}}) + \varphi(u_{j+\frac{1}{2}}))), \\ \bar{e}_j = e_j - \frac{\Delta t}{\Delta m}(p_{j+\frac{1}{2}}u_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}}) + \\ \quad + \frac{\Delta t}{2}(g(u_{j-\frac{1}{2}} + u_{j+\frac{1}{2}}) - \alpha(\psi(u_{j-\frac{1}{2}}) + \psi(u_{j+\frac{1}{2}}))) \end{array} \right. \quad (97)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{j+\frac{1}{2}} = \Phi(\frac{1}{2}(u_j + u_{j+1} - \frac{1}{C}(p_{j+1} - p_j - \Delta m g)); \frac{\alpha\Delta m}{2C}), \\ p_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\{p_j + p_{j+1} - C(u_{j+1} - u_j)\}. \end{array} \right. \quad (98)$$

On effectue maintenant le changement d'échelle (49). Si $v_g = \beta u_g$, $v_d = \beta u_d$, (95) devient

$$u^* + \frac{\Delta m}{2C}\varphi(\beta u^*) = \frac{1}{\beta}v_a - \frac{1}{2C}(\Delta p - \Delta m g).$$

Lorsque $\beta \rightarrow +\infty$, on a

$$\beta u^* \sim \varphi^{-1}\left(-\frac{\Delta p}{\Delta m} + g\right)$$

c'est-à-dire

$$u^* = \frac{1}{\beta} \varphi^{-1}\left(-\frac{\Delta p}{\Delta m} + g\right) + o\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad \beta \rightarrow +\infty.$$

Il est alors loisible de poser

$$u^* = \frac{1}{\beta} v^*, \quad v^* = \varphi^{-1}\left(-\frac{\Delta p}{\Delta m} + g\right) + o\left(\frac{1}{\beta}\right) \quad (99)$$

et le schéma devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau}_j = \tau_j + \frac{\Delta s}{\Delta m}(v_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}), \\ \frac{1}{\beta} \bar{v}_j = \frac{1}{\beta} v_j - \frac{\beta \Delta s}{\Delta m}(p_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}) + \beta \Delta s \left(g - \frac{1}{2}(\varphi(v_{j-\frac{1}{2}}) + \varphi(v_{j+\frac{1}{2}}))\right), \\ \bar{\varepsilon}_j + \frac{1}{2\beta^2} \bar{v}_j^2 = \varepsilon_j + \frac{1}{2\beta^2} v_j^2 - \frac{\Delta s}{\Delta m}(p_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}}) + \\ + \frac{\Delta s}{2}(g(v_{j-\frac{1}{2}} + v_{j+\frac{1}{2}}) - (\psi(v_{j-\frac{1}{2}}) + \psi(v_{j+\frac{1}{2}}))) \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\beta} v_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta m}{2C} \varphi(v_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\beta}(v_j + v_{j+1}) - \frac{1}{2C}(p_{j+1} - p_j - \Delta m g), \\ p_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\{ p_j + p_{j+1} - \frac{C}{\beta}(v_{j+1} - v_j) \right\}. \end{array} \right.$$

Dans la limite $\beta \rightarrow +\infty$, le schéma tend formellement vers

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau}_j = \tau_j + \frac{\Delta s}{\Delta m}(v_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}), \\ \frac{1}{\Delta m}(p_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}) = g - \frac{1}{2}(\varphi(v_{j-\frac{1}{2}}) + \varphi(v_{j+\frac{1}{2}})), \\ \bar{\varepsilon}_j = \varepsilon_j - \frac{\Delta s}{\Delta m}(p_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}}) + \\ + \frac{\Delta s}{2}(g(v_{j-\frac{1}{2}} + v_{j+\frac{1}{2}}) - (\psi(v_{j-\frac{1}{2}}) + \psi(v_{j+\frac{1}{2}}))) \end{array} \right. \quad (100)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{j+\frac{1}{2}} = \varphi^{-1}\left(-\frac{p_{j+1} - p_j}{\Delta m} + g\right), \\ p_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_j + p_{j+1}). \end{array} \right. \quad (101)$$

En particulier, on obtient que le couple (τ, ε) vérifie le schéma

$$\begin{cases} \bar{\tau}_j = \tau_j + \frac{\Delta s}{\Delta m}(v_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}), \\ \bar{\varepsilon}_j = \varepsilon_j - \frac{\Delta s}{\Delta m}(p_{j+\frac{1}{2}}v_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}v_{j-\frac{1}{2}}) + \\ \quad + \frac{\Delta s}{2}(g(v_{j-\frac{1}{2}} + v_{j+\frac{1}{2}}) - (\psi(v_{j-\frac{1}{2}}) + \psi(v_{j+\frac{1}{2}}))) \end{cases} \quad (102)$$

avec les relations (101) et la loi d'état $p_j = p(\tau_j, \varepsilon_j)$, ce qui n'est autre qu'un schéma explicite classique de discrétisation du système limite (51),(52). Comme la deuxième équation (100) est visiblement une conséquence de (101), on trouve que les systèmes (100),(101) et (101),(102) sont bien équivalents.

Ainsi, avec le choix $\tilde{u} = u^*$, le schéma de type Godunov obtenu préserve le comportement asymptotique pour $\alpha \rightarrow +\infty$ des solutions du système (37).

Remarque 5. Si au lieu de choisir $\tilde{u} = u^*$, on prend par exemple $\tilde{u} = u_a$, on perd le caractère "asymptotic preserving" du schéma. En effet, on déduit alors de (85),(86)

$$u^* = u_a - \frac{1}{2C}(\Delta p - \Delta m(g - \alpha\varphi(u_a))).$$

Si on effectue le changement d'échelle (49), on obtient

$$u^* = \frac{1}{\beta}v_a - \frac{1}{2C}(\Delta p - \Delta m(g - \varphi(v_a)))$$

et il n'est plus loisible de poser $u^* = \frac{1}{\beta}v^*$ de sorte que l'analyse asymptotique précédente n'est plus valable. En fait, pour obtenir le comportement asymptotique désiré, il convient de choisir \tilde{u} de manière que u^* vérifie (99), c'est-à-dire essentiellement $\tilde{u} = u^*$.

Terminons par l'étude des propriétés de positivité du schéma. On a l'analogue de la Proposition 7.

Proposition 9 *Le solveur de Riemann (60) associé au système non homogène (37) est positif pour $C > 0$ assez grand.*

Démonstration. On déduit d'abord de (87) que l'on a $\tau_g^* > 0$ et $\tau_d^* > 0$ pour $C > 0$ assez grand. On calcule ensuite ε_g^* et ε_d^* . Il sera agréable de poser

$$\Delta q = \Delta m(\alpha\varphi(u^*) - g), \quad \Delta r = \Delta m(\alpha\frac{\psi(u^*)}{u^*} - g) \quad (103)$$

ce qui définit en particulier q à une constante additive près. Alors (90) avec $\tilde{u} = u^*$ s'écrit sous la forme équivalente suivante

$$\begin{cases} e_g^* = e_g + \frac{1}{C} \left\{ p_g u_g - p^* u^* - \frac{1}{2} u^* \Delta q \right\} + \frac{1}{2C} u^* (\Delta q - \Delta r), \\ e_d^* = e_d + \frac{1}{C} \left\{ p^* u^* - p_d u_d - \frac{1}{2} u^* \Delta q \right\} + \frac{1}{2C} u^* (\Delta q - \Delta r). \end{cases}$$

En utilisant (86) et (89) et en remplaçant p par $P - q$, on obtient

$$e_g^* = e_g + \frac{1}{C} \left\{ (P_g - q_g)u_g - (P_a - q_a - \frac{C}{2}\Delta u)(u_a - \frac{1}{2C}\Delta P) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(u_a - \frac{1}{2C}\Delta P)\Delta q \right\} + \frac{1}{2C}u^*(\Delta q - \Delta r)$$

soit

$$e_g^* = e_g + \frac{1}{2}u_a\Delta u + \frac{1}{C}(P_g u_g - P_a u_a - \frac{1}{4}\Delta u\Delta P) + \frac{1}{2C^2}P_a\Delta P \\ + \frac{1}{C}(q_a u_a - q_g u_g - \frac{1}{2}u_a\Delta q) + \frac{1}{C^2}(-\frac{1}{2}q_a\Delta P + \frac{1}{4}\Delta P\Delta q) + \frac{1}{2C}u^*(\Delta q - \Delta r)$$

ou encore

$$e_g^* = e_g + \frac{1}{4}(u_d^2 - u_g^2) - \frac{1}{2C}(P_d u_d - P_g u_g) + \frac{1}{4C^2}(P_d^2 - P_g^2) \\ + \frac{1}{2C}q_g\Delta u - \frac{1}{2C^2}q_g\Delta P + \frac{1}{2C}u^*(\Delta q - \Delta r).$$

On en déduit

$$\varepsilon_g^* = \varepsilon_g + \frac{1}{8C^2}(C\Delta u - \Pi_g)(C\Delta u - \Delta P) + \frac{1}{2C}u^*(\Delta q - \Delta r) \quad (104)$$

et de la même façon

$$\varepsilon_d^* = \varepsilon_d + \frac{1}{8C^2}(C\Delta u - \Pi_d)(C\Delta u + \Delta P) + \frac{1}{2C}u^*(\Delta q - \Delta r) \quad (105)$$

avec cette fois

$$\begin{cases} \Pi_g = 3P_g + P_d - 4q_g, \\ \Pi_d = P_g + 3P_d - 4q_d. \end{cases} \quad (106)$$

Ici encore, on vérifie aisément que l'on a $\varepsilon_g^* > 0$ et $\varepsilon_d^* > 0$ pour $C > 0$ assez grand.

Corollaire 2 *Le schéma de type Godunov d'approximation de (37) vérifie*

$$\tau_j^{n+1} > 0, \quad \varepsilon_j^{n+1} > 0 \quad (107)$$

dès que $C_{j\pm\frac{1}{2}}^n$ sont choisis assez grands.

La démonstration est identique à celle du Corollaire 1.

Il resterait à étudier les propriétés entropiques du schéma. C'est ce que nous ferons dans la section 7 mais dans un cadre Eulérien

5 Solveurs de Riemann simples en coordonnées de Lagrange et en coordonnées d'Euler.

On a vu dans la section précédente comment on pouvait construire un solveur de Riemann simple pour les équations de la dynamique des gaz avec termes

de friction et de gravité en coordonnées de Lagrange qui conduisait à un schéma ayant de bonnes propriétés d'équilibre et "asymptotic preserving". Il s'agit maintenant de construire un tel solveur en coordonnées d'Euler. Dans cette section, on va montrer de manière générale comment, étant donné un solveur de Riemann simple pour un système de lois de conservation en coordonnées de Lagrange, on peut lui associer de manière canonique un solveur de Riemann simple pour ce même système de lois de conservation en coordonnées d'Euler. On suit encore Gallice (cf. [Gal03]).

Plus précisément, on considère un système de lois de conservation en coordonnées d'Euler de la forme

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho \Psi) + \partial_x(\varrho \Psi u + \mathbf{f}(\varrho, \Psi)) = \varrho \mathbf{s}(\varrho, \Psi) \end{cases} \quad (108)$$

où on a distingué la loi de conservation de la masse de celles des autres grandeurs notées $\varrho \Psi$. On pose

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho \Psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_E(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \varrho u \\ \varrho \Psi u + \mathbf{f}(\varrho, \Psi) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_E(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho \mathbf{s}(\varrho, \Psi) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (109)$$

de sorte que (108) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}_E(\mathbf{U}) = \mathbf{S}_E(\mathbf{U}). \quad (110)$$

En coordonnées de Lagrange, le système (108) devient

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t \Psi + \partial_m \mathbf{f}\left(\frac{1}{\tau}, \Psi\right) = \mathbf{s}\left(\frac{1}{\tau}, \Psi\right). \end{cases} \quad (111)$$

Si on pose

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_L(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} -u \\ \mathbf{f}\left(\frac{1}{\tau}, \Psi\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_L(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{s}\left(\frac{1}{\tau}, \Psi\right) \end{pmatrix}, \quad (112)$$

le système (111) s'écrit

$$\partial_t \mathbf{V} + \partial_m \mathbf{F}_L(\mathbf{V}) = \mathbf{S}_L(\mathbf{V}). \quad (113)$$

Par ailleurs, on sait que les valeurs propres λ de la matrice Jacobienne de $\mathbf{F}_E(\mathbf{U})$ sont reliées aux valeurs propres μ de la matrice Jacobienne de $\mathbf{F}_L(\mathbf{V})$ par

$$\lambda = u + \mu \tau. \quad (114)$$

On se donne maintenant un solveur de Riemann simple $\widetilde{\mathbf{W}}_L\left(\frac{m}{t}; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d\right)$

associé au système (111) (ou (113)), soit

$$\widetilde{\mathbf{W}}_L\left(\frac{m}{t}; \mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d\right) = \begin{cases} \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_g, & \frac{m}{t} < \mu_1, \\ \mathbf{V}_k, & \mu_{k-1} < \frac{m}{t} < \mu_k, \quad k = 2, \dots, l, \\ \mathbf{V}_{l+1} = \mathbf{V}_d, & \frac{m}{t} > \mu_l. \end{cases} \quad (115)$$

Puisque l'équation de conservation de la masse dans (111) ne comporte pas de terme source, il est naturel d'imposer, comme dans la section précédente, que les relations de saut de Rankine-Hugoniot relatives à cette équation soient satisfaites à la traversée de chaque onde de (115), c'est-à-dire

$$u_k + \mu_k \tau_k = u_{k+1} + \mu_k \tau_{k+1}, \quad k = 1, \dots, l. \quad (116)$$

On associe au solveur de Riemann simple en coordonnées de Lagrange (115) le solveur de Riemann simple en coordonnées d'Euler défini par

$$\widetilde{\mathbf{W}}_E\left(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d\right) = \begin{cases} \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_g = \mathbf{U}(\mathbf{V}_g), & \frac{x}{t} < \lambda_1, \\ \mathbf{U}_k = \mathbf{U}(\mathbf{V}_k), & \lambda_{k-1} < \frac{x}{t} < \lambda_k, \quad k = 2, \dots, l, \\ \mathbf{U}_{l+1} = \mathbf{U}_d = \mathbf{U}(\mathbf{V}_d), & \frac{x}{t} > \lambda_l \end{cases} \quad (117)$$

où

$$\lambda_k = u_k + \mu_k \tau_k = u_{k+1} + \mu_k \tau_{k+1}, \quad k = 1, \dots, l. \quad (118)$$

Proposition 10 *On fait l'hypothèse (116). Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*⁴ :

$$\mathbf{F}_L(\mathbf{V}_d) - \mathbf{F}_L(\mathbf{V}_g) - \Delta m \widetilde{\mathbf{S}}_L(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \sum_{k=1}^l \mu_k (\mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{V}_k) \quad (119)$$

et

$$\mathbf{F}_E(\mathbf{U}_d) - \mathbf{F}_E(\mathbf{U}_g) - \Delta x \widetilde{\mathbf{S}}_E(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \sum_{k=1}^l \lambda_k (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) \quad (120)$$

où

$$\Delta x = \frac{\Delta m}{\varrho_a}, \quad \widetilde{\mathbf{S}}_E(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \varrho_a \widetilde{\mathbf{S}}_L(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \varrho_a \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Démonstration. On commence par noter la relation suivante⁵ qui a lieu pour toute suite $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq l+1}$, $\varphi_1 = \varphi_g$, $\varphi_{l+1} = \varphi_d$:

$$\Delta(\varrho \varphi u) + \sum_{k=1}^l \mu_k (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = \sum_{k=1}^l \lambda_k (\varrho_{k+1} \varphi_{k+1} - \varrho_k \varphi_k). \quad (122)$$

⁴Pour simplifier les notations, on a supprimé la dépendance en $(\Delta m, \Delta t)$ et $(\Delta x, \Delta t)$ de $\widetilde{\mathbf{S}}_L$ et $\widetilde{\mathbf{S}}_E$ respectivement

⁵On rappelle la notation $\Delta \chi = \chi_d - \chi_g$.

D'après (118) on a en effet

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l \lambda_k (\varrho_{k+1} \varphi_{k+1} - \varrho_k \varphi_k) &= \sum_{k=1}^l (u_{k+1} + \mu_k \tau_{k+1}) \varrho_{k+1} \varphi_{k+1} - \sum_{k=1}^l (u_k + \mu_k \tau_k) \varrho_k \varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^l \varrho_{k+1} \varphi_{k+1} u_{k+1} - \sum_{k=1}^l \varrho_k \varphi_k u_k + \sum_{k=1}^l \mu_k (\varphi_{k+1} - \varphi_k) \end{aligned}$$

soit (122). On remarque ensuite que

$$-\Delta u = \sum_{k=1}^l \mu_k (\tau_{k+1} - \tau_k)$$

est une conséquence de (116) tandis qu'on obtient en utilisant (122) avec $\varphi_k = 1$

$$\Delta(\varrho u) = \sum_{k=1}^l \lambda_k (\varrho_{k+1} - \varrho_k).$$

Dans ces conditions, il s'agit uniquement de montrer l'équivalence des relations

$$\Delta \mathbf{f} - \Delta m \tilde{\mathbf{s}} = \sum_{k=1}^l \mu_k (\Psi_{k+1} - \Psi_k)$$

et

$$\Delta(\varrho \Psi u + \mathbf{f}) - \Delta m \tilde{\mathbf{s}} = \sum_{k=1}^l \lambda_k (\varrho_{k+1} \Psi_{k+1} - \varrho_k \Psi_k).$$

Or ceci résulte de (122) où on a remplacé φ_k par Ψ_k .

En d'autres termes, *le solveur de Riemann simple en coordonnées d'Euler (117) est consistant avec la forme intégrale du système (108) si et seulement si le solveur de Riemann simple en coordonnées de Lagrange (115) est consistant avec la forme intégrale du système (111).*

Par ailleurs, on sait que le système (111) admet une inégalité d'entropie de la forme

$$\partial_t \eta_L + \partial_m q_L \leq \sigma_L \quad (123)$$

si et seulement si le système (108) admet l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \eta_E + \partial_x q_E \leq \sigma_E \quad (124)$$

où

$$\eta_E = \varrho \eta_L, \quad q_E = \varrho \eta_L u + q_L = \eta_E u + q_L, \quad \sigma_E = \varrho \sigma_L. \quad (125)$$

Proposition 11 *On fait encore l'hypothèse (116). Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$q_L(\mathbf{V}_d) - q_L(\mathbf{V}_g) - \Delta m \tilde{\sigma}_L(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d) = \sum_{k=1}^l \mu_k (\eta_L(\mathbf{V}_{k+1}) - \eta_L(\mathbf{V}_k)) \quad (126)$$

et

$$q_E(\mathbf{U}_d) - q_E(\mathbf{U}_g) - \Delta x \tilde{\sigma}_E(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \sum_{k=1}^l \lambda_k (\eta_E(\mathbf{U}_{k+1}) - \eta_E(\mathbf{U}_k)) \quad (127)$$

où

$$\Delta x = \frac{\Delta m}{\varrho_a}, \quad \tilde{\sigma}_E(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \varrho_a \tilde{\sigma}_L(\mathbf{V}_g, \mathbf{V}_d).. \quad (128)$$

Démonstration. On utilise à nouveau (122) avec $\varphi = \eta_L$, ce qui donne

$$\Delta(\varrho \eta_L u) + \sum_{k=1}^l \mu_k (\eta_L(\mathbf{V}_{k+1}) - \eta_L(\mathbf{V}_k)) = \sum_{k=1}^l \lambda_k (\varrho_{k+1} \eta_L(\mathbf{V}_{k+1}) - \varrho_k \eta_L(\mathbf{V}_k))$$

soit

$$\Delta(\eta_E u) + \sum_{k=1}^l \mu_k (\eta_L(\mathbf{V}_{k+1}) - \eta_L(\mathbf{V}_k)) = \sum_{k=1}^l \lambda_k (\eta_E(\mathbf{U}_{k+1}) - \eta_E(\mathbf{U}_k))$$

et le résultat suit.

Autrement dit, le solveur de Riemann simple (117) est consistant avec la forme intégrale de la condition d'entropie (124) si et seulement si le solveur de Riemann simple (115) est consistant avec la forme intégrale de la condition d'entropie (123).

6 Un schéma “asymptotic preserving” pour le système de la dynamique des gaz avec termes de friction et de gravité en coordonnées d’Euler.

On a construit dans la section 4 un solveur de Riemann simple pour le système (37) en coordonnées de Lagrange qui conduisait à un schéma “asymptotic preserving”. Nous allons maintenant utiliser les résultats de la section 5 afin de construire un tel solveur pour le système (35) en coordonnées d’Euler. Si on pose

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ \varrho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \varrho u \\ \varrho u^2 + p \\ (\varrho e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho(g - \alpha\varphi(u)) \\ \varrho(gu - \alpha\psi(u)) \end{pmatrix}, \quad (129)$$

le système (35) s’écrit

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}). \quad (130)$$

On associe alors au solveur de Riemann simple (60) en coordonnées de Lagrange le solveur de Riemann simple en coordonnées d'Euler défini par

$$\widetilde{\mathbf{W}}\left(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d\right) = \begin{cases} \mathbf{U}_g, & \frac{x}{t} < \lambda_1, \\ \mathbf{U}_g^*, & \lambda_1 < \frac{x}{t} < \lambda_2, \\ \mathbf{U}_d^*, & \lambda_2 < \frac{x}{t} < \lambda_3, \\ \mathbf{U}_d, & \frac{x}{t} > \lambda_3 \end{cases} \quad (131)$$

avec

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{U}(\mathbf{V}_g), \quad \mathbf{U}_g^* = \mathbf{U}(\mathbf{V}_g^*), \quad \mathbf{U}_d^* = \mathbf{U}(\mathbf{V}_d^*), \quad \mathbf{U}_d = \mathbf{U}(\mathbf{V}_d),$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_g^* = \begin{pmatrix} \tau_g^* \\ u^* \\ e_g^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_d^* = \begin{pmatrix} \tau_d^* \\ u^* \\ e_d^* \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_1 = u_g - C\tau_g = u^* - C\tau_g^*, \\ \lambda_2 = u^*, \\ \lambda_3 = u_d + C\tau_d = u^* + C\tau_d^*. \end{cases} \quad (132)$$

On rappelle que u^* est la solution de (cf. (95))

$$u^* + \alpha \frac{\Delta m}{2C} \varphi(u^*) = u_a - \frac{1}{2C} (\Delta p - \Delta m g).$$

Par ailleurs, on déduit de (132) que τ_g^* et τ_d^* sont donnés par

$$\begin{cases} \tau_g^* = \tau_g + \frac{1}{C}(u^* - u_g), \\ \tau_d^* = \tau_d - \frac{1}{C}(u^* - u_d). \end{cases} \quad (133)$$

Enfin, on obtient à partir de (90) avec $\tilde{u} = u^*$ et $\Delta m = \varrho_a \Delta x$

$$\begin{cases} e_g^* = e_g + \frac{1}{C} \left\{ p_g u_g - p^* u^* + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a (g u^* - \alpha \psi(u^*)) \right\}, \\ e_d^* = e_d + \frac{1}{C} \left\{ p^* u^* - p_d u_d + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a (g u^* - \alpha \psi(u^*)) \right\} \end{cases} \quad (134)$$

où (cf. (89))

$$p^* = p_a - \frac{C}{2} \Delta u.$$

Si on introduit

$$\widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \varrho_a \begin{pmatrix} 0 \\ g - \alpha \varphi(u^*) \\ g u^* - \alpha \psi(u^*) \end{pmatrix}, \quad (135)$$

on sait en vertu de la Proposition 10 que le solveur de Riemann simple (131) ainsi défini vérifie

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_d) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_g) - \Delta x \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \lambda_1(\mathbf{U}_g^* - \mathbf{U}_g) + \lambda_2(\mathbf{U}_d^* - \mathbf{U}_g^*) + \lambda_3(\mathbf{U}_d - \mathbf{U}_d^*)$$

c'est à dire est consistant avec la forme intégrale de (130).

En vertu de la Proposition 6, le flux numérique du schéma de Godunov correspondant est alors donné par

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_g) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_d)) - \\ -\frac{1}{2}\{|\lambda_1|(\mathbf{U}_g^* - \mathbf{U}_g) + |\lambda_2|(\mathbf{U}_d^* - \mathbf{U}_g^*) + |\lambda_3|(\mathbf{U}_d - \mathbf{U}_d^*)\} \end{cases} \quad (136)$$

et le schéma numérique s'écrit donc

$$\bar{\mathbf{U}}_j = \mathbf{U}_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{G}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{G}_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{S}_{j-\frac{1}{2}} + \mathbf{S}_{j+\frac{1}{2}}) \quad (137)$$

où

$$\mathbf{G}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{G}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}), \quad \mathbf{S}_{j+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}). \quad (138)$$

On étudie maintenant le comportement asymptotique du schéma lorsque $\alpha \rightarrow \infty$. En effectuant le changement d'échelle (49), le schéma devient

$$\bar{\mathbf{U}}_j = \mathbf{U}_j - \beta \frac{\Delta s}{\Delta x}(\mathbf{G}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{G}_{j-\frac{1}{2}}) + \beta \frac{\Delta s}{2}(\mathbf{S}_{j-\frac{1}{2}} + \mathbf{S}_{j+\frac{1}{2}}) \quad (139)$$

avec $u = \frac{1}{\beta}v$. Il convient donc d'examiner le comportement asymptotique de $\beta\mathbf{G}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ et $\beta\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ lorsque β (ou α) $\rightarrow +\infty$. On rappelle que (cf. 99)

$$u^* = \frac{1}{\beta}v^*, \quad v^* = \varphi^{-1}\left(-\frac{\Delta p}{\varrho_a \Delta x} + g\right) + o\left(\frac{1}{\beta}\right). \quad (140)$$

On note également que d'après (132)

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\beta}v_g - C\tau_g = -\frac{C}{\varrho_g} + O\left(\frac{1}{\beta}\right), \\ \lambda_2 = \frac{1}{\beta}v^*, \\ \lambda_3 = \frac{1}{\beta}v_d + C\tau_d = \frac{C}{\varrho_d} + O\left(\frac{1}{\beta}\right). \end{cases} \quad (141)$$

Commençons par évaluer la première composante de $\mathbf{G}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$, soit

$$\frac{1}{2}\{\varrho_g u_g + \varrho_d u_d - |\lambda_1|(\varrho_g^* - \varrho_g) - |\lambda_2|(\varrho_d^* - \varrho_g^*) - |\lambda_3|(\varrho_d - \varrho_d^*)\}.$$

On déduit de (133)

$$\varrho_g^* = \varrho_g \left(1 + \frac{\varrho_g(u^* - u_g)}{C}\right)^{-1} = \varrho_g \left(1 + \frac{\varrho_g(v^* - v_g)}{\beta C}\right)^{-1} = \varrho_g + O\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

et

$$\varrho_d^* = \varrho_d \left(1 - \frac{\varrho_d(u^* - u_d)}{C} \right)^{-1} = \varrho_d \left(1 - \frac{\varrho_d(v^* - v_d)}{\beta C} \right)^{-1} = \varrho_d + O\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

puis

$$\varrho_g^* - \varrho_g = -\varrho_g \frac{\varrho_g(v^* - v_g)}{\beta C} \left(1 + \frac{\varrho_g(v^* - v_g)}{\beta C} \right)^{-1} = -\frac{\varrho_g}{\beta} \frac{\varrho_g(v^* - v_g)}{C} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$$

et

$$\varrho_d - \varrho_d^* = -\varrho_d \frac{\varrho_d(v^* - v_d)}{\beta C} \left(1 - \frac{\varrho_d(v^* - v_d)}{\beta C} \right)^{-1} = -\frac{\varrho_d}{\beta} \frac{\varrho_d(v^* - v_d)}{C} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$$

de sorte que cette première composante s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\beta} \{ \varrho_g v_g + \varrho_d v_d + \varrho_g(v^* - v_g) - |v^*|(\varrho_d - \varrho_g) + \varrho_d(v^* - v_d) \} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\beta} \{ \varrho_g(v^* + |v^*|) + \varrho_d(v^* - |v^*|) \} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \\ &= \frac{1}{\beta} (\varrho_g v_+^* + \varrho_d v_-^*) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \end{aligned}$$

où

$$v_+^* = \max(v^*, 0) = \frac{1}{2}(v^* + |v^*|), \quad v_-^* = \min(v^*, 0) = \frac{1}{2}(v^* - |v^*|).$$

Passons à la deuxième composante de $\mathbf{G}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$, soit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \varrho_g u_g^2 + p_g + \varrho_d u_d^2 + p_d - |\lambda_1|(\varrho_g^* u^* - \varrho_g u_g) - |\lambda_2|(\varrho_d^* - \varrho_g^*)u^* - \\ & \quad - |\lambda_3|(\varrho_d u_d - \varrho_d^* u^*) \}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \varrho_g^* u^* - \varrho_g u_g &= \frac{1}{\beta} \varrho_g \left(v^* \left(1 + \frac{\varrho_g(v^* - v_g)}{\beta C} \right)^{-1} - v_g \right) \\ &= \frac{\varrho_g}{\beta} (v^* - v_g) \left(1 - \frac{\varrho_g v_g}{\beta C} \right) \left(1 + \frac{\varrho_g(v^* - v_g)}{\beta C} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\beta} \varrho_g (v^* - v_g) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \end{aligned}$$

puis

$$(\varrho_d^* - \varrho_g^*)u^* = \frac{1}{\beta} (\varrho_d - \varrho_g)v^* + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \varrho_d u_d - \varrho_d^* u^* &= \frac{1}{\beta} \varrho_d \left(v_d - v^* \left(1 - \frac{\varrho_d(v^* - v_d)}{\beta C} \right)^{-1} \right) \\ &= \frac{\varrho_d}{\beta} (v_d - v^*) \left(1 + \frac{\varrho_d v_d}{\beta C} \right) \left(1 - \frac{\varrho_d(v^* - v_d)}{\beta C} \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\beta} \varrho_d (v_d - v^*) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right).$$

Cette deuxième composante de $\mathbf{G}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} \varrho_g v_g^2 + p_g + \frac{1}{\beta^2} \varrho_d v_d^2 + p_d \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \frac{C}{\beta} (v^* - v_g) + \frac{1}{\beta^2} (\varrho_d - \varrho_g) |v^*| v^* + \frac{C}{\beta} (v_d - v^*) + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \right\} = \\ & = p_a - \frac{C}{2\beta} \Delta v + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \end{aligned}$$

On évalue enfin la troisième composante de $\mathbf{G}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ (\varrho_g e_g + p_g) u_g + (\varrho_d e_d + p_d) u_d - |\lambda_1| (\varrho_g^* e_g^* - \varrho_g e_g) - |\lambda_2| (\varrho_d^* e_d^* - \varrho_d e_d) - \right. \\ & \left. - |\lambda_3| (\varrho_d e_d - \varrho_d^* e_d^*) \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant (134), on peut écrire

$$\begin{aligned} & \varrho_g^* e_g^* - \varrho_g e_g = \varrho_g^* (e_g^* - e_g) + (\varrho_g^* - \varrho_g) e_g \\ & = (\varrho_g + O\left(\frac{1}{\beta}\right)) \frac{1}{\beta C} \left(p_g v_g - p^* v^* + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a ((g v^* - \psi(v^*))) \right) \\ & \quad - \left(\frac{\varrho_g}{\beta} \frac{\varrho_g (v^* - v_g)}{C} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \right) (\varepsilon_g + \frac{1}{2\beta^2} v_g^2) \\ & = \frac{1}{\beta} \frac{\varrho_g}{C} \left\{ p_g v_g - p^* v^* + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a ((g v^* - \psi(v^*))) - \varrho_g (v^* - v_g) \varepsilon_g \right\} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \varrho_g^* e_g^* & = (\varrho_g + O\left(\frac{1}{\beta}\right)) \left\{ \varepsilon_g + \frac{1}{2\beta^2} v_g^2 + \frac{1}{\beta C} \left(p_g v_g - p^* v^* + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a ((g v^* - \psi(v^*))) \right) \right\} \\ & = \varrho_g \varepsilon_g + O\left(\frac{1}{\beta}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho_d^* e_d^* & = (\varrho_d + O\left(\frac{1}{\beta}\right)) \left\{ \varepsilon_d + \frac{1}{2\beta^2} v_d^2 + \frac{1}{\beta C} \left(p^* v^* - p_d v_d + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a ((g v^* - \psi(v^*))) \right) \right\} \\ & = \varrho_d \varepsilon_d + O\left(\frac{1}{\beta}\right) \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} & \varrho_d e_d - \varrho_d^* e_d^* = \varrho_d^* (e_d - e_d^*) + (\varrho_d - \varrho_d^*) e_d \\ & = -(\varrho_d + O\left(\frac{1}{\beta}\right)) \frac{1}{\beta C} \left(p^* v^* - p_d v_d + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a ((g v^* - \psi(v^*))) \right) \\ & \quad - \left(\frac{\varrho_d}{\beta} \frac{\varrho_d (v^* - v_d)}{C} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \right) (\varepsilon_d + \frac{1}{2\beta^2} v_d^2) \\ & = \frac{1}{\beta} \frac{\varrho_d}{C} \left\{ p_d v_d - p^* v^* - \frac{\Delta x}{2} \varrho_a ((g v^* - \psi(v^*))) - \varrho_d (v^* - v_d) \varepsilon_d \right\} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \end{aligned}$$

Cette troisième composante de $\mathbf{G}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d)$ est donc égale à

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\beta} \left\{ (\varrho_g(\varepsilon_g + \frac{1}{2\beta^2}v_g^2) + p_g)v_g + (\varrho_d(\varepsilon_d + \frac{1}{2\beta^2}v_d^2) + p_d)v_d \right. \\
& - \left(p_g v_g - p^* v^* + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a((gv^* - \psi(v^*)) - \varrho_g(v^* - v_g)\varepsilon_g + |v^*|(\varrho_d \varepsilon_d - \varrho_g \varepsilon_g)) \right. \\
& \left. \left. + p_d v_d - p^* v^* - \frac{\Delta x}{2} \varrho_a((gv^* - \psi(v^*)) - \varrho_d(v^* - v_d)\varepsilon_d) \right) \right\} + O(\frac{1}{\beta^2}) \\
& = \frac{1}{2\beta} \{ 2p^* v^* + \varrho_g \varepsilon_g (v^* + |v^*|) + \varrho_d \varepsilon_d (v^* - |v^*|) \} + O(\frac{1}{\beta^2}) \\
& = \frac{1}{\beta} (p^* v^* + \varrho_g \varepsilon_g v_+^* + \varrho_d \varepsilon_d v_-^*) + O(\frac{1}{\beta^2}).
\end{aligned}$$

En résumé, on obtient ainsi

$$\beta \mathbf{G}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \begin{pmatrix} \varrho_g v_+^* + \varrho_d v_-^* \\ \beta p_a - \frac{C}{2}(v_d - v_g) \\ p^* v^* + \varrho_g \varepsilon_g v_+^* + \varrho_d \varepsilon_d v_-^* \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\beta}). \quad (142)$$

On a par ailleurs

$$\beta \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = \varrho_a \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(g - \varphi(v^*)) \\ gv^* - \psi(v^*) \end{pmatrix}. \quad (143)$$

On déduit alors de (142) et (143) que, dans la limite $\alpha \rightarrow +\infty$, le schéma (139) tend formellement vers

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\varrho}_j &= \varrho_j - \frac{\Delta s}{\Delta x} \left\{ (\varrho_j v_{j+\frac{1}{2}}^+ + \varrho_{j+1} v_{j+\frac{1}{2}}^-) - (\varrho_{j-1} v_{j-\frac{1}{2}}^+ + \varrho_j v_{j-\frac{1}{2}}^-) \right\}, \\ \frac{1}{2\Delta x} (p_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{2} \left\{ \varrho_{j-\frac{1}{2}} (g - \varphi(v_{j-\frac{1}{2}})) + \varrho_{j+\frac{1}{2}} (g - \varphi(v_{j+\frac{1}{2}})) \right\}, \\ \bar{\varrho}_j \bar{\varepsilon}_j &= \varrho_j \varepsilon_j - \frac{\Delta s}{\Delta x} \left\{ p_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}} + \right. \\ & \quad \left. + (\varrho_j \varepsilon_j v_{j+\frac{1}{2}}^+ + \varrho_{j+1} \varepsilon_{j+1} v_{j+\frac{1}{2}}^-) - (\varrho_{j-1} \varepsilon_{j-1} v_{j-\frac{1}{2}}^+ + \varrho_j \varepsilon_j v_{j-\frac{1}{2}}^-) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Delta s}{2} \varrho_{j+\frac{1}{2}} (g(v_{j-\frac{1}{2}} + v_{j+\frac{1}{2}}) - (\psi(v_{j-\frac{1}{2}}) + \psi(v_{j+\frac{1}{2}}))) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

où (cf. section 4)

$$\begin{cases} \varrho_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\varrho_j + \varrho_{j+1}), \\ v_{j+\frac{1}{2}} = \varphi^{-1} \left(g - \frac{1}{\varrho_{j+\frac{1}{2}}} \frac{p_{j+1} - p_j}{\Delta x} \right), \\ p_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p_j + p_{j+1}). \end{cases} \quad (145)$$

On en déduit que le couple $(\bar{\varrho}_j, \bar{\varepsilon}_j)$ est donné par

$$\begin{cases} \bar{\varrho}_j = \varrho_j - \frac{\Delta s}{\Delta x} \left\{ (\varrho_j v_{j+\frac{1}{2}}^+ + \varrho_{j+1} v_{j+\frac{1}{2}}^-) - (\varrho_{j-1} v_{j-\frac{1}{2}}^+ + \varrho_j v_{j-\frac{1}{2}}^-) \right\}, \\ \bar{\varrho}_j \bar{\varepsilon}_j = \varrho_j \varepsilon_j - \frac{\Delta s}{\Delta x} \left\{ (\varrho_j \varepsilon_j v_{j+\frac{1}{2}}^+ + \varrho_{j+1} \varepsilon_{j+1} v_{j+\frac{1}{2}}^-) - \right. \\ \left. - (\varrho_{j-1} \varepsilon_{j-1} v_{j-\frac{1}{2}}^+ + \varrho_j \varepsilon_j v_{j-\frac{1}{2}}^-) + p_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{\Delta s}{2} \varrho_{j+\frac{1}{2}} \left(g(v_{j-\frac{1}{2}} + v_{j+\frac{1}{2}}) - (\psi(v_{j-\frac{1}{2}}) + \psi(v_{j+\frac{1}{2}})) \right) \right\} \end{cases} \quad (146)$$

où $\varrho_{j+\frac{1}{2}}, v_{j+\frac{1}{2}}$ et $p_{j+\frac{1}{2}}$ sont définis en (145). Réciproquement, il est clair que (145),(146) entraînent (144).

Le schéma (146) étant en fait une approximation tout à fait naturelle du système (54), on trouve ainsi que le schéma numérique (137) d'approximation du système (35) préserve le comportement asymptotique des solutions de (35) lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.

7 L'approche méthode de relaxation.

On va montrer dans cette section comment une approche basée sur une méthode de relaxation permet de retrouver le schéma précédent. A titre introductif, on rappelle comment fonctionne la méthode de relaxation sur le système de la dynamique des gaz

7.1 Le cas du système de la dynamique des gaz

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\varrho e) + \partial_x((\varrho e + p)u) = 0. \end{cases} \quad (147)$$

On suit ici Bouchut (cf. [Bou04]). On associe au système (147) le système de “relaxation”⁶

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\varrho e) + \partial_x((\varrho e + \pi)u) = 0, \\ \partial_t(\varrho \pi) + \partial_x(\varrho \pi u) + C^2 \partial_x u = 0 \end{cases} \quad (148)$$

où $C > 0$ est une vitesse Lagrangienne des ondes⁷ qui joue le rôle de paramètre. On rappelle le résultat suivant de vérification immédiate.

Proposition 12 *Le système (148) est hyperbolique. Les valeurs propres de la matrice Jacobienne associée sont données par*

$$\lambda_1 = u - \frac{C}{\varrho}, \quad \lambda_2 = u \text{ (double)}, \quad \lambda_3 = u + \frac{C}{\varrho}. \quad (149)$$

Les champs caractéristiques correspondants sont linéairement dégénérés.

Il est très aisé de construire la solution du problème de Riemann pour le système (148). En posant

$$\widehat{\mathbf{U}} = (\varrho, \varrho u, \varrho e, \varrho \pi)^T, \quad (150)$$

cette solution est de la forme

$$\mathbf{R}\left(\frac{x}{t}; \widehat{\mathbf{U}}_g, \widehat{\mathbf{U}}_d\right) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{U}}_g, & \frac{x}{t} < \sigma_1, \\ \widehat{\mathbf{U}}_g^*, & \sigma_1 < \frac{x}{t} < \sigma_2, \\ \widehat{\mathbf{U}}_d^*, & \sigma_2 < \frac{x}{t} < \sigma_3, \\ \widehat{\mathbf{U}}_d, & \frac{x}{t} > \sigma_3 \end{cases} \quad (151)$$

où les vitesses des ondes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont données par

$$\begin{cases} \sigma_1 = u_g - \frac{C}{\varrho_g} = u^* - \frac{C}{\varrho_g^*}, \\ \sigma_2 = u_g^* = u_d^* = u^*, \\ \sigma_3 = u^* + \frac{C}{\varrho_d^*} = u_d + \frac{C}{\varrho_d}. \end{cases} \quad (152)$$

Pour déterminer les états intermédiaires $\widehat{\mathbf{U}}_g^*$ et $\widehat{\mathbf{U}}_d^*$, on écrit les relations de saut de Rankine-Hugoniot à la traversée de chaque onde, ce qui donne outre (152)

$$u^* = u_a - \frac{1}{2C} \Delta \pi, \quad (153)$$

⁶En fait, on a supprimé le terme de relaxation dans la dernière équation (148)

⁷Le paramètre C est identique à celui qui a été introduit dans les sections précédentes.

$$\pi_g^* = \pi_d^* = \pi^* = \pi_a - \frac{C}{2}\Delta u, \quad (154)$$

et

$$\begin{cases} e_g^* = e_g + \frac{1}{C}(\pi_g u_g - \pi^* u^*), \\ e_d^* = e_d + \frac{1}{C}(\pi^* u^* - \pi_d u_d). \end{cases} \quad (155)$$

On déduit alors de (152) et (153)

$$\begin{cases} \tau_g^* = \tau_g + \frac{1}{2C}\Delta u - \frac{1}{2C^2}\Delta\pi, \\ \tau_d^* = \tau_d + \frac{1}{2C}\Delta u + \frac{1}{2C^2}\Delta\pi, \end{cases} \quad (156)$$

ce qui finit de déterminer ces états intermédiaires. On note ensuite que

$$\begin{cases} \varepsilon_g^* = \varepsilon_g + \frac{1}{2C^2}(\pi^{*2} - \pi_g^2), \\ \varepsilon_d^* = \varepsilon_d + \frac{1}{2C^2}(\pi^{*2} - \pi_d^2). \end{cases} \quad (157)$$

Ceci résulte de (155) et des relations de saut relatives à la dernière équation (148) à la traversée des première et troisième ondes

$$\begin{cases} u^* - u_g = -\frac{1}{C}(\pi^* - \pi_g), \\ u_d - u^* = \frac{1}{C}(\pi_d - \pi^*). \end{cases} \quad (158)$$

Remarque 6. On vérifie aisément que les solutions “assez régulières” de (148) satisfont à l'équation

$$\partial_t(\varrho(\varepsilon - \frac{\pi^2}{2C^2})) + \partial_x(\varrho(\varepsilon - \frac{\pi^2}{2C^2})u) = 0. \quad (159)$$

Par ailleurs, les relations (157) ne sont autres que les relations de saut relatives à cette équation pour $\mathbf{R}(\cdot; \widehat{\mathbf{U}}_g, \widehat{\mathbf{U}}_d)$ à la traversée des première et troisième ondes. Puisque la relation de saut à la traversée de la deuxième onde est trivialement satisfaite, on obtient que $\mathbf{R}(\cdot; \widehat{\mathbf{U}}_g, \widehat{\mathbf{U}}_d)$ vérifie l'équation (159).

On définit ensuite le solveur de Riemann approché pour le système de la dynamique des gaz (147) par

$$\widetilde{\mathbf{W}}(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d) = P\mathbf{R}(\frac{x}{t}; \widehat{\mathbf{U}}_g, \widehat{\mathbf{U}}_d) \quad (160)$$

où P est l'opérateur de projection défini par

$$\mathbf{U} = (\varrho, \varrho u, \varrho e)^T = P\widehat{\mathbf{U}} \quad (161)$$

tandis que $\widehat{\mathbf{U}}_g$ et $\widehat{\mathbf{U}}_d$ sont obtenus à partir de \mathbf{U}_g et \mathbf{U}_d respectivement en posant

$$\pi_g = p_g, \quad \pi_d = p_d. \quad (162)$$

Il est immédiat de voir que ce solveur de Riemann est consistant avec le système de la dynamique des gaz. Bien plus, on vérifie aisément que le solveur de Riemann approché construit par cette méthode de relaxation coïncide avec le solveur de Riemann approché obtenu à partir du solveur de Riemann pour le système de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange introduit à la section 4.

Il s'agit ensuite d'étudier ses propriétés de positivité et de consistance avec la condition d'entropie

$$\partial_t(\varrho\phi(s)) + \partial_x(\varrho\phi(s)u) \leq 0 \quad (163)$$

où ϕ est une fonction décroissante et convexe. A nouveau, on supposera que l'équation d'état $p = p(\varrho, \varepsilon)$ dérive d'une équation d'état complète $\varepsilon = \varepsilon(\varrho, s)$. On commence par vérifier le résultat suivant où, de manière générale, $I(a, b)$ désigne l'intervalle fermé d'extrémités a et b .

Lemme 1 *On fait l'hypothèse (162). Alors, si on choisit le paramètre C de manière que d'une part ϱ_g^* et ϱ_d^* soient > 0 et que d'autre part*

$$\begin{cases} \varrho^2 \partial_\varrho p(\varrho, s_g) \leq C^2, & \varrho \in I(\varrho_g, \varrho_g^*), \\ \varrho^2 \partial_\varrho p(\varrho, s_d) \leq C^2, & \varrho \in I(\varrho_d, \varrho_d^*), \end{cases} \quad (164)$$

on obtient

$$\varepsilon_g^* \geq \varepsilon(\varrho_g^*, s_g), \quad \varepsilon_d^* \geq \varepsilon(\varrho_d^*, s_d). \quad (165)$$

Démonstration. On vérifie la deuxième inégalité (165) pour fixer les idées. On note d'abord que

$$\begin{aligned} \varepsilon_d^* - \varepsilon(\varrho_d^*, s_d) &= \frac{1}{2C^2}(p(\varrho_d^*, s_d) - \pi^*)^2 + \varepsilon_d - \frac{p_d^2}{2C^2} - \varepsilon(\varrho_d^*, s_d) + \frac{p(\varrho_d^*, s_d)^2}{2C^2} \\ &\quad + p(\varrho_d^*, s_d) \left(\frac{1}{\varrho_d} + \frac{p_d}{C^2} - \frac{1}{\varrho_d^*} - \frac{p(\varrho_d^*, s_d)}{C^2} \right). \end{aligned}$$

En effet, le membre de droite de l'équation précédente peut encore s'écrire

$$\varepsilon_d + \frac{1}{2C^2}(\pi^{*2} - p_d^2) + p(\varrho_d^*, s_d) \left(\frac{1}{\varrho_d} + \frac{p_d}{C^2} - \frac{1}{\varrho_d^*} - \frac{\pi^*}{C^2} \right) - \varepsilon(\varrho_d^*, s_d).$$

Or, puisque $\pi_d = p_d$, on a d'une part en vertu de la deuxième relation (157)

$$\varepsilon_d + \frac{1}{2C^2}(\pi^{*2} - p_d^2) = \varepsilon_d + \frac{1}{2C^2}(\pi^{*2} - \pi_d^2) = \varepsilon_d^*$$

et on déduit d'autre part de la troisième équation (152) et de la deuxième équation (158)

$$\frac{1}{\varrho_d} + \frac{p_d}{C^2} - \frac{1}{\varrho_d^*} - \frac{\pi^*}{C^2} = \frac{1}{\varrho_d} + \frac{\pi_d}{C^2} - \frac{1}{\varrho_d^*} - \frac{\pi^*}{C^2} = 0,$$

ce qui prouve notre assertion.

Pour montrer que $\varepsilon_d^* \geq \varepsilon(\varrho_d^*, s_d)$, il suffit donc de vérifier l'inégalité

$$\varepsilon_d - \frac{p_d^2}{2C^2} - \varepsilon(\varrho_d^*, s_d) + \frac{p(\varrho_d^*, s_d)^2}{2C^2}$$

$$+p(\varrho_d^*, s_d) \left(\frac{1}{\varrho_d} + \frac{p_d}{C^2} - \frac{1}{\varrho_d^*} - \frac{p(\varrho_d^*, s_d)}{C^2} \right) \geq 0.$$

On introduit alors la fonction

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho) &= \varepsilon(\varrho, s_0) - \frac{p(\varrho, s_0)^2}{2C^2} - \varepsilon(\varrho_0, s_0) + \frac{p(\varrho_0, s_0)^2}{2C^2} \\ &\quad + p(\varrho_0, s_0) \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{p(\varrho, s_0)}{C^2} - \frac{1}{\varrho_0} - \frac{p(\varrho_0, s_0)}{C^2} \right) \end{aligned}$$

où ϱ_0 et s_0 sont fixés. On a $\varphi(\varrho_0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \varphi'(\varrho) &= \partial_\varrho \varepsilon(\varrho, s_0) - \frac{1}{C^2} p(\varrho, s_0) \partial_\varrho p(\varrho, s_0) + p(\varrho_0, s_0) \left(-\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{C^2} \partial_\varrho p(\varrho, s_0) \right) \\ &= (p(\varrho, s_0) - p(\varrho_0, s_0)) \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{C^2} \partial_\varrho p(\varrho, s_0) \right). \end{aligned}$$

Tant que

$$\varrho^2 \partial_\varrho p(\varrho, s_0) \leq C^2,$$

on en déduit que $\varphi'(\varrho)$ est du signe de $p(\varrho, s_0) - p(\varrho_0, s_0)$ c'est-à-dire du signe de $\varrho - \varrho_0$ puisque $\varrho \rightarrow p(\varrho, s)$ est une fonction strictement croissante. Alors φ atteint son minimum en ϱ_0 de sorte que $\varphi(\varrho)$ est ≥ 0 .

On applique ce résultat avec $\varrho_0 = \varrho_d^*$, $s_0 = s_d$ et $\varrho = \varrho_d$. On obtient

$$\forall \varrho \in I(\varrho_d, \varrho_d^*), \quad \varrho^2 \partial_\varrho p(\varrho, s_d) \leq C^2 \Rightarrow \varepsilon_d^* \leq \varepsilon(\varrho_d^*, s_d).$$

Ceci finit de prouver le lemme en ce qui concerne la deuxième inégalité (165). La première inégalité se démontre exactement de la même façon.

On est maintenant en mesure de démontrer la

Proposition 13 *Sous les hypothèses du Lemme 1, le solveur de Riemann approché (160) est consistant avec la condition d'entropie (163).*

Démonstration. En écrivant l'équation d'état complète sous la forme $s = s(\varrho, \varepsilon)$, il s'agit de vérifier (cf. Proposition 5) que, pour toute fonction ϕ décroissante (et convexe), on a

$$\begin{aligned} \varrho_d \phi(s_d) u_d - \varrho_g \phi(s_g) u_g &\leq \sigma_1 (\varrho_g^* \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) - \varrho_g \phi(s_g)) \\ &\quad + \sigma_2 (\varrho_d^* \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) - \varrho_g^* \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*))) + \sigma_3 (\varrho_d \phi(s_d) - \varrho_d^* \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*))) \end{aligned}$$

où $s_g = s(\varrho_g, \varepsilon_g)$, $s_d = s(\varrho_d, \varepsilon_d)$. On commence par noter que

$$\begin{aligned} \varrho_d \phi(s_d) u_d - \varrho_g \phi(s_g) u_g &= \sigma_1 (\varrho_g^* \phi(s_g) - \varrho_g \phi(s_g)) + \sigma_2 (\varrho_d^* \phi(s_d) - \varrho_g^* \phi(s_g)) \\ &\quad + \sigma_3 (\varrho_d \phi(s_d) - \varrho_d^* \phi(s_d)) \end{aligned}$$

ceci en utilisant (152). Alors il revient au même de vérifier que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma_1 (\varrho_g^* \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) - \varrho_g^* \phi(s_g)) + \sigma_2 (\varrho_d^* \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) - \varrho_d^* \phi(s_d)) \\ &\quad - \varrho_g^* \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) + \varrho_g^* \phi(s_g) + \sigma_3 (\varrho_d^* \phi(s_d) - \varrho_d^* \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*))) \end{aligned}$$

ou encore

$$0 \leq (\sigma_1 - \sigma_2)\varrho_g^*(\phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) - \phi(s_g)) + (\sigma_2 - \sigma_3)\varrho_d^*(\phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) - \phi(s_d)).$$

Puisque la fonction ϕ est décroissante, il suffit donc de montrer que

$$s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*) \geq s_g, \quad s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*) \geq s_d.$$

Or, puisque

$$\partial_s \varepsilon(\varrho, \varepsilon) = \frac{1}{T} > 0,$$

ceci résulte des inégalités (165).

Il reste à choisir convenablement le paramètre C pour que les conditions d'application du Lemme 1 soient satisfaites. Comme dans [Bou04] (Proposition 2.18) et sous les hypothèses

$$\begin{cases} \partial_\varrho(\varrho c(\varrho, s)) > 0 \text{ pour tout } \varrho > 0, \\ \varrho c(\varrho, s) \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \varrho \rightarrow +\infty, \\ \partial_\varrho(\varrho c(\varrho, s)) \leq \alpha c(\varrho, s) \text{ pour un certain } \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (166)$$

où $c(\varrho, s) = \sqrt{\partial_\varrho p(\varrho, s)}$ désigne la vitesse du son, on peut expliciter une borne inférieure du paramètre C permettant de garantir que ϱ_g^* et ϱ_d^* sont > 0 et que les conditions sous-caractéristiques (164) ont lieu.

7.2 Le cas du système de la dynamique des gaz avec termes de friction et de gravité.

Nous allons maintenant généraliser la méthode de relaxation au système de la dynamique des gaz avec termes de friction et de gravité. On associe au système (35) le système de relaxation

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) = 0, \\ \partial_t(\varrho u) + \partial_x(\varrho u^2 + \pi) = \varrho(g - \alpha\varphi(u)), \\ \partial_t(\varrho e) + \partial_x((\varrho e + \pi)u) = \varrho(gu - \alpha\psi(u)), \\ \partial_t(\varrho\pi) + \partial_x(\varrho\pi u) + C^2\partial_x u = 0. \end{cases} \quad (167)$$

Ce système est de la forme

$$\partial_t \widehat{\mathbf{U}} + \partial_x \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{\mathbf{U}}) = \widehat{\mathbf{S}}(\widehat{\mathbf{U}}) \quad (168)$$

où

$$\widehat{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ \varrho e \\ \varrho\pi \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{\mathbf{U}}) = \begin{pmatrix} \varrho u \\ \varrho u^2 + \pi \\ (\varrho e + \pi)u \\ \varrho\pi u + C^2 u \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{S}}(\widehat{\mathbf{U}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho(g - \alpha\varphi(u)) \\ \varrho(gu - \alpha\psi(u)) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (169)$$

On construit un solveur de Riemann approché de (167) de la forme

$$\tilde{\mathbf{R}}\left(\frac{x}{t}; \widehat{\mathbf{U}}_g, \widehat{\mathbf{U}}_d\right) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{U}}_g, & \frac{x}{t} < \sigma_1, \\ \widehat{\mathbf{U}}_g^*, & \sigma_1 < \frac{x}{t} < \sigma_2, \\ \widehat{\mathbf{U}}_d^*, & \sigma_2 < \frac{x}{t} < \sigma_3, \\ \widehat{\mathbf{U}}_d, & \frac{x}{t} > \sigma_3. \end{cases} \quad (170)$$

A nouveau, on suppose que (162) a lieu. D'autre part, les états intermédiaires $\widehat{\mathbf{U}}_g^*$ et $\widehat{\mathbf{U}}_d^*$ sont caractérisés par les quadruplets $(\varrho_g^*, u^*, e_g^*, \pi_g^*)$ et $(\varrho_d^*, u^*, e_d^*, \pi_d^*)$ ⁸ tandis que les vitesses d'ondes sont prises égales à

$$\begin{cases} \sigma_1 = u^* - \frac{C}{\varrho_g^*}, \\ \sigma_2 = u^*, \\ \sigma_3 = u^* + \frac{C}{\varrho_d^*}. \end{cases} \quad (171)$$

Puisque les première et quatrième équations (167) sont sans second membre, il est naturel d'imposer pour ces équations les conditions de saut de Rankine-Hugoniot à la traversée des différentes ondes. On obtient ainsi pour la première équation (167)

$$\begin{cases} (u^* - \frac{C}{\varrho_g^*})(\varrho_g^* - \varrho_g) = \varrho_g^* u^* - \varrho_g u_g, \\ u^*(\varrho_d^* - \varrho_g^*) = \varrho_d^* u^* - \varrho_g^* u^*, \\ (u^* + \frac{C}{\varrho_d^*})(\varrho_d - \varrho_d^*) = \varrho_d u_d - \varrho_d^* u^*. \end{cases} \quad (172)$$

Les première et troisième relations (172) donnent

$$\begin{cases} u^* - \frac{C}{\varrho_g^*} = u_g - \frac{C}{\varrho_g}, \\ u^* + \frac{C}{\varrho_d^*} = u_d + \frac{C}{\varrho_d} \end{cases}$$

tandis que la seconde relation est trivialement satisfaite. En résumé, (171) et les relations de saut de Rankine-Hugoniot relatives à l'équation de conservation de la masse impliquent (152). On obtient ensuite pour la quatrième équation (167)

$$\begin{cases} \sigma_1(\varrho_g^* \pi_g^* - \varrho_g \pi_g) = \varrho_g^* \pi_g^* u^* - \varrho_g \pi_g u_g + C^2(u^* - u_g), \\ \sigma_2(\varrho_d^* \pi_d^* - \varrho_g^* \pi_g^*) = \varrho_d^* \pi_d^* u^* - \varrho_g^* \pi_g^* u^*, \\ \sigma_3(\varrho_d \pi_d - \varrho_d^* \pi_d^*) = \varrho_d \pi_d u_d - \varrho_d^* \pi_d^* u^* + C^2(u_d - u^*). \end{cases} \quad (173)$$

⁸On notera que, à la différence du cas homogène, on suppose a priori $\pi_g^* \neq \pi_d^*$.

Compte tenu de (152), les première et troisième relations (173) donnent respectivement

$$\pi_g^* = \pi_g - C(u^* - u_g) = p_g - C(u^* - u_g) \quad (174)$$

et

$$\pi_d^* = \pi_d + C(u^* - u_d) = p_d + C(u^* - u_d) \quad (175)$$

tandis que la deuxième relation (173) est automatiquement satisfaite.

On écrit maintenant que le solveur de Riemann (170) est consistant avec la forme intégrale du système (168), c'est à dire

$$\Delta \widehat{\mathbf{F}} - \Delta x \widetilde{\mathbf{S}} = \sigma_1(\widehat{\mathbf{U}}_g^* - \widehat{\mathbf{U}}_g) + \sigma_2(\widehat{\mathbf{U}}_d^* - \widehat{\mathbf{U}}_d) + \sigma_3(\widehat{\mathbf{U}}_d - \widehat{\mathbf{U}}_d^*). \quad (176)$$

A nouveau, il est naturel de choisir

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho_a(g - \alpha\varphi(u^*)) \\ \varrho_a(gu^* - \alpha\psi(u^*)) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (177)$$

Notons que les première et quatrième composantes de la relation de consistance (176) sont automatiquement satisfaites car conséquences des relations de saut de Rankine-Hugoniot. La deuxième composante de (176) s'écrit en tenant compte de (162)

$$\begin{aligned} & \varrho_d u_d^2 + p_d - \varrho_g u_g^2 - p_g - \Delta x \varrho_a(g - \alpha\varphi(u^*)) \\ &= \sigma_1(\varrho_g^* u^* - \varrho_g u_g) + \sigma_2 u^*(\varrho_d^* - \varrho_g^*) + \sigma_3(\varrho_d u_d - \varrho_d^* u^*) \end{aligned}$$

soit en vertu de (152)

$$p_d - p_g - \Delta x \varrho_a(g - \alpha\varphi(u^*)) = C(u_g + u_d - 2u^*)$$

ou

$$u^* + \frac{\alpha \Delta x \varrho_a}{2C} \varphi(u^*) = u_a - \frac{1}{2C} (\Delta p - \Delta x \varrho_a g). \quad (178)$$

On retrouve l'équation (95) qui définit u^* .

La troisième composante de (176) donne

$$\begin{aligned} & (\varrho_d e_d + p_d) u_d - (\varrho_g e_g + p_g) u_g - \Delta x \varrho_a (gu^* - \alpha\psi(u^*)) \\ &= \sigma_1(\varrho_g^* e_g^* - \varrho_g e_g) + \sigma_2(\varrho_d^* e_d^* - \varrho_g^* e_g^*) + \sigma_3(\varrho_d e_d - \varrho_d^* e_d^*) \end{aligned}$$

soit toujours en vertu de (152)

$$\Delta(pu) - \Delta x \varrho_a (gu^* - \alpha\psi(u^*)) = C(e_g - e_g^* + e_d - e_d^*) \quad (179)$$

relation qui est identique à la troisième relation (82) avec $\tilde{u} = u^*$.

Ainsi qu'on l'a déjà constaté dans la section 4, les états $\widehat{\mathbf{U}}_g^*$ et $\widehat{\mathbf{U}}_d^*$ ne sont pas complètement déterminés à ce stade : on ne dispose que de la seule relation (179) pour calculer e_g^* et e_d^* . On note cependant que, d'après (174) et (175), on a

$$\pi_a^* = \frac{1}{2}(\pi_g^* + \pi_d^*) = p_a - \frac{C}{2} \Delta u$$

de sorte que en vertu de (89)

$$\pi_a^* = p^*.$$

Il apparaît alors logique de définir e_g^* et e_d^* comme dans (134). Dans ces conditions, le solveur de Riemann pour le système (35) de la dynamique des gaz avec termes de friction et de gravité défini par

$$\widetilde{\mathbf{W}}\left(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_g, \mathbf{U}_d\right) = P\widetilde{\mathbf{R}}\left(\frac{x}{t}; \widehat{\mathbf{U}}_g, \widehat{\mathbf{U}}_d\right) \quad (180)$$

coïncide avec le solveur de Riemann obtenu à la section 6. Le schéma numérique correspondant est donc “asymptotic preserving”. Bien plus les deux méthodes de construction de ce schéma sont équivalentes.

Il reste à étudier les propriétés de ce solveur de Riemann : positivité et consistance avec la condition d’entropie

$$\partial_t(\varrho\phi(s)) + \partial_x(\varrho\phi(s)u) \leq \alpha \frac{\varrho\phi'(s)}{T}(\varphi(u)u - \psi(u)) \quad (181)$$

où la fonction ϕ est décroissante et convexe. On commence par généraliser le Lemme 1 à ce cas de système avec second membre.

Lemme 2 *Sous les conditions d’application du Lemme 1, le solveur de Riemann (180) vérifie*

$$\begin{cases} \varepsilon_g^* \geq \varepsilon(\varrho_g^*, s_g) + \frac{\Delta x}{2C} \alpha \varrho_a(\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*)), \\ \varepsilon_d^* \geq \varepsilon(\varrho_d^*, s_d) + \frac{\Delta x}{2C} \alpha \varrho_a(\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*)). \end{cases} \quad (182)$$

Démonstration. Vérifions par exemple la deuxième inégalité (182). On établit d’abord la relation

$$\varepsilon_d^* = \varepsilon_d + \frac{1}{2C^2}(\pi_d^{*2} - \pi_d^2) + \frac{\Delta x}{2C} \alpha \varrho_a(\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*)). \quad (183)$$

On part de l’expression (134) de e_d^*

$$\begin{aligned} e_d^* &= e_d + \frac{1}{C} \left\{ p^* u^* - p_d u_d + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a(gu^* - \alpha\psi(u^*)) \right\} \\ &= e_d + \frac{1}{C} \left\{ \pi_a^* u^* - \pi_d u_d + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a(gu^* - \alpha\psi(u^*)) \right\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\varepsilon_d^* = \varepsilon_d + \frac{1}{2}(u_d^2 - u^{*2}) + \frac{1}{C} \left\{ \pi_a^* u^* - \pi_d u_d + \frac{\Delta x}{2} \varrho_a(gu^* - \alpha\psi(u^*)) \right\}.$$

On note alors que

$$\pi_a^* u^* - \pi_d u_d = \pi_d^* u^* - \pi_d u_d + \frac{1}{2}(\pi_g^* - \pi_d^*) u^*.$$

Mais on déduit de (174) et (175) que

$$\pi_g^* - \pi_d^* = -\Delta\pi - 2C(u^* - u_a)$$

soit en utilisant (178)

$$\begin{aligned}\pi_g^* - \pi_d^* &= -\Delta\pi - 2C \left\{ -\frac{1}{2C} \Delta\pi + \frac{\Delta x}{2C} \varrho_a(g - \alpha\varphi(u^*)) \right\} \\ &= -\Delta x \varrho_a(g - \alpha\varphi(u^*))\end{aligned}$$

de sorte que

$$\varepsilon_d^* = \varepsilon_d + \frac{1}{2}(u_d^2 - u^{*2}) + \frac{1}{C} \left\{ \pi_d^* u^* - \pi_d u_d + \frac{\Delta x}{2} \alpha \varrho_a(\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*)) \right\}.$$

Par ailleurs, en remplaçant u^* par sa valeur tirée de l'équation (175) soit

$$u^* = u_d + \frac{1}{C}(\pi_d^* - \pi_d),$$

on a

$$\frac{1}{2}(u_d^2 - u^{*2}) + \frac{1}{C}(\pi_d^* u^* - \pi_d u_d) = \frac{1}{2C^2}(\pi_d^{*2} - \pi_d^2)$$

ce qui prouve (183).

De manière analogue au cas sans second membre, on remarque ensuite que

$$\frac{1}{\varrho_d} + \frac{\pi_d}{C^2} - \frac{1}{\varrho_d^*} - \frac{\pi_d^*}{C^2} = 0. \quad (184)$$

Ceci résulte de (175) et de la troisième relation (172).

On raisonne alors exactement comme dans la démonstration du Lemme 1.

On déduit de (184) puis de (183) que

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2C^2}(p(\varrho_d^*, s_d) - \pi_d^*)^2 + \varepsilon_d - \frac{p_d^2}{2C^2} + \frac{p(\varrho_d^*, s_d)^2}{2C^2} + \\ & + p(\varrho_d^*, s_d) \left(\frac{1}{\varrho_d} + \frac{p_d}{C^2} - \frac{1}{\varrho_d^*} - \frac{p(\varrho_d^*, s_d)}{C^2} \right) = \varepsilon_d + \frac{1}{2C^2}(\pi_d^{*2} - p_d^2) = \\ & = \varepsilon_d + \frac{1}{2C^2}(\pi_d^{*2} - \pi_d^2) = \varepsilon_d^* - \frac{\Delta x}{2C} \alpha \varrho_a(\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*))\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\varepsilon_d^* - \varepsilon(\varrho_d^*, s_d) - \frac{\Delta x}{2C} \alpha \varrho_a(\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*)) &= \\ = \frac{1}{2C^2}(p(\varrho_d^*, s_d) - \pi_d^*)^2 + \varepsilon_d - \frac{p_d^2}{2C^2} - \varepsilon(\varrho_d^*, s_d) + \frac{p(\varrho_d^*, s_d)^2}{2C^2} + \\ + p(\varrho_d^*, s_d) \left(\frac{1}{\varrho_d} + \frac{p_d}{C^2} - \frac{1}{\varrho_d^*} - \frac{p(\varrho_d^*, s_d)}{C^2} \right).\end{aligned}$$

Or on a vu dans la démonstration du Lemme 1 que, pour $\varrho_d^* > 0$ et sous la condition sous-caractéristique

$$\varrho^2 \partial_\varrho p(\varrho, s_d) \leq C^2, \quad \varrho \in I(\varrho_d, \varrho_d^*),$$

le second membre de l'équation précédente est ≥ 0 . On en déduit

$$\varepsilon_d^* \geq \varepsilon(\varrho_d^*, s_d) + \frac{\Delta x}{2C} \alpha \varrho_a(\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*))$$

c'est à dire précisément l'inégalité cherchée.

On peut maintenant établir le

Théorème 1 *Sous les hypothèses du Lemme 1, le solveur de Riemann approché (180) est consistant avec la forme intégrale de la condition d'entropie (181).*

Démonstration. En utilisant (152), on obtient

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \{ \varrho_g^* \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) - \varrho_g \phi(s_g) \} + \sigma_2 \{ \varrho_d^* \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) - \varrho_g^* \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) \} + \\ & \quad + \sigma_3 \{ \varrho_d \phi(s_d) - \varrho_d^* \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) \} = \\ & = \varrho_d u_d \phi(s_d) - \varrho_g u_g \phi(s_g) + C \{ \phi(s_g) - \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) + \phi(s_d) - \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) \}. \end{aligned}$$

On note ensuite que

$$s = s(\varrho, \varepsilon(\varrho, s))$$

de sorte que

$$s_d = s(\varrho_d^*, \varepsilon(\varrho_d^*, s_d))$$

et

$$\begin{aligned} \phi(s_d) - \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) &= \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon(\varrho_d^*, s_d))) - \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) = \\ &= \phi'(s(\varrho_d^*, \bar{\varepsilon}_d^*)) \partial_\varepsilon s(\varrho_d^*, \bar{\varepsilon}_d^*)(\varepsilon(\varrho_d^*, s_d) - \varepsilon_d^*) \end{aligned}$$

pour un certain $\bar{\varepsilon}_d^* \in I(\varepsilon(\varrho_d^*, s_d), \varepsilon_d^*)$. Puisque

$$\partial_\varepsilon s(\varrho, \varepsilon) = \frac{1}{T(\varrho, \varepsilon)} > 0$$

et que $\phi'(s) \leq 0$, on déduit de la deuxième inégalité (182)

$$\phi(s_d) - \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) \geq -\frac{\Delta x}{2C} \alpha \varrho_a \frac{\phi'(\bar{s}_d^*)}{\bar{T}_d^*} (\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*))$$

où

$$\bar{s}_d^* = s(\varrho_d^*, \bar{\varepsilon}_d^*), \quad \bar{T}_d^* = T(\varrho_d^*, \bar{\varepsilon}_d^*).$$

De la même façon, on trouve que

$$\phi(s_g) - \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) \geq -\frac{\Delta x}{2C} \alpha \varrho_a \frac{\phi'(\bar{s}_g^*)}{\bar{T}_g^*} (\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*)).$$

On obtient donc

$$\left\{ \begin{aligned} & \varrho_d u_d \phi(s_d) - \varrho_g u_g \phi(s_g) - \\ & -\frac{\Delta x}{2} \alpha \varrho_a \left(\frac{\phi'(\bar{s}_g^*)}{\bar{T}_g^*} + \frac{\phi'(\bar{s}_d^*)}{\bar{T}_d^*} \right) (\varphi(u^*)u^* - \psi(u^*)) \leq \\ & \leq \sigma_1 \{ \varrho_g^* \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) - \varrho_g \phi(s_g) \} + \\ & \quad + \sigma_2 \{ \varrho_d^* \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) - \varrho_g^* \phi(s(\varrho_g^*, \varepsilon_g^*)) \} + \\ & \quad + \sigma_3 \{ \varrho_d \phi(s_d) - \varrho_d^* \phi(s(\varrho_d^*, \varepsilon_d^*)) \} \end{aligned} \right. \quad (185)$$

ce qui prouve le résultat.

Comme dans le cas homogène, il reste à expliciter une borne inférieure du paramètre C permettant de garantir que les conditions d'application du Théorème 1 sont satisfaites, en l'occurrence la positivité de ϱ_g^* et ϱ_d^* ainsi que les conditions sous-caractéristiques.

8 Résultats numériques.

On présente maintenant plusieurs résultats numériques dans le cas du système de la dynamique des gaz avec termes de friction et de gravité en coordonnées d'Euler. Le terme de friction pour ces différents cas est linéaire et ne contribue pas à la dissipation d'entropie (i.e. $\chi = 0$ et $a = 1$ dans (36)).

Pour illustrer le bon comportement du schéma proposé dans les sections précédentes, il sera comparé à un schéma basé sur une stratégie de splitting d'opérateur : le premier pas correspond à l'approximation de la partie différentielle premier ordre et le second correspond à l'approximation des termes source. La méthode d'approximation pour le premier pas correspond au schéma de type Godunov décrit précédemment dans le cas homogène. Les termes source sont quant à eux approchés de manière implicite. Ainsi, si $\mathbf{U}_i^{n+1/2}$ correspond à l'approximation de la solution après l'étape de convection, on définit \mathbf{U}_i^{n+1} par le schéma implicite suivant :

$$\begin{cases} \varrho_i^{n+1} = \varrho_i^{n+1/2}, \\ (\varrho u)_i^{n+1} = \varrho_i^{n+1} \frac{u_i^{n+1/2} + g\Delta t}{1 + \alpha\Delta t}, \\ (\varrho E)_i^{n+1} = (\varrho E)_i^{n+1/2} + \Delta t \left((\varrho u)_i^{n+1} g - \alpha \frac{((\varrho u)_i^{n+1})^2}{\varrho_i^{n+1}} \right). \end{cases} \quad (186)$$

Les cas tests présentés sont de deux natures. Les trois premiers permettent d'évaluer l'aptitude des deux schémas numériques à maintenir ou à converger en temps long vers un état stationnaire. Différentes données initiales et conditions aux limites sont étudiés. Dans le quatrième cas test, on regarde comment les deux schémas réagissent lorsque le coefficient de friction α augmente.

Tous ces cas tests sont réalisés sur un domaine d'un mètre centré en 0, découpé en 100 mailles et le nombre de Courant est de 0.5. La loi d'état est de type gaz parfait, avec un coefficient adiabatique valant 1.4.

8.1 Maintien d'un état stationnaire de vitesse nulle.

Dans ce cas test, on regarde la capacité des deux schémas numériques à maintenir une solution stationnaire du modèle (35), où la gravité vaut $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ et le coefficient de friction est $\alpha = 10^4 \text{ s}^{-1}$. Une telle solution vérifie pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$

$$u(x) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x p(x) = \varrho(x)g.$$

Ici, on regarde une donnée sinusoidale en densité qui, après discrétisation, s'écrit pour $i = 1, \dots, 100$

$$\varrho_i^0 = 2 + \sin(20(i/100)), \quad u_i^0 = 0 \quad \text{et} \quad p_i^0 = p_{i-1}^0 + g \frac{\varrho_{i-1}^0 + \varrho_i^0}{2}, \quad (187)$$

où $(\varrho, u, p)_0^0 = (2, 0, 10000)$. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet, avec pour donnée à gauche $(\varrho, u, p)_l^n = (\varrho, u, p)_0^0$ et pour donnée à droite $(\varrho, u, p)_r^n = (\varrho, u, p)_{101}^0$ pour tout $n \geq 0$, où $(\varrho, u, p)_{101}^0$ est calculé à l'aide des relations (187). Le temps auquel sont représentées les figures est 0.5 s et il est suffisamment grand pour que les solutions représentées correspondent à des états

numériquement stationnaires, au sens où $\mathbf{U}_i^{n+1} \simeq \mathbf{U}_i^n$ pour tout i . Le sigle AP désigne le schéma *asymptotic preserving* et le sigle SP désigne le schéma basé sur le splitting d'opérateur. Sur les figures 1 et 3, on ne voit quasiment aucune

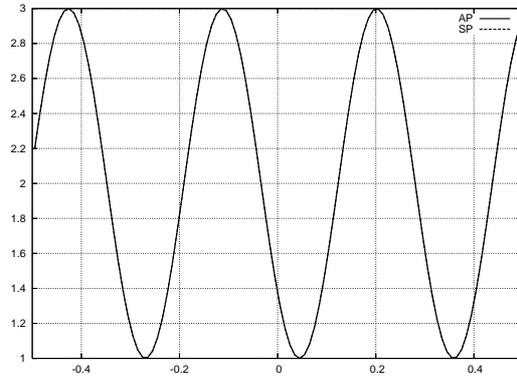


FIG. 1 – Maintien d'un état stationnaire de vitesse nulle : ρ

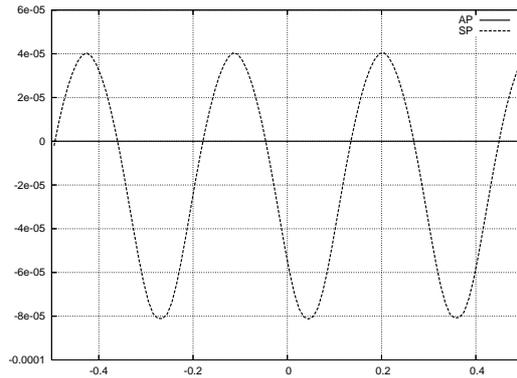


FIG. 2 – Maintien d'un état stationnaire de vitesse nulle : u

différence. Cependant, on peut remarquer sur la figure 2 que la vitesse de la solution donnée par la méthode de splitting n'est pas nulle et qu'elle suit les variations de la densité. Le schéma *asymptotic preserving*, quant à lui, préserve bien la donnée initiale, ce qui était attendu vu les formules le définissant.

8.2 Convergence vers un état stationnaire de vitesse nulle.

Ce cas test permet d'étudier la convergence en temps des schémas vers une solution stationnaire de vitesse nulle. La donnée initiale est composée de deux états constants :

$$(\rho, u, p)_i^0 = \begin{cases} (2, 0, 10000) & \text{si } 1 \leq i \leq 50, \\ (1, 0, 5000) & \text{si } 50 < i \leq 100. \end{cases} \quad (188)$$

Dans ce cas aussi, on prend $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ et $\alpha = 10^4 \text{ s}^{-1}$. Cette fois par contre, les conditions aux limites modélisent une paroi et sont approchées à l'aide de la

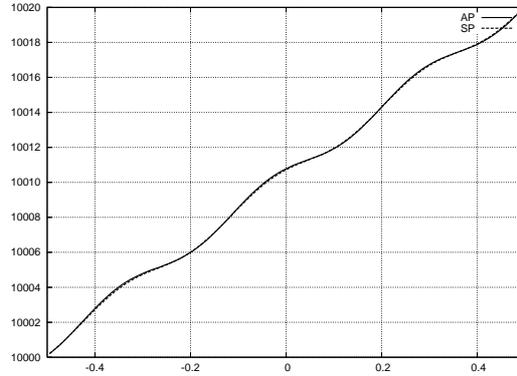


FIG. 3 – Maintien d'un état stationnaire de vitesse nulle : p

technique de l'état miroir. Le temps auquel les solutions sont représentées est 3 s. Une fois encore, le schéma *asymptotic preserving* converge bien vers un état

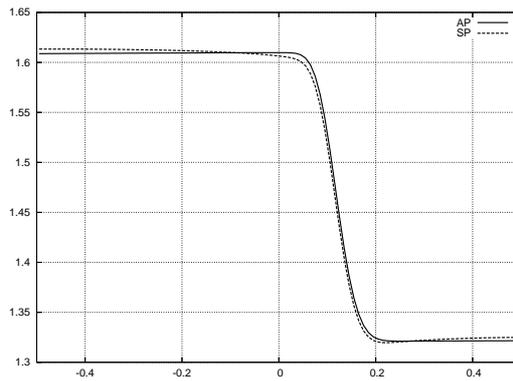


FIG. 4 – Convergence vers un état stationnaire de vitesse nulle : ρ

de vitesse nulle, contrairement à la méthode de splitting. De plus, on remarque que les profils de densité et de pression obtenus sont différents.

8.3 Convergence vers un état stationnaire de vitesse non nulle.

Ce cas test est plus difficile que les précédents. En effet, l'état à obtenir en temps long n'admet plus une vitesse nulle, c'est-à-dire qu'il ne se résume pas à l'équilibre hydrostatique classique (on a toujours $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ et $\alpha = 10^4 \text{ s}^{-1}$). Pour atteindre un tel état, on se donne la donnée au bord gauche $(\rho, u, p)_l = (5, 0.1, 10000)$. Pour calculer la donnée au bord droit, on résout l'algorithme

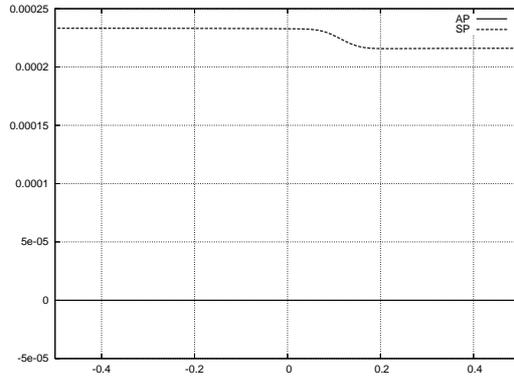


FIG. 5 – Convergence vers un état stationnaire de vitesse nulle : u

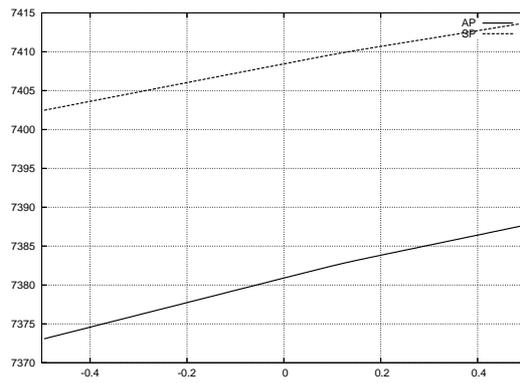


FIG. 6 – Convergence vers un état stationnaire de vitesse nulle : p

suivant :

$$\begin{aligned}
 & (\varrho, u, p)_0 = (\varrho, u, p)_l \\
 & \text{Pour } i = 1, \dots, 101 : \\
 & \left| \begin{aligned}
 & (\varrho u)_i = (\varrho u)_{i-1} \\
 & (\varrho u^2 + p)_i - (\varrho u^2 + p)_{i-1} = (\varrho_{i-1} + \varrho_i)g/2 + \alpha(\varrho u)_{i-1} \\
 & \ln(p_i/(\varrho_i)^\gamma) = \ln(p_{i-1}/(\varrho_{i-1})^\gamma)
 \end{aligned} \right. \quad (189)
 \end{aligned}$$

qui permet d'obtenir la donnée au bord droit $(\varrho, u, p)_r = (\varrho, u, p)_{101}$. La donnée initiale est uniforme et égale à $(\varrho, u, p)_l$. Les résultats sont tracés au temps 5 s.

On peut voir une nette différence entre les profils de densité sur la figure 7. La

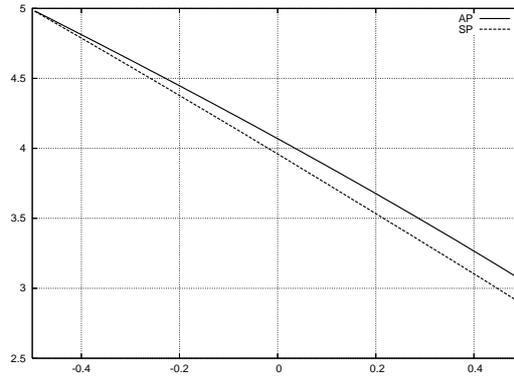


FIG. 7 – Convergence vers un état stationnaire de vitesse non nulle : ϱ

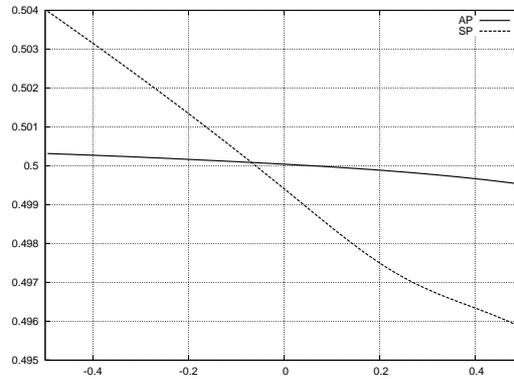


FIG. 8 – Convergence vers un état stationnaire de vitesse non nulle : ϱu

figure 8 représente le débit ϱu , qui devrait être constant. On voit nettement que de ce point de vue, les résultats fournis par le schéma *asymptotic preserving* sont meilleurs que la méthode de splitting.

8.4 Convergence vers une solution de type Darcy

Ce cas test permet de montrer que la diffusion numérique du schéma *asymptotic preserving* est indépendante de α , contrairement à la méthode de splitting.

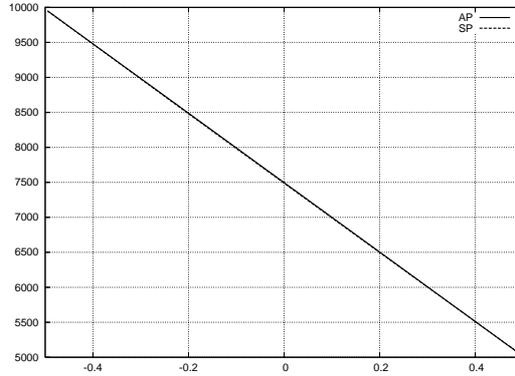


FIG. 9 – Convergence vers un état stationnaire de vitesse non nulle : p

La donnée initiale est composée d'un créneau avec $(\varrho, u, p) = (2, 0, 26390.2)$ pour $x \in [1/3, 2/3]$ et $(\varrho, u, p) = (1, 0, 10000)$ ailleurs (la pression du créneau est calculée pour obtenir une donnée initiale isentropique). Les conditions aux limites sont périodiques et le temps final pour chacun des cas est de 0.1 s.

Pour simplifier les résultats, la gravité est supposée nulle. Lorsque α est suffisamment grand, on s'attend à obtenir une solution vérifiant une loi de type Darcy (55). On a représenté la vitesse et la pression pour trois valeurs de α :

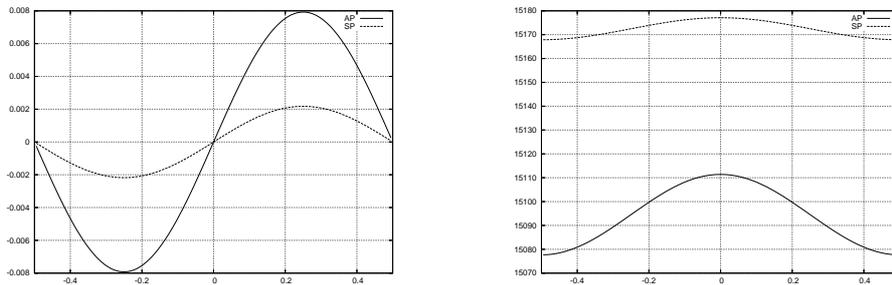


FIG. 10 – Convergence vers une solution de type Darcy ($\alpha = 10^4 \text{ s}^{-1}$) : u et p

10^4 , 10^6 et 10^8 s^{-1} . On voit que les deux schémas parviennent à restituer le comportement de type Darcy, c'est-à-dire que le signe de la vitesse est opposé à celui de la dérivée spatiale de la pression. Néanmoins, on remarque que plus α est grand, plus la diffusion numérique de la méthode de splitting est grande, alors que le schéma *asymptotic preserving* restitue des profils de plus en plus raides. Ces résultats sont bien en accord avec l'analyse précédente.

Références

- [BOP07] F. Bouchut, H. Ounaissa, and B. Perthame. Upwinding of the source term at interfaces for Euler equations with high friction. *Comput. Math. Appl.*, 53(3-4) :361–375, 2007.

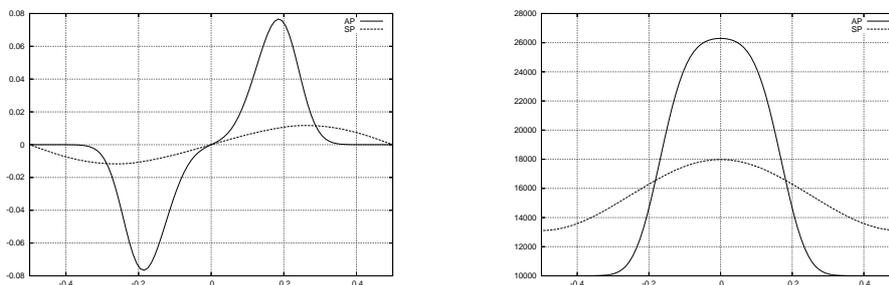


FIG. 11 – Convergence vers une solution de type Darcy ($\alpha = 10^6 \text{ s}^{-1}$) : u et p

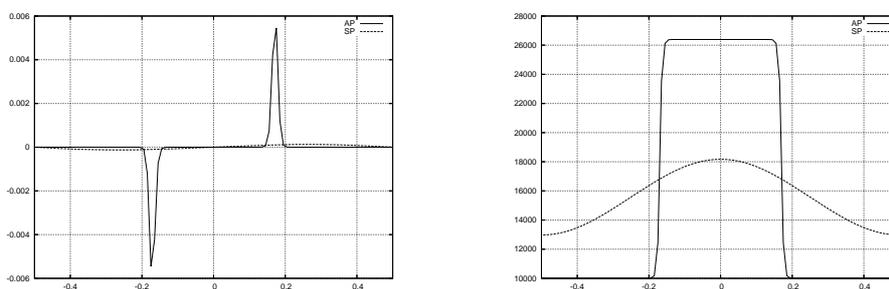


FIG. 12 – Convergence vers une solution de type Darcy ($\alpha = 10^8 \text{ s}^{-1}$) : u et p

- [Bou04] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
- [CL94] P. Cargo and A.-Y. LeRoux. Un schéma équilibre adapté au modèle d’atmosphère avec termes de gravité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(1) :73–76, 1994.
- [Ena07] C. Enaux. *Analyse mathématique et numérique d’un modèle multi-fluide multivitesse pour l’interpénétration de fluides miscibles*. PhD thesis, École Centrale Paris, 2007.
- [Gal02a] G. Gallice. Schémas équilibre et solveurs de riemann simples entropiques pour des systèmes hyperboliques avec terme source. application à la dynamique des gaz avec gravité. *Preprint MAB LRC 02-05*, 2002.
- [Gal02b] G. Gallice. Solveurs simples positifs et entropiques pour les systèmes hyperboliques avec terme source. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(8) :713–716, 2002.
- [Gal03] G. Gallice. Positive and entropy stable Godunov-type schemes for gas dynamics and MHD equations in Lagrangian or Eulerian coordinates. *Numer. Math.*, 94(4) :673–713, 2003.
- [God59] S. K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Mat. Sb. (N.S.)*, 47 (89) :271–306, 1959.
- [MM90] P. Marcati and A. Milani. The one-dimensional Darcy’s law as the limit of a compressible Euler flow. *J. Differential Equations*, 84(1) :129–147, 1990.

Annalisa AMBROSO, Benjamin BOUTIN, Christophe CHALONS, Thomas GALIÉ :
DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
annalisa.ambroso@cea.fr, benjamin.boutin@cea.fr, thomas.galie@cea.fr

Christophe CHALONS, Frédéric LAGOUTIÈRE :
Université Paris Diderot-Paris 7, UMR 7598, F-75005 Paris, France
chalons@math.jussieu.fr, lagoutie@math.jussieu.fr

Frédéric COQUEL, Edwige GODLEWSKI, Pierre-Arnaud RAVIART, Nicolas SEGUIN :
UPMC Univ Paris 06, UMR 7598, Laboratoire J.-L. Lions, F-75005, Paris, France
CNRS, UMR 7598, Laboratoire J.-L. Lions, F-75005, Paris, France
coquel@ann.jussieu.fr, godlewski@ann.jussieu.fr,
pa@raviart.com, seguin@ann.jussieu.fr