UVSQ
MSMA850 **2014-2015**

Partiel du 2 avril 2015

Aucun document n'est autorisé.

Partie I - Étude théorique

Soit $f \in L^2(]0,1[)$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) - (1+x)u'(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

dont la formulation faible consiste à chercher $u \in H_0^1(]0,1[)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1, \qquad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^1 (1+x)u'(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx. \tag{2}$$

1. La forme bilinéaire de la formulation variationnelle (2) est-elle symétrique ? (Justifier votre réponse.)
2. En utilisant l'identité $(u^2)'(x) = 2\,u(x)u'(x)$ et à l'aide d'une intégration par partie, vérifier que cette forme bilinéaire est coercive dans H_0^1. On précisera bien la norme utilisée.
3. En déduire l'existence et l'unicité d'une fonction $u \in H_0^1$ vérifiant (2).

Partie II - Discrétisation par éléments finis $P1$

Soient $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$ pour $i = 0, ..., N+1$ et $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, ..., N$. Soit $H_N = \{v \in C([0,1], \mathbb{R}),\ v_{|K_i} \in P_1,\ i = 0, ..., N \text{ et } v(0) = v(1) = 0\}$, où P_1 désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

1. Expliquez en quelques mots pourquoi $H_N \subset H_0^1$.
2. Pour $i = 1, ..., N$ on pose

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{si } x \in K_{i-1}, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{si } x \in K_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que les $\phi_i \in H_N$ pour $i = 1, ..., N$ et qu'ils forment une base de H_N.
3. Rappeler la définition de la matrice A et du second membre B du système linéaire obtenu en remplaçant H_0^1 par H_N dans la formulation faible (2).
4. Pourquoi ce système linéaire admet-il une unique solution ?
5. En utilisant la base définie dans la question 2, calculer explicitement les termes diagonaux de la matrice A ainsi que les coefficients du vecteur colonne B dans le cas $f(x) = x$.

Correction du partiel du 2 avril 2015

Partie I : étude théorique

1) $\mathcal{A}(u,v) = \int_0^1 u'v' - \int_0^1 (1+x)u'v \quad \forall u,v$

Il est clair qu'on n'a pas $\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{A}(v,u) \ \forall u,v$ de sorte que la forme bilinéaire n'est pas symétrique (c'est le terme $\int_0^1 (1+x)u'v$ qui pose problème ici)

2) $\mathcal{A}(u,u) = \int_0^1 (u')^2 - \int_0^1 (1+x)u u' \quad \forall u \in H_0^1$

$\mathcal{A}(u,u) = \int_0^1 (u')^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x)(u^2)' \quad \forall u \in H_0^1$

En faisant une intégration par partie sur la deuxième intégrale on obtient $\mathcal{A}(u,u) = \int_0^1 (u')^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 + [(1+x)u^2]_0^1 \quad \forall u \in H_0^1$

Comme $u(1) = u(0) = 0 \ \forall u \in H_0^1$, on obtient donc

$$\mathcal{A}(u,u) = \int_0^1 (u')^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (u')^2 + \int_0^1 u^2\right) = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H_0^1.$$

La constante de coercivité est donc $1/2$ ici.

La norme invoquée ici est la norme usuelle sur H^1. Sur H_0^1, d'après l'inégalité de Poincaré, on peut aussi utiliser la semi-norme $|u|_{H_0^1} := \sqrt{\int_0^1 (u')^2}$. Si on privilégie cette norme, alors on peut écrire

$$\mathcal{A}(u,u) = \int_0^1 (u')^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \geqslant \int_0^1 (u')^2 = |u|_{H_0^1}^2.$$

La constante de coercivité est donc 1 ici.

3) On applique le théorème de Lax-Milgram, en vérifiant tout d'abord les hypothèses nécessaires, au problème

Trouver $u \in V = H_0^1$ t.q $\mathcal{A}(u,v) = L(v) \ \forall v \in H_0^1$

avec $L(v) = \int_0^1 fv$. Considérons (par exemple) la norme usuelle sur H^1.

On sait déjà que H_0^1 est un espace de Hilbert et que $\mathcal{A}$ est coercive. Il reste à vérifier que $\mathcal{A}$ est continue, tout comme L (il est clair que $\mathcal{A}$ est bilinéaire et que L est linéaire, ces points constituant aussi des hypothèses nécessaires à l'application du théorème). On a

- $$|L(v)| = \left|\int_0^1 fv\right| \le \int_0^1 |f||v| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Inégalité de Cauchy-Schwartz}}}{\le} \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \quad \forall v \in H_0^1.$$

donc L est continue

- $$|\mathcal{A}(u,v)| \le \int_0^1 |u'||v'| + \int_0^1 (1+x)|u'||v|$$

Comme $0 \le 1+x \le 2$ $\forall x \in [0,1]$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\mathcal{A}(u,v)| \le \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + 2\|u'\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le 3\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

$\mathcal{A}$ est donc continue.

Partie II : discrétisation par éléments finis P_1

1) Les fonctions de H_N sont continues sur $[0,1]$. Elles sont donc clairement dans $L^2(0,1)$.

Les fonctions de H_N sont continues sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (car polynomiales de degré 1 sur chaque K_i) donc leurs dérivées au sens des distributions coïncident avec leurs dérivées classiques sur chaque K_i. Ces dérivées étant continues sur chaque K_i, elles sont clairement dans $L^2(0,1)$.

On a donc $H_N \subset H^1$. Comme les fonctions de H_N vérifient aussi $v(0) = v(1) = 0$, on a finalement $H_N \subset H_0^1$.

2) Les fonctions ϕ_i sont clairement nulles au bord (en $x=0$ et $x=1$) et polynômiales de degré 1 sur chaque K_i donc les ϕ_i sont dans H_N (les ϕ_i sont aussi clairement continues puisque $\lim\limits_{x\to x_i^-} \phi_i(x) = \frac{x_i - x_{i-1}}{h} = 1 = \frac{x_{i+1}-x_i}{h} = \lim\limits_{x\to x_i^+} \phi_i(x)$).

Concernant le fait que les ϕ_i forment une base de H_N, vérifions que la famille est libre et génératrice.

$\rightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i = 0 \quad \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i(x_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$

$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$ $\quad$ (car $\phi_i(x_j) = 1$ si $j = i$, $= 0$ sinon)

la famille est donc libre.

$\rightarrow$ $\forall v \in H_N$. On pose $\tilde{v}(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} v(x_i)\, \phi_i$

La fonction $\tilde{v}$ est continue sur $[0,1]$, P_1 sur chaque K_i, et nulle en $x=0$ et $x=1$. Elle coïncide avec v en chacun des points x_j. Elle coïncide donc avec v partout (car sur chaque K_i, v et $\tilde{v}$ sont dans P_1 et prennent les mêmes valeurs en x_i et x_{i+1}, donc elles coïncident sur K_i tout entier).

On a donc $v = \tilde{v}$ de sorte que la famille est génératrice.

3) D'après le cours on a $AU = B$ avec

$$A_{ij} = \mathcal{A}(\phi_j, \phi_i) \quad \forall i,j = 1, \dots, N$$

$$B_i = L(\phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

et U_i est la ième coordonnée de la solution approchée recherchée dans la base $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$.

4) H_N est de dimension finie et $H_N \subset H_0^1$, avec H_0^1 un espace de Hilbert. Donc H_N est un fermé dans un Hilbert, H_N est donc aussi un espace de Hilbert. Le théorème de Lax-Milgram s'applique donc aussi à la formulation faible (2)

obtenue en remplaçant H_0^1 par H_N, ce qui implique l'existence et l'unicité d'une solution ds H_N. Comme ce pb est équivalent à la résolution du système linéaire $AU=B$ d'après le cours, ce système linéaire admet une unique solution.

5) On a

$$A_{ii} = \int_0^1 \phi_i'^2 - \int_0^1 (1+x)\phi_i'\phi_i = \int_0^1 \phi_i'^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x)(\phi_i^2)'$$

Comme $\phi_i(x)=0$ si $x \notin K_{i-1} \cup K_i$, on a

$$\int_0^1 \phi_i'^2 = \int_{K_{i-1}} \phi_i'^2 + \int_{K_i} \phi_i'^2 = \int_{K_{i-1}} \left(\frac{1}{h}\right)^2 + \int_{K_i} \left(\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{h}{h^2} + \frac{h}{h^2} = \frac{2}{h}$$

Par ailleurs, en faisant une intégration par partie

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 (1+x)(\phi_i^2)' = -\frac{1}{2}\left(-\int_0^1 \phi_i^2\,dx + \underbrace{[(1+x)\phi_i^2]_0^1}_{=0 \text{ car } \phi_i(1)=\phi_i(0)=0}\right)$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})^2\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)^2\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left(\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{3}\right) = \frac{h}{3}$$

On a donc finalement $A_{ii} = \frac{2}{h} + \frac{h}{3}$.

Par ailleurs, si $f(x) = x$,

$$B_i = \int_0^1 x\phi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} x(x-x_{i-1})\,dx + \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x(x_{i+1}-x)\,dx$$

Par intégration par partie,

$$B_i = \frac{1}{h}\left\{\begin{array}{l} -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_{i-1})^2}{2} + \left[\frac{x(x-x_{i-1})^2}{2}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2} + \left[-x\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \end{array}\right\} = \frac{1}{h}\left\{-\frac{h^3}{6} + \frac{h^3}{6} + x_i\frac{h^2}{2} + x_i\frac{h^2}{2}\right\}$$

On a donc finalement $B_i = x_i h$.