UVSQ
2019-2020

Méthodes numériques et programmation avancée
Corrigé succinct du contrôle continu du 10 mars 2020

Exercice 1.
On considère dans cet exercice l'équation de la chaleur posée sur l'intervalle $(0, 1)$ en espace, avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. On notera u la solution, u_0 la donnée initiale, T le temps final. Le terme de chauffage f sera négligé.
1) Rappeler l'écriture de ce problème.
2) Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période 1 et $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. On rappelle que dans ce cas, sauf aux points de discontinuité,

$$v(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{v}(k) e^{2i\pi kx}, \qquad \text{avec } \hat{v}(k) = \int_0^1 v(x) e^{-2i\pi kx}\, dx.$$

Dans cette question, on considère la donnée initiale u_0 définie sur $(0, 1)$ par $u_0(x) = 1$ si $1/4 < x < 3/4$ et $u_0(x) = 0$ sinon.
a) Calculer les coefficients de la série de Fourier de u_0.
b) Déterminer formellement les équations différentielles ordinaires vérifiées par les coefficients de la série de Fourier de la solution du problème.
c) Calculer alors les coefficients de la série de Fourier de la solution du problème.

Corrigé succinct.
1) Le problème s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0, \quad \forall\, x \in (0,1), \quad \forall\, t \in (0,T], \\ u(x=0,t) = u(x=1,t) = 0, \quad \forall\, t \in [0,T], \\ u(x,t=0) = u_0(x), \quad \forall\, x \in [0,1]. \end{cases}$$

2) a) Par définition de u_0 et des coefficients de Fourier, on a pour la donnée initiale

$$\hat{v}_0(0) = \int_{1/4}^{3/4} 1 dx = 1/2$$

si $k=0$, et

$$\hat{v}_0(k) = \int_{1/4}^{3/4} e^{-2i\pi kx}\, dx = -\frac{1}{2i\pi k}(e^{-3i\pi k/2} - e^{-i\pi k/2}) = -\frac{1}{2i\pi k}(e^{i\pi k/2} - e^{-i\pi k/2})$$

si $k \neq 0$, ou encore

$$\hat{v}_0(k) = -\frac{2i}{2i\pi k}\sin(\pi k/2) == -\frac{1}{\pi k}\sin(\pi k/2).$$

On observe que $\hat{v}_0(k) = 0$ si $|k| = 2, 4, 6, 8, ...$ tandis que $\hat{v}_0(k) = -1/(k\pi)$ si $k = 1, 5, 9, ...$ ou $k = -3, -7, ...$, et $\hat{v}_0(k) = 1/(k\pi)$ si $k = 3, 7, ...$ ou $k = -1, -5, ...$

b) On rappelle que l'équation du problème considéré est $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$, ce qui donne (de la même manière que ce qui a été fait en cours) pour les coefficients de Fourier

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\hat{v}(k,t) + 4k^2\pi^2\hat{v}(k,t) = 0, \\ \hat{v}(k,0) = \hat{v}_0(k), \end{cases}$$

dont la solution est donnée par

$$\hat{v}(k,t) = \hat{v}_0(k)e^{-4k^2\pi^2 t}.$$

Exercice 2.
On considère la donnée initiale $u(x, t=0) = u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et c une constante réelle. Résoudre par la méthode des caractéristiques les équations aux dérivées partielles
a) $\partial_t u + c\partial_x u = -u^2$,
b) $\partial_t u + (x-1)\partial_x u = 0$.

Corrigé succinct.
a) Les caractéristiques sont définies de manière habituelle par

$$\begin{cases} X'(t) = cX(t) \\ X(t_*) = x_* \end{cases}$$

dont la solution est $X(t) = x_* + c(t - t_*)$. Le long des caractéristiques la solution vérifie

$$\frac{d}{dt}u(X(t), t) = -u^2(X(t), t)$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{u(X(t),t)}) = 1.$$

En intégrant entre 0 et t_*, on obtient

$$\frac{1}{u(x_*,t_*)} - \frac{1}{u_0(X(0))} = t_*$$

ce qui donne

$$\frac{1}{u(x_*,t_*)} - \frac{1}{u_0(x_* - ct_*)} = t_*$$

puis

$$u(x_*,t_*) = \frac{u_0(x_* - ct_*)}{1 + t_* u_0(x_* - ct_*)}.$$

La solution est donc donnée par

$$u(x,t) = \frac{u_0(x - ct)}{1 + tu_0(x - ct)}.$$

b) Les caractéristiques sont définies de manière habituelle par

$$\begin{cases} X'(t) = X(t) - 1 \\ X(t_*) = x_* \end{cases}$$

dont la solution est $X(t) = (x_* - 1)e^{t-t_*} + 1$ (on résout d'abord l'équation homogène puis on utilise par exemple la méthode de la variation de la constante). Le long des caractéristiques la solution vérifie

$$\frac{d}{dt}u(X(t),t) = 0$$

ou encore en intégrant entre 0 et t_*

$$u(x_*,t_*) = u_0(X(0)) = u_0((x_* - 1)e^{-t_*} + 1).$$

La solution est donc donnée par

$$u(x,t) = u_0((x-1)e^{-t} + 1).$$

Exercice 3.
On considère l'équation

$$\partial_t u + \partial_x u = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in]0,T],$$

avec une donnée initiale $u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ périodique de période 1, un temps final T, et son approximation par différences finies

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq J$, $J\Delta x = 1$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq N$, $N\Delta t = T$. On pose $u_j^0 = u_0(x_j)$, $x_j = (j - 1/2)\Delta x$ pour tout j.
1) a) Définir et étudier l'erreur de consistance de ce schéma. En déduire l'ordre en temps et en espace.
b) Que remarquez-vous si $\Delta t = \Delta x$?
2) Montrer que sous une condition CFL bien choisie, on a le résultat de stabilité L^∞

$$\forall\, n = 1, ..., N, \qquad \|u^n\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$$

où on note $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq J} |u_j|$.
3) Définir et étudier l'erreur du schéma en norme L^∞. En déduire sa convergence.

Corrigé succinct.
1) L'erreur de consistance du schéma est définie par

$$\epsilon_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} + \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x}.$$

En utilisant des développements de Taylor et en suivant exactement la même méthode que celle faite en cours, on montre facilement qu'il existe une constante $C = \max(C_1, C_2)$ telle que pour tout n et pour tout j

$$|\epsilon_j^n| \leq \frac{C}{2}(\Delta t + \Delta x),$$

où $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ représentent respectivement un majorant de la norme infinie des dérivées seconde en temps et en espace de la solution exacte. Le schéma est donc d'ordre 1 en temps et en espace.
2) Si $\Delta t = \Delta x$, on remarque que la définition de l'erreur de consistance donne

$$\epsilon_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x}.$$

Remarquons ensuite que la solution de l'équation est donnée par

$$u(x,t) = u_0(x - t)$$

(appliquer si besoin la méthode des caractéristiques) ce qui donne d'une part

$$u(x_j, t^{n+1}) = u_0(x_j - t^{n+1}) = u_0(x_j - t^n - \Delta t) = u_0(x_j - t^n - \Delta x)$$

et d'autre part

$$u(x_{j-1}, t^n) = u_0(x_{j-1} - t^n) = u_0(x_j - \Delta x - t^n) = u_0(x_j - t^n - \Delta x).$$

L'erreur de consistance est donne nulle.
2) On procède exactement comme cela a été fait en cours. La définition du schéma s'écrit aussi

$$u_j^{n+1} = (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x})u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}u_{j-1}^n.$$

Sous la condition CFL

$$\Delta t \leq \Delta x,$$

les coefficients sont positifs de sorte que

$$|u_j^{n+1}| \leq (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x})|u_j^n| + \frac{\Delta t}{\Delta x}|u_{j-1}^n|$$

et donc

$$|u_j^{n+1}| \leq ||u^n||_\infty.$$

Cette inégalité étant valable pour tout j, on en déduit que

$$||u^{n+1}||_\infty \leq ||u^n||_\infty$$

puis par récurrence

$$||u^n||_\infty \leq ||u_0||_\infty.$$

3) L'erreur du schéma est définie par

$$e_j^n = u_j^n - u(x_j, t^n),$$

de sorte que les définitions du schéma et de l'erreur de consistance donnent

$$e_j^{n+1} = (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x})e_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}e_{j-1}^n - \Delta t \epsilon_j^n.$$

Sous la condition CFL

$$\Delta t \leq \Delta x,$$

on en déduit que

$$|e_j^{n+1}| \leq (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x})|e_j^n| + \frac{\Delta t}{\Delta x}|e_{j-1}^n| + \Delta t|\epsilon_j^n|,$$

ou encore

$$|e_j^{n+1}| \leq ||e^n|| + \frac{C\Delta t}{2}(\Delta t + \Delta x).$$

Cette inégalité étant valable pour tout j, on en déduit que

$$||e^{n+1}||_\infty \leq ||e^n|| + \frac{C\Delta t}{2}(\Delta t + \Delta x),$$

puis par récurrence

$$||e^n||_\infty \leq ||e^0|| + \frac{Cn\Delta t}{2}(\Delta t + \Delta x),$$

ou encore, puisque par définition $e_j^0 = 0$ pour tout j,

$$||e^n||_\infty \leq \frac{CT}{2}(\Delta t + \Delta x),$$

où T représente le temps final. On en déduit donc que l'erreur tend vers 0 avec Δt et Δx, c'est-à-dire la convergence du schéma.