UVSQ
2020-2021

Méthodes numériques et programmation avancé
Corrigé succinct de l'examen du 26 mars 2021

Exercice 1.
On considère l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} \partial_t u + c(x,t)\partial_x u + a(x,t)u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où a et c sont deux fonctions régulières et bornées, et u_0 une fonction régulière.
1) Résoudre l'équation lorsque c est la fonction nulle. On remarquera qu'il s'agit alors d'une équation différentielle ordinaire.
2) A l'aide de la méthode des caractéristiques et en utilisant la question précédente, résoudre l'équation en fonction de u_0, a et des courbes caractéristiques.

Corrigé.
1) Lorsque $c = 0$ il s'agit de résoudre pour tout x fixé une l'équation différentielle ordinaire en t

$$\begin{cases} \partial_t u = -a(x,t)u, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dont la solution est donnée par

$$u(x,t) = u_0(x) \exp\left(-\int_0^t a(x,s)ds\right).$$

2) On définit les caractéristiques

$$\begin{cases} X'(s) = c(X(s), s) \\ X(t) = x. \end{cases}$$

Le long des caractéristiques, la solution du problème vérifie

$$\frac{d}{ds}u(X(s),s) = -a(X(s),s)u(X(s),s)$$

dont la solution est donnée par

$$u(X(s),s) = u(X(0),0)\exp\,(-\int_0^s a(X(\alpha),\alpha)d\alpha),$$

ou encore en prenant $s = t$,

$$u(x,t) = u_0(X(0))\exp\,(-\int_0^t a(X(s),s)ds).$$

Exercice 2.
On considère l'équation de transport

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

avec une donnée initiale $u(x,0) = u_0(x)$ supposée de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et à support compact, et son approximation par différences finies

$$\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^n}{\Delta t} + (c - \frac{\Delta x}{\Delta t})\frac{u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{\Delta x} = 0$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq N$, $N\Delta t = T$, T étant un instant final. On pose $u_j^0 = u_0(x_j)$, $x_j = (j-1/2)\Delta x$ pour tout j.
1) Montrer que sous une condition CFL bien choisie, on a le résultat de stabilité L^∞

$$\forall\, n = 1, ..., N, \qquad \|u^n\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$$

où on note $\|u\|_\infty = \max_j |u_j|$.
2) Dans quels cas le schéma est-il exact ? Expliquer.
3) Définir et étudier l'erreur de consistance de ce schéma. En déduire l'ordre en temps et en espace. On pourra se placer sous la condition CFL obtenue à la question 1.
4) Définir et étudier l'erreur du schéma en norme L^∞. En déduire sa convergence.

Corrigé.

1) On procède exactement comme cela a été fait en cours. La définition du schéma s'écrit aussi

$$u_j^{n+1} = (c\frac{\Delta t}{\Delta x} - 1)u_{j-2}^n + (1 - (c\frac{\Delta t}{\Delta x} - 1))u_{j-1}^n.$$

Sous les conditions CFL

$$0 \leq c\frac{\Delta t}{\Delta x} - 1 \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq 1 - (c\frac{\Delta t}{\Delta x} - 1) \leq 1$$

c'est-à-dire

$$1 \leq c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2$$

on a une décomposition convexe de sorte que

$$|u_j^{n+1}| \leq ||u^n||_\infty.$$

Cette inégalité étant valable pour tout j, on en déduit que

$$||u^{n+1}||_\infty \leq ||u^n||_\infty$$

puis par récurrence

$$||u^n||_\infty \leq ||u_0||_\infty.$$

2) Le schéma est exact lorsque $c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$ et lorsque $c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 2$, puisque dans ces cas le schéma donne respectivement $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$ et $u_j^{n+1} = u_{j-2}^n$, ce qui correspond bien au transport à la vitesse c de l'information pendant un temps Δt puisque la distance parcourue est alors respectivement de Δx et $2\Delta x$.
3) L'erreur de consistance du schéma est définie par

$$\epsilon_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta t} + (c - \frac{\Delta x}{\Delta t})\frac{u(x_{j-1}, t^n) - u(x_{j-2}, t^n)}{\Delta x}.$$

En utilisant des développements de Taylor et en suivant exactement la même méthode que celle faite en cours, on montre facilement que

$$\epsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2}\partial_t^2 u(x_j, \tau^n) - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\partial_x^2 u(\xi_j, t^n) + (c\Delta x - \frac{\Delta x^2}{\Delta t})\big(\frac{1}{2}\partial_x^2 u(\xi_j, t^n) - 2\partial_x^2 u(\eta_j, t^n)\big)$$

pour des τ^n, ξ_j et η_j. Sous la condition CFL, les termes en $\Delta x^2/\Delta t$ peuvent être majorés par $c\Delta x$ de sorte qu'il existe une constante C qui ne dépend que des dérivées secondes de u telle que pour tout n et pour tout j

$$|\epsilon_j^n| \leq C(\Delta t + \Delta x).$$

Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.
4) L'erreur du schéma est définie par

$$e_j^n = u_j^n - u(x_j, t^n),$$

de sorte que les définitions du schéma et de l'erreur de consistance donnent

$$e_j^{n+1} = (c\frac{\Delta t}{\Delta x} - 1)e_{j-2}^n + (1 - (c\frac{\Delta t}{\Delta x} - 1))e_{j-1}^n - \Delta t \epsilon_j^n.$$

Sous la condition CFL on en déduit que

$$|e_j^{n+1}| \leq ||e^n|| + C\Delta t(\Delta t + \Delta x).$$

Cette inégalité étant valable pour tout j, on en déduit que

$$||e^{n+1}||_\infty \leq ||e^n|| + C\Delta t(\Delta t + \Delta x),$$

puis par récurrence

$$||e^n||_\infty \leq ||e^0|| + Cn\Delta t(\Delta t + \Delta x),$$

ou encore, puisque par définition $e_j^0 = 0$ pour tout j,

$$||e^n||_\infty \leq CT(\Delta t + \Delta x),$$

où T représente le temps final. On en déduit donc que l'erreur tend vers 0 avec Δt et Δx, c'est-à-dire la convergence du schéma.

Exercice 3.
On considère l'équation de la chaleur $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ posée sur $[-1, 1] \times [0, T]$ avec la condition initiale $u(x, 0) = \sin(\pi x/2)$ et les conditions aux limites $u(-1, t) = -\exp(-\pi^2 t/4)$ et $\partial_x u(1, t) = 0$. Déterminer la solution de ce problème en la cherchant sous la forme d'une fonction à variables séparées $u(x, t) = v(x)w(t)$.

Corrigé.
Comme $u(x, t) = v(x)w(t)$, l'équation $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ s'écrit aussi

$$v(x)w'(t) - v''(x)w(t) = 0,$$

ou encore

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Autrement dit, le membre de gauche est une constante en t et le membre de droite est une constante en x, c'est-à-dire qu'il existe λ tel que $w'(t) = \lambda w(t)$ et $v''(x) = \lambda v(x)$, de sorte que

$$w(t) = w(0) \exp(\lambda t)$$

Les conditions initiales et aux limites donnent par ailleurs

$$\begin{cases} v(x)w(0) = \sin(\pi x/2) \\ v(-1)w(t) = -\exp(-\pi^2 t/4) \\ v'(1)w(t) = 0. \end{cases}$$

En dérivant deux fois en x la première relation et en utilisant $v''(x) = \lambda v(x)$, on obtient

$$v''(x)w(0) = -\frac{\pi^2}{4} \sin(\pi x/2) = \lambda v(x)$$

et donc

$$v(x) = -\frac{\pi^2}{4\lambda} \sin(\pi x/2).$$

La deuxième relation donne alors

$$-\frac{\pi^2}{4\lambda} \sin(-\pi/2) w(t) = -\exp(-\pi^2 t/4)$$

et donc

$$w(t) = -\frac{4\lambda}{\pi^2} \exp(-\pi^2 t/4),$$

mais également

$$v(-1)w(0) = -1 = -\frac{4\lambda}{\pi^2}$$

de sorte que

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4}.$$

Finalement, la solution est donc donnée par

$$u(x,t) = \sin(\pi x/2) \exp(-\pi^2 t/4).$$