UVSQ
2019-2020

Méthodes numériques et programmation avancée
Corrigé succinct de l'examen du 11 mai 2020

Exercice 1.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On considère le problème de convection diffusion scalaire

$$\begin{cases} -\Delta u + V \cdot \nabla u = f, \quad \forall\, x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\partial\Omega$ est le bord de Ω, $\cdot$ représente le produit scalaire, V est une fonction vectorielle donnée et dont la divergence est nulle sur Ω, et f est une fonction de $L^2(\Omega)$.
1) Donner la formulation variationnelle associée à ce problème. On notera $a(.,.)$ et $l(.)$ les applications bilinéaires et linéaires associées et H l'espace variationnel.
2) Dans cette question on va montrer que l'application bilinéaire $a(.,.)$ est coercive sur H.
a) Montrer que

$$\int_\Omega (V \cdot \nabla u) u dx = \int_\Omega \operatorname{div}(uV) u dx.$$

b) En utilisant une intégration par partie, montrer que

$$\int_\Omega \operatorname{div}(uV) u dx = -\int_\Omega (V \cdot \nabla u) u dx.$$

c) En déduire que

$$a(u,u) = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}.$$

d) Montrer que $a(.,.)$ est coercive sur H.
3) Montrer que le problème variationnel admet une unique solution.

Corrigé succinct.

1) En multipliant l'équation par $v \in H = H_0^1(\Omega)$ et en intégrant par partie on trouve

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (V \cdot \nabla u) v dx$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f v dx.$$

2) a) L'égalité s'obtient facilement en utilisant le fait que la divergence de V est nulle.
b) L'égalité s'obtient facilement en faisant une intégration par partie et en utilisant le fait que u est nulle au bord.
c) On en déduit que

$$\int_\Omega (V \cdot \nabla u) u dx = 0$$

et donc que

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}.$$

3) Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram après avoir vérifié facilement que l'ensemble des hypothèses est satisfait.

Exercice 2.
On considère la donnée initiale $u(x, t = 0) = u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Résoudre par la méthode des caractéristiques l'equation

$$\partial_t u - x \partial_x u = u.$$

Corrigé succinct.
Les caractéristiques sont définies de manière habituelle par

$$\begin{cases} X'(t) = -X(t) \\ X(t_*) = x_* \end{cases}$$

dont la solution est

$$X(t) = x_* e^{-(t-t_*)}.$$

Le long des caractéristiques la solution vérifie

$$\frac{d}{dt} u(X(t), t) = u(X(t), t)$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\ln(u(X(t),t)) = 1.$$

En intégrant entre 0 et t_*, on obtient

$$\ln(u(x_*,t_*)) - \ln(u_0(X(0))) = t_*$$

ce qui donne

$$u(x_*,t_*) = u_0(x_* e^{t_*})e^{t_*}.$$

La solution est donc donnée par

$$u(x,t) = u_0(xe^t)e^t.$$

Exercice 3.
On cherche à approcher le problème suivant par différences finies :

$$\begin{cases} -u''(x) + c\,u'(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où f est une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ et $c > 0$ une constante.
1) En utilisant des notations classiques, on considère le schéma

$$\frac{-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}}{\Delta x^2} + c\,\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} = f(x_j), \qquad \forall j = 1..J$$

avec $x_j = j\Delta x = \frac{j}{J+1}$ et $u_0 = u_{J+1} = 0$.
a) Ecrire le schéma sous la forme d'un système matriciel $AU = F$ où A est une matrice carrée et U et F des vecteurs colonne de taille J.
b) Définir l'erreur de consistance de ce schéma et étudier son ordre d'approximation.
2) Proposer un nouveau schéma dont l'ordre d'approximation est un cran plus élevé. Expliquez.

Corrigé succinct.
1) a) Le vecteur colonne U contient les inconnues u_j, $j = 1..J$. Le vecteur colonne F contient les quantités $f(x_j)$, $j = 1..J$. La matrice A est une matrice tridiagonale dont une ligne courante est constituée des éléments

$$0 \quad ... \quad 0 \quad -\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{c}{\Delta x} \qquad \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{c}{\Delta x} \qquad -\frac{1}{\Delta x^2} \quad 0 \quad ... \quad 0.$$

b) L'erreur de consistance du schéma est définie par

$$\epsilon_j = \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1})}{\Delta x^2} + c\frac{u(x_j) - u(x_{j-1})}{\Delta x} - f(x_j),$$

où u représente une solution régulière du problème posé. En utilisant des développements de Taylor et en suivant exactement la même méthode que celle faite en cours, on montre facilement que le schéma est d'ordre 1 en espace à cause du traitement décentré du terme de transport. Autrement dit, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout j

$$|\epsilon_j| \leq C\Delta x.$$

2) Il suffit de considérer un traitement centré du terme de transport et donc de considérer le schéma

$$\frac{-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}}{\Delta x^2} + c\,\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = f(x_j), \qquad \forall j = 1..J.$$