Université Paris-Saclay et Institut Polytechnique de Paris
M2 Analyse, Modélisation et Simulation
Année 2020-2021

Corrigé succinct de l'examen du cours sur les systèmes hyperboliques

Jeudi 11 février 2021

Exercice 1
On considère l'équation scalaire

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x q(u) = 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

avec $q(u) = u - u^2/2$.
1) Déterminer l'unique solution faible entropique pour les données initiales suivantes :

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$g_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$g_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

2) On suppose dans cette question que l'on cherche à approcher numériquement les solutions dont les valeurs sont toutes comprises dans l'intervalle $]-\infty, 1]$. Que peut-on dire de la valeur de la dérivée du flux. En déduire l'écriture de la méthode de Godunov exacte dans ce cas (on explicitera la fonction flux numérique correspondante et le raisonnement).
3) Même question si la solution prend ses valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

Exercice 1, corrigé succinct
1) La fonction flux est concave donc la solution entropique est un choc lorsque l'état gauche de la donnée initiale est plus petit que l'état droit, et

une onde de détente sinon. Lorsqu'il s'agit d'un choc, la vitesse de propagation est donnée par la relation de Rankine-Hugoniot qui donne ici

$$\sigma = \frac{q(1) - q(0)}{1 - 0} = 1/2.$$

Lorsqu'il s'agit d'une détente, il s'agit d'inverser la dérivée du flux. Ici on a

$$q'(u) = (q')^{-1}(u) = 1 - u.$$

Et le transport se fait à la vitesse $q'(u)$. On vérifie alors facilement que les solutions sont données par

$$u_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \frac{x}{t} & \text{si} \quad 0 < \frac{x}{t} < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{x-1}{t} < 0 \\ 1 - \frac{x-1}{t} & \text{si} \quad 0 < \frac{x-1}{t} < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \frac{x-1}{t} > 1 \end{cases}$$

$$u_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{x}{t} < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{x}{t} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{x-1}{t} < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{x-1}{t} > \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) La dérivée du flux étant positive, toutes les ondes se déplacent avec une vitesse positive. Avec des notations claires, le flux numérique est donc donné par $f(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_j^n)$.
3) La dérivée du flux étant négative, toutes les ondes se déplacent avec une vitesse négative. Avec des notations claires, le flux numérique est donc donné par $f(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_{j+1}^n)$.

Exercice 2
On considère le système suivant provenant de la modélisation d'un mélange homogène et isentrope de deux fluides compressibles :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho c) + \partial_x(\rho c u) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $\mathbf{u}(x,t) = (\rho, \rho u, \rho c)(x,t)$ est le vecteur des inconnues avec $\rho(x,t) > 0$ la densité, $u(x,t) \in \mathbb{R}$ la vitesse du mélange, $0 \leq c(x,t) \leq 1$ la concentration massique du premier fluide, et $p = p(\rho, c) > 0$ la pression qui est une fonction de ρ et de c. On supposera que les conditions

$$\partial_\rho p(\rho, c) = a^2 > 0 \quad \text{et} \quad 2\partial_\rho p(\rho, c) + \rho(\rho, c)\partial^2_{\rho,\rho} p(\rho, c) > 0$$

sont satisfaites et où $a = a(\rho, c) > 0$ désigne la vitesse du son du mélange. Dans la suite et en cas de difficulté à traiter le cas général, on pourra considérer la fonction

$$p(\rho, c) = (\rho c)^2 + (\rho(1-c))^2.$$

1) Montrer que le système est strictement hyperbolique avec des valeurs propres données par $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = u$ et $\lambda_3 = u + a$. On pourra pour cela considérer le changement de variable $\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho c) \to \mathbf{v} = (\rho, u, c)$ et déterminer la matrice du système dans le jeu de variables (ρ, u, c).
2) Déterminer la nature des champs caractéristiques associés aux valeurs propres du système.
3) a) Donner deux invariants de Riemann associés à la valeur propre intermédiaire.
b) Vérifier que c et $u \pm F(\rho, c)$ sont des invariants de Riemann associés aux valeurs propres extrêmes (bien préciser quels sont les invariants pour chaque valeur propre) avec $F(\rho, c)$ une primitive par rapport à ρ (à c constant) de a/ρ.
4) Quelle est la forme générale de la solution du problème de Riemann (structure, type d'ondes possibles... mais sans la calculer explicitement !) associée à (2) avec la donnée initiale

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbf{u}_R & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

où $\mathbf{u}_L$ et $\mathbf{u}_R$ sont deux états constants.
5) Soit une onde de détente associée à la première valeur propre entre un état gauche $\mathbf{u}_L$ et un état droit $\mathbf{u}^*$. Exprimer $\mathbf{u}^*$ en fonction de $\mathbf{u}_L$ en utilisant le jeu de variables ρ, u, c.
6) Soit une onde associée à la deuxième valeur propre entre un état gauche $\mathbf{u}^*$ et un état droit $\mathbf{u}_R$. Exprimer la vitesse et la pression de l'état $\mathbf{u}_R$ en fonction de la vitesse et la pression de l'état $\mathbf{u}^*$ et donner la vitesse de propagation de cette onde.
7) En supposant que les états gauche $\mathbf{u}_L$ et droit $\mathbf{u}_R$ soient tels que la solution du problème de Riemann associé consiste en une 1-onde de détente suivie d'une 2-onde, quelle est l'équation non linéaire qui permet de déterminer l'état intermédiaire correspondant (on ne demande pas de la résoudre) ?

8) Proposer un schéma numérique pour approcher numériquement les solutions du système. On donnera la formule de mise à jour et on précisera comment peut être calculé le pas de temps.

Exercice 2, corrigé succinct

1) Dans le jeu de variable (ρ, u, c), la matrice jacobienne de ce système est donnée par

$$A(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho}\partial_\rho p & u & \frac{1}{\rho}\partial_c p \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = u - a < \lambda_2 = u < \lambda_3 = u + a$ avec par hypothèse $a > 0$. Le système est donc strictement hyperbolique.

2) Des calculs simples montrent que les vecteurs propres sont donnés par

$$r_1 = \begin{pmatrix} -\rho \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \partial_c p \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} \rho \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

et que

$$\nabla\lambda_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a}\partial^2_{\rho,\rho}p \\ 1 \\ -\frac{1}{2a}\partial^2_{\rho,c}p \end{pmatrix}, \quad \nabla\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla\lambda_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a}\partial^2_{\rho,\rho}p \\ 1 \\ \frac{1}{2a}\partial^2_{\rho,c}p \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\nabla\lambda_1.r_1 = -\frac{\rho}{2a}\partial^2_{\rho,\rho}p + a = -\frac{1}{2a}\Big(\rho\partial^2_{\rho,\rho}p + 2\partial_\rho p\Big) < 0,$$

$$\nabla\lambda_2.r_2 = 0,$$

$$\nabla\lambda_3.r_3 = \frac{\rho}{2a}\partial^2_{\rho,\rho}p + a = \frac{1}{2a}\Big(\rho\partial^2_{\rho,\rho}p + 2\partial_\rho p\Big) > 0,$$

Les champs caractéristiques extrêmes sont donc vraiment non linéaires tandis que le deuxième est linéairement dégénéré.

3) a) La relation définissant les invariants de Riemann I est

$$\nabla I.r_2 = 0$$

c'est-à-dire

$$\partial_\rho I\ \partial_c p - \partial_c I\ \partial_\rho p = 0.$$

On en déduit donc que u et p sont deux invariants de Riemann associées à la valeur propre λ_2.

b) On vérifie que c et $u - \epsilon F(\rho, c)$ sont des invariants associés à la valeur propre $u + \epsilon a$ avec $\epsilon = \pm 1$ car

$$\nabla c.r_1 = \nabla c.r_3 = 0$$

et

$$\nabla (u - \epsilon F(\rho, c)).r_{2+\epsilon} = -\epsilon^2 \rho \times \frac{a}{\rho} + a = 0$$

4) La solution du problème de Riemann est composée de trois ondes simples de type onde de détente ou choc pour la première et la dernière, et de type discontinuité de contact pour la deuxième. Il y a deux états intermédiaires.
5) Les états (ρ, u, c) que l'on peut connecter à droite de $\mathbf{u}_L$ par une 1-onde de détente sont tels que les invariants associés sont constants et la première valeur propre croissante, ce qui donne

$$c^* = c_L, \quad u^* + F(\rho^*, c_L) = u_L + F(\rho_L, c_L) \quad \text{et} \quad u_L - a_L \leq u^* - a^* = u^* - a(\rho^*, c_L).$$

6) On a

$$u^* = u_R \quad \text{et} \quad p(\rho^*, c^*) = p_R.$$

La vitesse de propagation de cette onde est u_R.
7) D'après les deux questions précédentes, si la solution du problème de Riemann consiste en une 1-onde de détente suivie d'une 2-discontinuité de contact, alors l'état intermédiaire est entièrement défini par léquation

$$u_R + F(\rho^*, c_L) = u_L + F(\rho_L, c_L).$$

8) Avec des notations claires, on écrit le système sous la forme condensée

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0.$$

Un schéma de type HLL s'écrit, avec des notations habituelles,

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{j-1}^n, \mathbf{u}_j^n))$$

où le flux numérique s'écrit

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)) - \frac{b}{2}(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L).$$

La condition CFL s'écrit

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2b}.$$

et b peut être choisi de la manière suivante

$$b = \max_j (|u_j| + a_j).$$