Travaux Pratiques Séance 2.
Méthode Semi-Lagrangienne pour l'équation Eikonale

D11-4 Approximation numérique pour la propagation de front.

H. Zidani - Ch. Chalons

23 janvier 2009

On s'intéresse à la propagation de front en 2d. On modélise à l'instant t la frontière Γ_t du front par l'ensemble des points $\{X = (x, y) \in \Omega \text{ t.q. } v(t, x, y) = 0\}$, v étant une fonction à déterminer. Le domaine $\{(x, y) \in \Omega,\ v(t, x, y) < 0\}$ correspond physiquement à la partie "brulée". La fonction $v = v(t, x, y)$ est solution de l'équation eikonale

$$
\begin{aligned}
&\partial_t v + F(x, y)\|\nabla v\| = 0, \qquad t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\
&v(0, x, y) = v_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

On désire résoudre cette équation pour $t \in [0, T]$ et $X = (x, y)$ dans le domaine $\Omega := (x_{min}, x_{max}) \times (y_{min}, y_{max})$.

D'abord considérons un maillage régulier $\mathcal{G}_h$ dont les noeuds sont définis par

$$(x_i, y_j) = (x_{min} + (i-1)h_x, y_{min} + (j-1)h_y) \quad \text{pour } i = 1, \cdots, N_x \text{ et } j = 1, \cdots, N_y$$

avec

$$h_x = (x_{max} - x_{min})/(N_x - 1) \quad \text{et } h_y = (y_{max} - y_{min})/(N_y - 1).$$

La méthode Semi-Lagrangienne (SL) est basée sur le principe de programmation dynamique (PPD) satisfait par la fonction exacte v. De manière générale, pour une équation eikonale de la forme

$$
\begin{aligned}
&\partial_t v + \max_{\alpha \in [0, 2\pi]} f(\alpha, X) \cdot \nabla v = 0, \quad t > 0, \\
&v(0, x, y) = v_0(x, y),
\end{aligned}
$$

le PPD s'écrit

$$v(t, X) = \min_{\alpha(s) \in [0, 2\pi]} v(t - \Delta t, Y_{\alpha, X}(t - \Delta t)) \tag{1}$$

où $Y = Y_{\alpha, X}(s)$ est la solution de

$$
\begin{cases}
\dot{Y}(s) = f(\alpha(s), Y(s)), \quad s \in (0, t) \\
Y(t) = X
\end{cases} \tag{2}
$$

On écrit en première approximation $Y(t-\Delta t) \simeq X - f(\alpha,X)\Delta t$, et donc pour Δt assez petit, il vient

$$v(t,X) = \min_{\alpha\in[0,2\pi]} v(t-\Delta t, X - f(\alpha,X)\Delta t). \tag{3}$$

Pour discrétiser l'équation (3) sur le maillage $\mathcal{G}_h$, on procède alors comme suit:

Schema SL pour le calcul de V_{ij}^{k+1} en fonction de $V_{i,j}^{k}$:

Pour chaque point $X=(x_i,y_j)$ du maillage, pour chaque "contrôle" $\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2,\dots)$,

1. Si $\bar{X} = X - f(\alpha)\Delta t \notin \Omega$ alors prendre $V_{ij}^{k+1}(\alpha) = V_{bord}$[1] et passer au controle suivant.
2. Sinon déterminer la maille $[x_m,x_{m+1}[\times[y_\ell,y_{\ell+1}[$ contenant $\bar{X}$;
3. Déterminer des coefficients $(\lambda_i)_{i=1}^4$ t.q. $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ et:

$$\bar{X} = \lambda_1 X_{m,\ell} + \lambda_2 X_{m+1,\ell} + \lambda_3 X_{m,\ell+1} + \lambda_4 X_{m+1,\ell+1}. \tag{4}$$

4. Calculer

$$V_{i,j}^{k+1}(\alpha) := \lambda_1 V_{m,\ell}^k + \lambda_2 V_{m+1,\ell}^k + \lambda_3 V_{m,\ell+1}^k + \lambda_4 V_{m+1,\ell+1}^k \tag{5}$$

Enfin prendre

$$V_{i,j}^{k+1} := \min_\alpha V_{i,j}^{k+1}(\alpha).$$

Mise en oeuvre et tests:

Partie I. On prendra dans la suite $F(x,y) \equiv 1$.

1. On considère un point $\bar{X}$ dans Ω, de coordonnées $(\bar{x},\bar{y})$.

a) Montrer qu'il existe $(p,q) \in [0,1[^2$ et $(m,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\begin{cases} \bar{x} = (1-p)x_m + p x_{m+1} \\ \bar{y} = (1-q)y_\ell + q y_{\ell+1} \end{cases}$.

b) En déduire une combinaison barycentrique de la forme (4) où l'on explitera les coefficients $(\lambda_i)_{i=1,\dots,4}$ en fonction de p et q.

c) Programmer la méthode SL en utilisant cette combinaison barycentrique. (On partira du programme `tp2.m` et du répertoire `Donnees1`, à compléter.)

d) Donner un argument simple justifiant le choix $\lambda_i \geq 0$ dans la combinaison barycentrique.

2. a) Tester avec $v_0(X) = \min(1, ||X|| - 1)$ sur $\Omega = [-2,2]^2$, et avec $V_{bord} = 1$.

b) Quelle propagation de front modélise t-on dans ce cas ?

[1] V_{bord} est une valeur qu'on se donnera sur le bord et à l'extérieur du domaine Ω

c) Programmer la solution exacte (donnée ici par $v(t,X) = \min(1, \max(-1, ||X|| - t - 1)))$; comparer les fronts exact et approché.

3. On définit ici le nombre CFL par $\nu = \frac{\Delta t}{h_x} + \frac{\Delta t}{h_y}$ (où h_x et h_y sont les pas en x et en y resp.). Vérifier que le schéma est numériquement stable même lorsque $\nu >> 1$. Comparer les résultats du schéma SL lorsque $\nu \simeq 1$ et $\nu \simeq 10$. On pourra par exemple calculer dans les 2 cas l'erreur L^1 à l'instant t_k définie par

$$e_k := h_x h_y \sum_{i,j} |V^k_{i,j} - v(t_k, x_i, y_j)|.$$

Partie II.
Afin de tester la rencontre de 2 fronts, on considère

$$v_0(X) = \min(1, ||X - A|| - 0.5, ||X - B|| - 0.5)$$

sur $\Omega = [-2, 2]^2$ et avec $V_{bord} = 1$, où $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 0)$. Quel propagation de front modélise t-on ici ? Lors de la rencontre des fronts, la partie brulée $\{(x, y),\ v < 0\}$ est elle bien modélisée ?[2]

Partie III.
Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on modifie la dynamique f par $f(\alpha, X) := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.
a) Tester la méthode SL avec $v_0(X) = \min(1, ||X - A|| - 0.5)$ où A est le point de coordonnées $(1, 0)$, et pour un temps final $T = 2\pi$, puis $T = 4\pi$.

Ici, la solution de $\dot{X} = f(\alpha, X)$ est $X(s) = R_{s-t}X(t)$ où R_t est la rotation d'angle t autour de l'origine.[3] La solution exacte est alors donnée par $v(t, X) = v_0(R_{-t}X)$.
b) Sur cet exemple, étudier d'une part la qualité d'approximation du front (par une observation graphique), et aussi l'erreur en norme L^1.
c) Programmer un schéma similaire (noté par exemple `SL-RK2`) mais dans lequel l'approximation de la dynamique (2) est calculée par une méthode de Heun (une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2):

$$Y(t - \Delta t) \simeq X - \frac{\Delta t}{2}(f(\alpha, X) + f(\alpha, X - \Delta t f(\alpha, X)).$$

On doit observer une nette amélioration de la localisation du front.

[2] Solution exacte:

$$v(t, X) = \min(1, \max(||X - A|| - 0.5 - t,\ ||X - B|| - 0.5 - t,\ -0.5)).$$

[3] $R_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

Éléments de solution.
I.1: $\lambda_1 = (1-p)(1-q)$, $\lambda_2 = p(1-q)$, $\lambda_3 = (1-p)q$, $\lambda_4 = pq$.