Chapitre 4

Application aux modèles multi-échelle de turbulence compressible homogène isotrope

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les considérations théoriques et numériques développées dans les précédents chapitres à une classe de modèles de turbulence compressible homogène isotrope. Nous considérons les modèles dits multi-échelle. Ces modèles s'inscrivent dans le formalisme des équations de Navier-Stokes à plusieurs pressions indépendantes proposé et étudié jusqu'à présent.

Nous débutons ce chapitre par des rappels sur les écoulements compressibles turbulents, l'objectif étant de situer les modèles multi-échelle dans un cadre général de représentation et de simulation des phénomènes de turbulence compressible (section 4.1). Nous présentons et analysons ensuite les équations décrivant ces modèles, pour s'apercevoir qu'ils constituent une extension naturelle des équations de Navier-Stokes à plusieurs pressions indépendantes. Celles-ci sont complétées par des équations d'évolution sur des grandeurs turbulentes moyennes à préciser (section 4.2). Nous en proposons alors une approximation numérique consistante, basée sur les procédures développées dans les chapitres précédents pour approcher les solutions des équations de Navier-Stokes à plusieurs pressions (section 4.3).

4.1 Quelques brèves notions de turbulence

Dans cette section, nous rappelons quelques notions de turbulence afin de situer dans un contexte général les modèles de turbulence compressible multi-échelle étudiés dans la section suivante. Nous insistons sur le fait que cette section ne constitue pas une présentation, ni même une introduction à la turbulence. Pour cela, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de référence Schiestel [116], Lesieur [98], Piquet [111], Sagault [114], ainsi qu'à la thèse de Gleize [54], ... Cette section est largement inspirée de ces travaux. Nous renvoyons également à l'ouvrage de Mohammadi-Pironneau [106] et à celui de Hirsch [68] pour l'exposé de méthodes d'approximation numérique.

4.1.1 Les écoulements turbulents

La notion de turbulence caractérise certains écoulements de fluide. S'il n'existe pas de définition précise de la turbulence, on peut cependant la caractériser par plusieurs critères. Les plus souvent retenus sont :
. le caractère aléatoire des fluctuations spatiales et temporelles du champ des vitesses,
. la grande capacité de mélange,
. le caractère chaotique de la solution, qui exhibe une très forte dépendance par rapport à la condition initiale et aux conditions aux limites.
Par ailleurs, la turbulence se traduit par un mouvement tourbillonnaire présentant un large spectre de dimensions de tourbillons et un spectre correspondant en fréquence. Ce mouvement peut être conçu comme un enchevêtrement de structures tourbillonnantes dont les vecteurs rotationnels sont orientés dans toutes les directions et sont fortement instationnaires. Les plus gros tourbillons (associés aux basses fréquences) sont en général déterminés par les conditions aux limites de l'écoulement et leurs dimensions sont alors de l'ordre de grandeur du domaine occupé par l'écoulement. Ils extraient de l'énergie cinétique du mouvement moyen pour la fournir aux agitations à grandes échelles (cf figure 4.1), et sont animés des vitesses les plus faibles. L'interaction de ces tourbillons entre eux provoque leurs déformations et étirements. Cet allongement des filets tourbillonnaires conduit à un transfert progressif de l'énergie cinétique à des échelles de plus en plus petites jusqu'à ce que les forces visqueuses deviennent actives et la dissipent. C'est la cascade d'énergie. L'évolution des petits tourbillons (associés aux hautes fréquences) est déterminée par les forces visqueuses. Ils sont le résultat de la dégradation des plus gros tourbillons par l'étirement. Ils sont dissipés par les forces visqueuses et leurs énergies cinétiques sont transformées en énergie interne thermodynamique.

4.1.2 Les principales méthodes de simulation de la turbulence

Les différentes méthodes de simulation de la turbulence peuvent être regroupées en trois grandes catégories : la simulation directe (DNS ou *Direct Numerical Simulation*), la simulation des grandes échelles (LES ou *Large Eddy Simulation*) et les méthodes statistiques (RANS ou *Reynolds Averaged Navier-Stokes*).

• La DNS

La DNS consiste à résoudre directement les équations de Navier-Stokes. Pour un écoulement turbulent, une telle résolution nécessite la prise en compte de la dynamique de toutes les échelles spatio-temporelles de la solution. Cette précision est indispensable pour observer la turbulence de façon détaillée, et obtenir des prédictions intéressantes pour les applications. Cependant, les écoulements turbulents contenant des échelles de tailles très différentes, ces calculs s'avèrent la plupart du temps impossibles à réaliser dans la pratique. Ainsi si l'on désigne par L et l les tailles caractéristiques respectivement la plus grande (largeur d'une plaque plane, d'un canal) et la plus petite (taille des régions tourbillonnaires) du problème, le nombre de points du maillage correspondant est de l'ordre de $(L/l)^d$, d représentant la dimension de l'espace. Les théories de

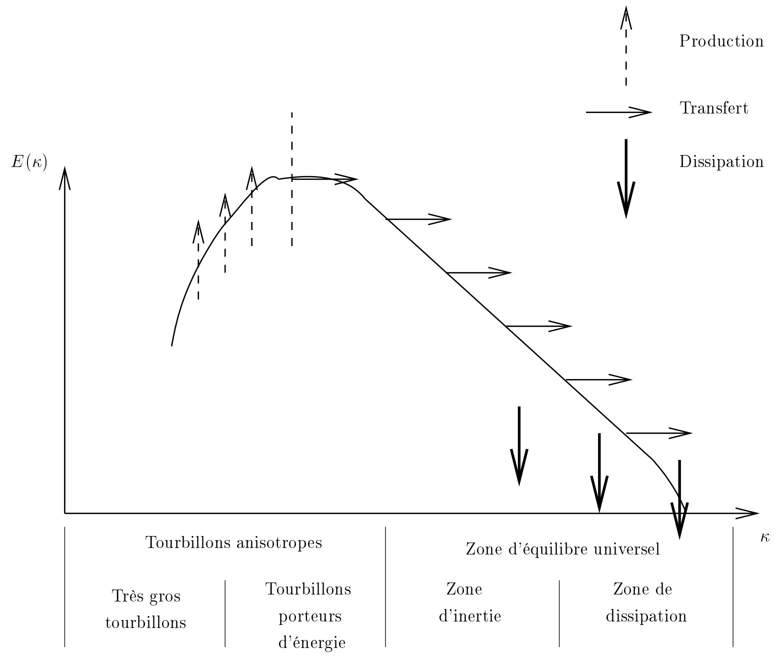

Fig. 4.1 – *Spectre d'énergie turbulente*

cascade turbulente (Kolmogorov par exemple) permettent d'estimer l :

$$l \simeq Re^{-n}, \quad \frac{3}{4} \leq n \leq 1.$$

Les nombres de Reynolds Re typiques en aérodynamique classique étant de l'ordre de 10^6, on vérifie aisément que le nombre de points de discrétisation nécessaires pour représenter les plus petites échelles de la turbulence à grand nombre de Reynolds atteint des valeurs irréalistes en regard des capacités des ordinateurs actuels. Cette approche ne peut donc être utilisée que pour simuler des écoulements simples à faible nombre de Reynolds.

Pour rendre des calculs plus généraux envisageables, il est nécessaire de simplifier l'approche précédente en ne resolvant plus directement la dynamique de toutes les échelles de la solution exacte. Pour cela, il faut introduire un nouveau niveau de description, moins fin, du sytème fluide. Ceci revient à opérer une sélection parmi les échelles. Certaines d'entre elles (les échelles les plus grandes) seront simulées directement lors du calcul alors que d'autres (typiquement les plus petites) devront être modélisées. Les méthodes LES et RANS suivent ce principe.

• **La LES**

L'approche LES est un intermédiaire entre le calcul direct (DNS) et l'approche statistique (RANS). Comme énoncé précédemment, la base de cette méthode est une sélection des échelles. On définit une longueur caractéristique dite *longueur de coupure* : sont appelées grandes échelles ou échelles résolues celles qui sont d'une taille caractéristique plus grande que la longueur de coupure et petites échelles ou échelles sous-mailles les autres. La *longueur de coupure* est donc ici typiquement de l'ordre de la taille de la maille. Ainsi, toutes les échelles du mouvement turbulent sont résolues jusqu'à une taille de l'ordre de la maille, et la dissipation par les tourbillons d'échelles inférieures est modélisée par un modèle de sous-mailles. Cette technique permet de rendre réaliste l'approximation d'écoulements à nombre de Reynolds élevé. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à Sagault [114].

• **Les méthodes RANS**

L'approche RANS est la plus utilisée pour les calculs d'ingénierie. Le principe consiste à ne calculer qu'une moyenne statistique de la solution exacte $\mathbf{u}$. Celle-ci est décomposée comme la somme de sa moyenne statistique $<\mathbf{u}>$ et d'une fluctuation $\mathbf{u}'$. Cette dernière n'est pas représentée directement par la réalisation numérique et n'est prise en compte que par le biais d'un modèle de turbulence. Il est ainsi possible de réduire considérablement le nombre de points de discrétisation. En revanche, le caractère statistique de la solution ne permet pas une description fine des mécanismes physiques, et ne donne accès qu'aux propriétés moyennes de l'écoulement.
Parmi les méthodes RANS, il existe plusieurs principes : le principe d'échelle unique et le principe d'échelles multiples.

Le principe d'échelle unique
Dans ce principe, on ne s'intéresse qu'aux propriétés les plus grossières de l'écoulement en évacuant toute considération relative aux interactions entre les différentes échelles. L'avantage est de ne travailler que sur des quantités dynamiques très simples (l'énergie cinétique de la turbulence et le taux de dissipation par exemple). L'inconvénient est de perdre un nombre important d'informations dynamiques du fait de la négligence des interactions entre échelles. On peut citer comme exemple le modèle $k-\epsilon$.

Le principe d'échelles multiples
L'hypothèse précédente consistant à décrire tout le champ turbulent à l'aide d'une échelle unique est dans les faits très discutable (équilibre spectral, ...). Ainsi, l'idée de décrire la turbulence à l'aide de plusieurs échelles, chacune caractéristique de processus physiques bien distincts, apparaît naturellement (cf figure 4.2).
Les modèles utilisant ce principe sont appelés **modèles multi-échelle** (ou modèles à échelles multiples), et constituent la principale motivation des travaux effectués dans la section suivante. Pour plus de détails sur les fondements de ces modèles, nous renvoyons le lecteur à Schiestel [116], Gleize [54], ...

4.2 Les modèles multi-échelle

L'objectif de cette section est de présenter les modèles multi-échelle de turbulence compressible homogène isotrope, et de les réinterpréter comme des équations de Navier-Stokes à plusieurs pressions indépendantes : la pression laminaire et des pressions turbulentes. Ces équations seront complétées par des lois d'évolution sur des grandeurs turbulentes que nous préciserons par la suite.

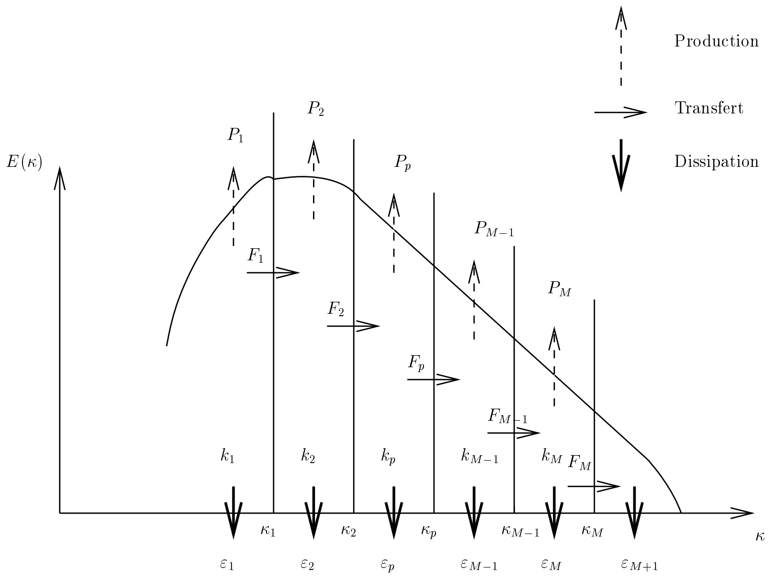

FIG. 4.2 – *Découpage du spectre d'énergie en M zones*

Sous l'hypothèse de grands nombres de Reynolds, les modèles multi-échelle considérés sont décrits par le système d'équations aux dérivées partielles non linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}
\partial_t\rho + \partial_x\rho u = 0, \\[2ex]
\partial_t\rho u + \partial_x(\rho u^2 + p + (\gamma_\tau - 1)\sum_{m=1}^{M}\rho k^{(m)}) = \partial_x((\mu + \sum_{m=1}^{M}\mu_\tau^{(m)})\partial_x u), \\[2ex]
\partial_t\rho E + \partial_x(\rho E + p + (\gamma_\tau - 1)\sum_{m=1}^{M}\rho k^{(m)})u = \\
\partial_x((\mu + \sum_{m=1}^{M}\mu_\tau^{(m)})u\partial_x u) + \partial_x(\kappa\partial_x T) + \sum_{m=1}^{M}\partial_x(\kappa_m\partial_x k^{(m)}), \\[2ex]
\partial_t\rho k^{(m)} + \partial_x\rho k^{(m)}u = \\
P_k^{(m)} + \rho(F^{(m-1)} - F^{(m)}) + \partial_x(\kappa_m\partial_x k^{(m)}), \\[2ex]
\partial_t\rho F^{(m)} + \partial_x\rho F^{(m)}u = \\
C_0^{(m)}\frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}P_k^{(m)} + \rho\frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}(C_1^{(m)}F^{(m-1)} - C_2^{(m)}F^{(m)}) + \partial_x(\tilde{\kappa}_m\partial_x F^{(m)}), \\
\qquad\qquad\qquad m = 1, ..., M,
\end{array}\right. \tag{4.1}$$

où, de manière classique, ρ, ρu et ρE représentent respectivement la densité, la quantité de mouvement et l'énergie totale du fluide considéré. Notons que par souci de simplicité dans les notations, le système d'équations est présenté ici en une seule dimension d'espace.
Dans ce modèle, M, entier naturel avec $M \geq 1$, représente le nombre d'échelles utilisées pour décrire la turbulence et décomposer le spectre d'énergie correspondant. Chacune de ces échelles étant caractéristique de processus physiques bien distincts, une énergie cinétique turbulente notée $\rho k^{(m)}$, une viscosité turbulente notée $\mu_\tau^{(m)}$, et un

taux de dissipation turbulente noté $\rho F^{(m)}$ leur sont associés pour tout $m = 1, ..., M$. Par convention, nous posons $F^{(0)} = 0$ dans (4.1). Soulignons que chacune des trois quantités $\rho k^{(m)}$, $\mu_\tau^{(m)}$ et $\rho F^{(m)}$ doit être positive ou nulle.
Notons que du point de vue de la modélisation, les énergies cinétiques turbulentes $\rho k^{(m)}$ et les viscosités turbulentes $\mu_\tau^{(m)}$ s'ajoutent, dans les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale, respectivement à la pression laminaire p et à la viscosité laminaire μ du fluide.
Les équations considérées dans ce chapitre seront toujours supposées être sous forme adimensionnée. De ce fait, les notations

$$\mu, \{\mu_\tau^{(m)}\}_{m=1,...,M}, \kappa, \{\kappa_m\}_{m=1,...,M}, \{\tilde{\kappa}_m\}_{m=1,...,M},$$

représentent respectivement des nombres de Reynolds et des nombres de Prandtl, que nous continuerons cependant par abus de langage d'appeler viscosités et conductivités thermiques. De même, nous appellerons communément les inconnues ρ, u, p, ... par leur dénomination dimensionnée, à savoir densité, vitesse, pression, ...
Les viscosités turbulentes $\{\mu_\tau^{(m)}\}_{m=1,...,M}$ sont habituellement définies par

$$\mu_\tau^{(m)} = C_\mu^{(m)} \rho \frac{{k^{(m)}}^2}{F^{(m)}},$$

où les $\{C_\mu^{(m)}\}_{m=1,...,M}$ sont des constantes positives du modèle. Notons que ces viscosités turbulentes partielles sont positives sous la condition $\rho F^{(m)} \geq 0$. Les conductivités thermiques sont généralement modélisées par

$$\kappa = \frac{\mu}{Pr} + \sum_{m=1}^{M} \frac{\mu_\tau^{(m)}}{Pr_\tau^{(m)}}, \quad m = 1, ..., M, \tag{4.2}$$

$$\kappa_m = \mu + \frac{\mu_\tau^{(m)}}{\alpha_m}, \quad m = 1, ..., M, \tag{4.3}$$

$$\tilde{\kappa}_m = C_0^{(m)} (\gamma_\tau - 1)(\mu + \frac{\mu_\tau^{(m)}}{\alpha_\varepsilon^{(m)}}), \quad m = 1, ..., M, \tag{4.4}$$

où Pr et $Pr_\tau^{(m)}, \alpha_m, \alpha_\varepsilon^{(m)}$ pour tout $m = 1, ..., M$, sont également des constantes positives du modèle à préciser (voir Schiestel [116], Gleize [54] pour leurs choix). La viscosité laminaire μ est choisie constante.
Pour conclure la description du système, il reste à définir le terme de production $P_k^{(m)}$ intervenant dans (4.1) qui trouve classiquement la forme :

$$P_k^{(m)} = -(\gamma_\tau - 1) \rho k^{(m)} \partial_x u + \mu_\tau^{(m)} (\partial_x u)^2, \tag{4.5}$$

et à relier la pression laminaire p aux inconnues du système par la loi de fermeture sur l'énergie totale ρE :

$$\rho E = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \frac{p}{\gamma - 1} + \sum_{m=1}^{M} \rho k^{(m)}. \tag{4.6}$$

γ désigne une constante strictement supérieure à 1 et représente le coefficient adiabatique associé à p. De même, le coefficient adiabatique γ_τ associé aux énergies cinétiques turbulentes $\rho k^{(m)}$ est strictement supérieur à 1. Il trouve la définition suivante :

$$\gamma_\tau = 1 + \frac{2}{d}, \quad d \geq 1,$$

où d représente la dimension d'espace du système initial dont dérive la formulation "quasi-1D" (4.1).
Remarquons enfin que lorsque l'on fait le choix $M = 1$ (voir Berthon [10]), le modèle (4.1) dégénère trivialement sur le modèle $k - \varepsilon$ classique, F jouant le rôle de ε.

Notre propos consiste maintenant à réinterpréter les modèles multi-échelle considérés dans le formalisme des équations de Navier-Stokes à plusieurs pressions indépendantes, complétées par des lois d'évolution à préciser. Cette analogie nous permettra de mettre à profit les études menées dans la première partie de ce manuscrit, et d'en proposer une approximation numérique consistante (voir section 4.3).

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale présentes dans (4.1) suggèrent l'introduction des notations

$$p_\tau^{(m)} = (\gamma_\tau - 1)\rho k^{(m)}, \quad m = 1, ..., M, \tag{4.7}$$

permettant de définir la quantité $p + (\gamma_\tau - 1)\sum_{m=1}^{M} \rho k^{(m)}$ comme une somme de pressions partielles : une pression laminaire p et des pressions turbulentes $p_\tau^{(m)}$. Une analyse dimensionnelle nous indique que les quantités $\{(\gamma_\tau - 1)\rho k^{(m)}\}_{m=1,...,M}$ possèdent bien la dimension d'une pression. Précisons que les quantités $\sqrt{k^{(m)}}, k^{(m)}/F^{(m)}, {k^{(m)}}^{3/2}/F^{(m)}$ sont, pour tout $m = 1, ..., M$, respectivement homogènes à des vitesses, des temps et des longueurs caractéristiques de la turbulence. Ainsi, le système (4.1) se réécrit de manière équivalente sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l}
\partial_t\rho + \partial_x\rho u = 0,\\[2mm]
\partial_t\rho u + \partial_x(\rho u^2 + p + \sum_{m=1}^{M} p_\tau^{(m)}) = \partial_x((\mu + \sum_{m=1}^{M} \mu_\tau^{(m)})\partial_x u),\\[2mm]
\partial_t\rho E + \partial_x(\rho E + p + \sum_{m=1}^{M} p_\tau^{(m)})u =\\
\partial_x((\mu + \sum_{m=1}^{M} \mu_\tau^{(m)})u\partial_x u) + \partial_x(\kappa\partial_x T) + \sum_{m=1}^{M} \partial_x(\kappa_m\partial_x k^{(m)}),\\[2mm]
\partial_t p_\tau^{(m)} + \partial_x p_\tau^{(m)} u + (\gamma_\tau - 1)p_\tau^{(m)}\partial_x u =\\
(\gamma_\tau - 1)(\mu_\tau^{(m)}(\partial_x u)^2 + \rho(F^{(m-1)} - F^{(m)}) + \partial_x(\kappa_m\partial_x k^{(m)}),\\[2mm]
\partial_t\rho F^{(m)} + \partial_x\rho F^{(m)} u =\\
C_0^{(m)}\frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}P_k^{(m)} + \rho\frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}(C_1^{(m)}F^{(m-1)} - C_2^{(m)}F^{(m)}) + \partial_x(\tilde{\kappa}_m\partial_x F^{(m)}),\\
\qquad\qquad\qquad m = 1, ..., M.
\end{array}\right. \tag{4.8}$$

Cette formulation assimile les lois d'évolution des quantités $\{\rho k^{(m)}\}_{m=1,...,M}$ à de véritables lois de pression. Pour aller plus loin dans cette direction, nous indiquons maintenant sans démonstration (voir Berthon [10] dans le cas $M = 1$) que la définition (4.5) et la loi de fermeture sur l'énergie totale (4.6) définissant la pression laminaire p, entraînent la validité, pour les solutions régulières du système (4.8), de la loi d'évolution suivante sur p :

$$\partial_t p + \partial_x pu + (\gamma - 1)p\partial_x u = (\gamma - 1)(\mu(\partial_x u)^2 + \rho F^{(M)} + \partial_x(\kappa\partial_x T)).$$

En remplaçant dans (4.8) la loi de conservation sur l'énergie totale ρE par la loi de pression sur p, nous obtenons la formulation équivalente suivante du modèle de turbulence compressible multi-échelle (4.1) :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x\rho u = 0, \\ \\ \partial_t\rho u + \partial_x(\rho u^2 + p + \sum_{m=1}^{M} p_\tau^{(m)}) = \partial_x((\mu + \sum_{m=1}^{M}\mu_\tau^{(m)})\partial_x u), \\ \\ \partial_t p + \partial_x pu + (\gamma - 1)p\partial_x u = (\gamma - 1)(\mu(\partial_x u)^2 + \rho F^{(M)} + \partial_x(\kappa\partial_x T)), \\ \\ \partial_t p_\tau^{(m)} + \partial_x p_\tau^{(m)} u + (\gamma_\tau - 1)p_\tau^{(m)}\partial_x u = \\ (\gamma_\tau - 1)(\mu_\tau^{(m)}(\partial_x u)^2 + \rho(F^{(m-1)} - F^{(m)}) + \partial_x(\kappa_m\partial_x k^{(m)}), \\ \\ \partial_t\rho F^{(m)} + \partial_x\rho F^{(m)} u = \\ C_0^{(m)}\frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}P_k^{(m)} + \rho\frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}(C_1^{(m)}F^{(m-1)} - C_2^{(m)}F^{(m)}) + \partial_x(\tilde{\kappa}_m\partial_x F^{(m)}), \\ \qquad\qquad m = 1, ..., M. \end{cases} \tag{4.9}$$

Elle implique les deux lois de conservation usuelles sur la masse et la quantité de mouvement ainsi que $(M+1)$ lois de pression indépendantes. Ainsi, nous réinterprétons le modèle (4.1) comme le système des équations de Navier-Stokes à plusieurs pressions indépendantes (aux termes sources près), complété par des lois d'évolution sur les grandeurs turbulentes $\rho F^{(m)}$. Dans le contexte de l'approximation numérique des solutions du système (4.1), il apparaît dès lors qu'une stratégie de splitting d'opérateurs entre la partie convective-diffusive et les autres opérateurs du système (4.9) nous permettra de tirer profit des études réalisées dans les chapitres précédents. Nous détaillerons ces différents points dans la section suivante. Nous renvoyons à [10] pour l'exposé d'une stratégie voisine mais dédiée au cas $M = 1$.

Nous terminons cette section en donnant deux nouvelles formulations équivalentes du système (4.9) pour les solutions régulières.

La première réécriture est basée sur une transformation des lois gouvernant l'évolution des quantités $\{\rho F^{(m)}\}_{m=1,...,M}$ en de véritables lois de transport (en l'absence de conductivité thermique) sur des grandeurs caractéristiques de la turbulence. Plus précisément, en introduisant les quantités $\{S_m^X\}_{m=1,...,M}$ définies par

$$S_m^X = \ln(\frac{F^{(m)}}{k^{(m)^{C_0^{(m)}}}}), \quad m = 1, ..., M, \tag{4.10}$$

nous établissons facilement l'équivalence, pour les solutions régulières, du système

(4.9) avec le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t\rho + \partial_x\rho u = 0,\\[2ex]\partial_t\rho u + \partial_x(\rho u^2 + p + \sum_{m=1}^M p_\tau^{(m)}) = \partial_x((\mu + \sum_{m=1}^M \mu_\tau^{(m)})\partial_x u),\\[2ex]\partial_t p + \partial_x p u + (\gamma-1)p\partial_x u = (\gamma-1)(\mu(\partial_x u)^2 + \rho F^{(M)} + \partial_x(\kappa\partial_x T)),\\[2ex]\partial_t p_\tau^{(m)} + \partial_x p_\tau^{(m)} u + (\gamma_\tau - 1)p_\tau^{(m)}\partial_x u =\\(\gamma_\tau-1)(\mu_\tau^{(m)}(\partial_x u)^2 + \rho(F^{(m-1)} - F^{(m)}) + \partial_x(\kappa_m\partial_x k^{(m)})),\\[2ex]\partial_t\rho S_m^X + \partial_x\rho S_m^X u =\\\rho\frac{F^{(m-1)}}{k^{(m)}}(C_1^{(m)} - C_0^{(m)}) - \rho\frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}(C_2^{(m)} - C_0^{(m)}) +\\\frac{1}{F^{(m)}}\partial_x(\tilde\kappa_m\partial_x F^{(m)}) - \frac{C_0^{(m)}}{k^{(m)}}\partial_x(\kappa_m\partial_x k^{(m)}),\\\qquad\qquad m = 1, ..., M.\end{array}\right. \tag{4.11}$$

Remarquons que lorsque $C_0^{(m)} = \frac{3}{2}$, la quantité S_m^X représente une longueur caractéristique de la turbulence.

La deuxième formulation consiste à introduire les entropies spécifiques s et $\{s^{(m)}\}_{m=1,...,M}$ définies par :

$$s = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad s^{(m)} = \frac{p_\tau^{(m)}}{\rho^{\gamma_\tau}}, \quad m = 1, ..., M, \tag{4.12}$$

de telle sorte que les lois de pression du système (4.11) se réécrivent pour les solutions régulières, et en vertu de la conservation de la masse, sous la forme :

$$\partial_t s + u\partial_x s = \frac{\gamma-1}{\rho^\gamma}(\mu(\partial_x u)^2 + \rho F^{(M)} + \partial_x(\kappa\partial_x T)),$$

$$\partial_t s^{(m)} + u\partial_x s^{(m)} = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau}}(\mu_\tau^{(m)}(\partial_x u)^2 + \rho(F^{(m-1)} - F^{(m)}) + \partial_x(\kappa_m\partial_x k^{(m)})),$$
$$m = 1, ..., M,$$

ou encore,

$$\partial_t\rho s + \partial_x\rho s u = \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}}(\mu(\partial_x u)^2 + \rho F^{(M)} + \partial_x(\kappa\partial_x T)), \tag{4.13}$$

$$\partial_t\rho s^{(m)} + \partial_x\rho s^{(m)} u = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}}(\mu_\tau^{(m)}(\partial_x u)^2 + \rho(F^{(m-1)} - F^{(m)}) + \partial_x(\kappa_m\partial_x k^{(m)})), \tag{4.14}$$
$$m = 1, ..., M.$$

De manière plus générale, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 5
Soient $h : I\!R \to I\!R$ et $\{h_m : I\!R \to I\!R\}_{m=1,...,M}$, $(M+1)$ applications supposées régulières.
Alors, les solutions régulières du système (4.11) vérifient les lois d'évolution suivantes :

$$\partial_t\rho h(s) + \partial_x\rho h(s) u = \frac{\gamma-1}{\rho^{\gamma-1}}h'(s)(\mu(\partial_x u)^2 + \rho F^{(M)} + \partial_x(\kappa\partial_x T)), \tag{4.15}$$

et pour tout $m = 1, ..., M$ *:*

$$\partial_t \rho h_m(s^{(m)}) + \partial_x \rho h_m(s^{(m)}) u =$$

$$\frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'_m(s^{(m)})(\mu_\tau^{(m)}(\partial_x u)^2 + \rho(F^{(m-1)} - F^{(m)}) + \partial_x(\kappa_m \partial_x k^{(m)})). \tag{4.16}$$

Nous obtenons alors sans aucune difficulté la formulation équivalente suivante du système (4.11) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p + \sum_{m=1}^M p_\tau^{(m)}) = \partial_x ((\mu + \sum_{m=1}^M \mu_\tau^{(m)}) \partial_x u), \\ \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + p + \sum_{m=1}^M p_\tau^{(m)}) u = \\ \partial_x ((\mu + \sum_{m=1}^M \mu_\tau^{(m)}) u \partial_x u) + \partial_x (\kappa \partial_x T) + \sum_{m=1}^M \partial_x (\kappa_m \partial_x k^{(m)}), \\ \\ \partial_t \rho S^{(m)} + \partial_x \rho S^{(m)} u = \\ \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'_m(s^{(m)})(\mu_\tau^{(m)}(\partial_x u)^2 + \rho(F^{(m-1)} - F^{(m)}) + \partial_x(\kappa_m \partial_x k^{(m)})), \\ \\ \partial_t \rho S_m^X + \partial_x \rho S_m^X u = \\ \rho \frac{F^{(m-1)}}{k^{(m)}} (C_1^{(m)} - C_0^{(m)}) - \rho \frac{F^{(m)}}{k^{(m)}} (C_2^{(m)} - C_0^{(m)}) + \\ \frac{1}{F^{(m)}} \partial_x (\tilde{\kappa}_m \partial_x F^{(m)}) - \frac{C_0^{(m)}}{k^{(m)}} \partial_x (\kappa_m \partial_x k^{(m)}), \\ \qquad\qquad\qquad m = 1, ..., M, \end{cases} \tag{4.17}$$

avec par définition :

$$S^{(m)} = h_m(s^{(m)}), \quad m = 1, ..., M.$$

Bien entendu, les solutions régulières de ce système vérifient sans condition supplémentaire la loi d'évolution suivante sur l'entropie spécifique $S = h(s)$, qui doit être comprise comme une fonction du vecteur $\mathbf{v^S}$:

$$\mathbf{v^S} = {}^T(\rho, \rho u, \rho E, \{\rho S^{(m)}\}_{m=1,...,M}, \{\rho S_m^X\}_{m=1,...,M})$$

des inconnues du système (4.17) :

$$\partial_t \rho S(\mathbf{v^S}) + \partial_x \rho S(\mathbf{v^S}) u = \frac{\gamma - 1}{\rho^{\gamma - 1}} h'(h^{-1}(S(\mathbf{v^S})))(\mu(\partial_x u)^2 + \rho F^{(M)} + \partial_x(\kappa \partial_x T)). \tag{4.18}$$

Sous des hypothèses *adhoc* de type convexité sur les applications $\{h_m\}_{m=1,...,M}$ et h (voir [10] pour plus détails), on montre que l'application $\mathbf{v^S} \to \rho S(\mathbf{v^S})$ est strictement convexe, de sorte que le couple $(\rho S(\mathbf{v^S}), \rho S(\mathbf{v^S}) u)$ joue le rôle d'un couple d'entropie de Lax.

4.3 Approximation numérique

L'objectif de cette section est de proposer une méthode numérique consistante pour approcher numériquement les solutions du modèle de turbulence compressible multi-échelle (4.17), pour une donnée initiale $\mathbf{v_0^S}$. Afin d'éviter des restrictions CFL contraignantes, nous proposons un traitement numérique implicite de ce système. Nous aurons pour souci de préserver au niveau discret la positivité éventuelle des différentes quantités intervenant dans le modèle.

Supposons donnés un pas de temps constant Δt et un pas d'espace constant Δx, et définissons la quantité $\lambda = \Delta t/\Delta x$. Nous considérons les solutions approchées $\mathbf{v}_\lambda^{\mathbf{S}}(x,t)$ du système (4.17) constantes par morceaux sur chaque pavé $\mathcal{C}_j^n := [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[\times[t^n, t^{n+1}[$, avec pour tout $j \in Z$, $x_{j+1/2} = (j+1/2)\Delta x$ et pour tout $n \in N$, $t^n = n\Delta t$. Nous posons alors :

$$\mathbf{v}_\lambda^{\mathbf{S}}(x,t^n) = (\mathbf{v}^{\mathbf{S}})_j^n = {}^T(\rho, \rho u, \rho E, \{\rho S^{(m)}\}_{m=1,\dots,M}, \{\rho S_m^X\}_{m=1,\dots,M})_j^n,$$

$$\text{si } (x,t) \in \mathcal{C}_j^n, \quad j \in Z, \quad n \in N,$$

et par définition :

$$(\mathbf{v}^{\mathbf{S}})_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{v}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{S}}(x)dx, \quad j \in Z.$$

Supposons connue la solution approchée $\mathbf{v}_\lambda^{\mathbf{S}}(x,t^n)$, $n \geq 0$. Pour avancer en temps cette solution jusqu'à l'instant t^{n+1}, nous adoptons une stratégie de splitting entre les différents opérateurs du système (4.17). La procédure correspondante est composée de trois sous-pas.

Premier pas : opérateur convectif-diffusif $(t^n \to t^{n+1=})$
Ce premier pas consiste en la résolution de l'opérateur convectif-diffusif extrait du système (4.17) :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x\rho u = 0, \\[2ex] \partial_t\rho u + \partial_x(\rho u^2 + p + \sum_{m=1}^M p_\tau^{(m)}) = \partial_x((\mu + \sum_{m=1}^M \mu_\tau^{(m)})\partial_x u), \\[2ex] \partial_t\rho E + \partial_x(\rho E + p + \sum_{m=1}^M p_\tau^{(m)})u = \partial_x((\mu + \sum_{m=1}^M \mu_\tau^{(m)})u\partial_x u), \\[2ex] \partial_t\rho S^{(m)} + \partial_x\rho S^{(m)}u = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h_m'(s^{(m)})\mu_\tau^{(m)}(\partial_x u)^2, \quad m = 1,\dots,M, \\[2ex] \partial_t\rho S_m^X + \partial_x\rho S_m^X u = 0, \quad m = 1,\dots,M. \end{cases} \tag{4.19}$$

En invoquant l'équivalence pour les solutions régulières des systèmes (4.17) et (4.11), nous transformons de manière équivalente les équations de (4.19) en considérant le système :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x\rho u = 0, \\[2ex] \partial_t\rho u + \partial_x(\rho u^2 + p + \sum_{m=1}^M p_\tau^{(m)}) = \partial_x((\mu + \sum_{m=1}^M \mu_\tau^{(m)})\partial_x u), \\[2ex] \partial_t p + \partial_x p u + (\gamma - 1)p\partial_x u = (\gamma - 1)\mu(\partial_x u)^2, \\[2ex] \partial_t p_\tau^{(m)} + \partial_x p_\tau^{(m)} u + (\gamma_\tau - 1)p_\tau^{(m)}\partial_x u = (\gamma_\tau - 1)\mu_\tau^{(m)}(\partial_x u)^2, \quad m = 1,\dots,M, \end{cases} \tag{4.20}$$

complété par les M lois de transport suivantes sur les grandeurs turbulentes S_m^X :

$$\left\{ \partial_t \rho S_m^X + \partial_x \rho S_m^X u = 0, \quad m = 1, ..., M. \right. \tag{4.21}$$

Les équations (4.21) sont naturellement découplées de celles du système (4.20). Soulignons également que le système (4.20) représente le système des équations de Navier-Stokes à $(M+1)$ pressions indépendantes. Ce système ayant été très largement considéré dans les chapitres précédents, nous tirons profit de ces études en proposant pour ce premier pas une mise à jour implicite des inconnues du système (4.20) coïncidant avec l'approximation, présentée dans le chapitre 3, du système des équations de Navier-Stokes multi-pression. Nous rappelons que cette mise à jour assure la positivité des pressions $p_j^{n+1=}$ et $\{(p_\tau^{(m)})_j^{n+1=}\}_{m=1,...,M}$ (à la condition que la densité et l'énergie interne totale restent positives, condition indispensable à la poursuite des calculs) à l'issue de ce premier pas, et donc des énergies cinétiques turbulentes $\{(\rho k^{(m)})_j^{n+1=}\}_{m=1,...,M}$.

Concernant la mise à jour des grandeurs turbulentes $\{(S_m^X)_j^{n+1=}\}_{m=1,...,M}$, nous proposons la discrétisation classique et implicite linéarisée suivante des équations (4.21) :

$$(\rho S_m^X)_j^{n+1=} - (\rho S_m^X)_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta \{\rho S_m^X u\}_{j+1/2}^{n+1=} = 0, \quad m = 1, ..., M, \tag{4.22}$$

où les flux numériques $\{\rho S_m^X u\}_{j+1/2}^{n+1=}$ trouvent la définition suivante :

$$\{\rho S_m^X u\}_{j+1/2}^{n+1=} = \{\rho u\}_{j+1/2}^n \times \begin{cases} (S_m^X)_j^{n+1=} & \text{si} \quad \{\rho u\}_{j+1/2}^n > 0, \\ (S_m^X)_{j+1}^{n+1=} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.23}$$

Les flux numériques $\{\rho u\}_{j+1/2}^n$ sont associés à la méthode conservative utilisée pour discrétiser l'équation de conservation de la masse dans (4.20).

D'après (4.22)-(4.23), la mise à jour implicite des grandeurs $\{(S_m^X)_j^{n+1=}\}_{m=1,...,M}$ au cours de ce premier pas consiste en la résolution de M systèmes linéaires dont la matrice globale en j (la même pour tous) possède une structure tridiagonale scalaire. Cette matrice est en fait une M-matrice à diagonale dominante et à coefficients extra-diagonaux négatifs. Elle est donc inversible sous des conditions aux limites *adhoc*, ce qui garantit l'existence et l'unicité des mises à jour implicites ainsi définies.

La positivité des taux de dissipation $\{(F^{(m)})_j^{n+1=}\}_{m=1,...,M}$ à l'issue de ce premier pas est garantie d'après (4.10) puisque les énergies cinétiques turbulentes obtenues sont positives.

Deuxième pas : prise en compte des termes sources $(t^{n+1=} \to t^{n+1-})$

De manière à poursuivre l'évolution en temps de la solution discrète obtenue à l'issue du pas précédent, nous résolvons le problème d'équations différentielles ordinaires suivant, prenant en compte les termes sources du système (4.17) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0, \\ \partial_t \rho u = 0, \\ \partial_t \rho E = 0, \\ \partial_t \rho S^{(m)} = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'_m(s^{(m)}) \rho (F^{(m-1)} - F^{(m)}), \quad m = 1, ..., M, \\ \partial_t \rho S_m^X = \rho \frac{F^{(m-1)}}{k^{(m)}} (C_1^{(m)} - C_0^{(m)}) - \rho \frac{F^{(m)}}{k^{(m)}} (C_2^{(m)} - C_0^{(m)}), \quad m = 1, ..., M. \end{cases} \tag{4.24}$$

La donnée initiale considérée coïncide avec la solution discrète $\mathbf{v}_\lambda^{\mathbf{S}}(x, t^{n+1=})$ obtenue à l'issue du premier pas.
En invoquant l'équivalence des systèmes (4.17) et (4.1) pour les solutions régulières, la prise en compte des termes sources du modèle multi-échelle revient à résoudre le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0, \\ \partial_t \rho u = 0, \\ \partial_t \rho E = 0, \\ \partial_t k^{(m)} = F^{(m-1)} - F^{(m)}, \quad m = 1, ..., M, \\ \partial_t F^{(m)} = C_1^{(m)} F^{(m-1)} \frac{F^{(m)}}{k^{(m)}} - C_2^{(m)} \frac{(F^{(m)})^2}{k^{(m)}}, \quad m = 1, ..., M. \end{cases} \tag{4.25}$$

Nous réécrivons de manière équivalente les $2M$ équations non triviales de (4.25) sous la forme :

$$\partial_t k^{(m)} = \lambda_{m-1} k^{(m-1)} - \lambda_m k^{(m)}, \quad m = 1, ..., M, \tag{4.26}$$

$$\partial_t F^{(m)} = \lambda_m^{(1)} F^{(m-1)} - \lambda_m^{(2)} F^{(m)}, \quad m = 1, ..., M, \tag{4.27}$$

avec

$$\lambda_m = \frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}, \quad \lambda_m^{(1)} = C_1^{(m)} \frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}, \quad \lambda_m^{(2)} = C_2^{(m)} \frac{F^{(m)}}{k^{(m)}}, \quad m = 1, ..., M.$$

Soulignons que l'évolution en temps des énergies cinétiques turbulentes $k^{(m)}$ impose au travers de la conservation de l'énergie totale une évolution en temps de l'énergie interne thermodynamique $p/(\gamma - 1)$. Le système d'EDO (4.25) montre que cette évolution est donnée par

$$\partial_t p = (\gamma - 1) \rho F^{(M)} \geq 0.$$

De manière à préserver la positivité de p, nous proposons un traitement implicite linéarisé des équations considérées après avoir posé, de manière consistante avec (4.25) :

$$\rho_j^{n+1-} = \rho_j^{n+1=}, \quad (\rho u)_j^{n+1-} = (\rho E)_j^{n+1=}, \quad (\rho E)_j^{n+1-} = (\rho E)_j^{n+1=}, \quad j \in Z.$$

L'implicitation proposée fige les échelles de temps $\lambda_m, \lambda_m^{(1)}$, et $\lambda_m^{(2)}$ à la date $t^{n+1=}$. Ainsi, le système d'équations différentielles ordinaires à résoudre peut être génériquement réexprimé par :

$$\partial_t X_m = a_{m-1} X_{m-1} - a_m X_m, \quad m = 1, ..., M, \tag{4.28}$$

$$\partial_t Y_m = a_m^{(1)} Y_{m-1} - a_m^{(2)} Y_m, \quad m = 1, ..., M, \tag{4.29}$$

où les constantes $a_{m-1}, a_m^{(1)}$, et $a_m^{(2)}$ sont supposées connues pour tout $m = 1, ..., M$. Notons que ces constantes sont positives dès que les données initiales $k^{(m)}$ et $F^{(m)}$ le sont. X_m et Y_m représentent respectivement les énergies cinétiques turbulentes $k^{(m)}$ et les taux de dissipation turbulente $F^{(m)}$. Nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 6 *Supposons $X_M(t) \geq 0$ pour tous les temps t considérés. Alors, la pression $p(t)$ reste positive pour ces mêmes temps.*

Démonstration
Tenant compte de la constance en temps de ρ et de ρu, la conservation de l'énergie totale

$$\rho E = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \sum_{m=1}^{M} \rho X_m + \frac{p}{\gamma - 1},$$

conduit à l'EDO suivante :

$$\partial_t p = -(\gamma - 1)\rho \partial_t (\sum_{m=1}^{M} X_m).$$

En vertu de l'implicitation proposée, les X_m sont solutions exactes de (4.28) de sorte que :

$$\partial_t (\sum_{m=1}^{M} X_m) = a_0 X_0 - a_M X_M,$$

où par construction $a_0 = 0$ puisque $\lambda_0 = 0$ (rappelons que par convention $F^{(0)} = 0$). Nous en déduisons donc que $p(t)$ est solution exacte de l'EDO suivante :

$$\partial_t p = (\gamma - 1)\rho a_M X_M.$$

La conclusion suit du fait que l'échelle de temps $a_M = \lambda_M$ a été figée à l'instant $t^{n+1=}$ sur une valeur positive, la densité l'étant par construction car constante et X_M l'étant par hypothèse.

Nous avons ensuite :

Théorème 10
Soient $a_m, 1 \leq m \leq M$, M constantes positives supposées connues.
Le système d'EDO

$$\begin{array}{rcl} \partial_t X_m & = & a_{m-1} X_{m-1} - a_m X_m, \quad 1 \leq m \leq M, \quad a_0 = 0, \\ X_m(t = 0) & = & X_m(0) \geq 0, \end{array} \tag{4.30}$$

s'intègre explicitement. Les solutions $X_m(t)$ sont positives pour tout temps t et vérifient la relation de récurrence

$$X_m(t) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_l^m \exp(-a_l t), \quad 1 \leq m \leq M,$$

avec, pour $2 \leq m \leq M$,

$$\alpha_l^m = \begin{cases} \frac{a_{m-1}}{a_m - a_l} \alpha_l^{m-1} & \textit{pour} \quad 1 \leq l \leq m-1, \\ \\ X_m(0) - \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_l^m & \textit{pour} \quad l = m, \end{cases}$$

et pour $m = 1$,

$$\alpha_1^1 = X_1(0).$$

En particulier, leur évaluation ne nécessite, à chaque instant, que le calcul de M exponentielles.

Démonstration
L'équation du système (4.30) pour $m = 1$ s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t X_1 &= -a_1 X_1, \\ X_1(t=0) &= X_1(0) \geq 0. \end{aligned}$$

Par intégration directe, nous obtenons

$$X_1(t) = \alpha_1^1 \exp(-a_1 t), \quad \alpha_1^1 = X_1(0) \geq 0.$$

En particulier X_1 est à valeurs positives pour tout temps $t \geq 0$.
Supposons que

$$X_{m-1}(t) \geq 0, \quad \forall \quad t \geq 0. \tag{4.31}$$

La multiplication de l'équation générale du système (4.30) par $\exp(a_m t)$ implique

$$\partial_t \{X_m \exp(a_m t)\} = a_{m-1} X_{m-1} \exp(a_m t).$$

Après intégration, il vient

$$X_m(t) = X_m(0) \exp(-a_m t) + a_{m-1} \exp(-a_m t) \int_0^t X_{m-1}(s) \exp(a_m s) ds.$$

Ainsi, puisque toutes les données initiales sont supposées positives, l'hypothèse de récurrence (4.31) implique $X_m(t) \geq 0, \quad \forall \quad t \geq 0$.
Ceci conclut la démonstration du théorème.

De la même manière, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 11
Soient $a_m^{(1)}, a_m^{(2)}$, $1 \leq m \leq M$, $2M$ constantes positives (avec $a_1^{(1)} = 0$) supposées connues.
Le système d'EDO

$$\begin{aligned} \partial_t Y_m &= a_m^{(1)} Y_{m-1} - a_m^{(2)} Y_m, \quad 1 \leq m \leq M, \\ Y_m(t=0) &= Y_m(0) \geq 0, \end{aligned} \tag{4.32}$$

s'intègre explicitement. Les solutions $Y_m(t)$ sont positives pour tout temps t et vérifient la relation de récurrence

$$Y_m(t) = \sum_{l=1}^{m} \beta_l^m \exp(-a_l^{(2)} t), \quad 1 \leq m \leq M,$$

avec, pour $2 \leq m \leq M$,

$$\beta_l^m = \begin{cases} \dfrac{a_m^{(1)}}{a_m^{(2)} - a_l^{(2)}} \beta_l^{m-1} & \text{pour} \quad 1 \leq l \leq m-1, \\ \\ Y_m(0) - \displaystyle\sum_{l=1}^{m-1} \beta_l^m & \text{pour} \quad l = m, \end{cases}$$

et pour $m = 1$,

$$\alpha_1^1 = Y_1(0).$$

En particulier, leur évaluation ne nécessite, à chaque pas de temps, que le calcul de M exponentielles.

En reprenant les notations de ces deux théorèmes, nous posons tout naturellement et pour tout $j \in Z$:

$$(k^{(m)})_j^{n+1-} = \sum_{l=1}^{m} (\alpha_l^m)_j \exp(-(a_l)_j \Delta t), \quad m = 1, ..., M,$$

$$(F^{(m)})_j^{n+1-} = \sum_{l=1}^{m} (\beta_l^m)_j \exp(-(a_l^{(2)})_j \Delta t), \quad m = 1, ..., M,$$

avec pour tout $j \in Z$:

$$(a_m)_j = \frac{(F^{(m)})_j^{n+1=}}{(k^{(m)})_j^{n+1=}}, \quad m = 1, ..., M, \quad (a_0)_j = 0,$$

$$(a_m^{(1)})_j = C_1^{(m)} \frac{(F^{(m)})_j^{n+1=}}{(k^{(m)})_j^{n+1=}}, \quad (a_m^{(2)})_j = C_2^{(m)} \frac{(F^{(m)})_j^{n+1=}}{(k^{(m)})_j^{n+1=}}, \quad m = 1, ..., M.$$

L'implicitation proposée assure donc la positivité des énergies cinétiques turbulentes et des taux de dissipation turbulente, en vertu des deux précédents théorèmes. L'intégration explicite résultante favorise son implémentation tout en réduisant son coût calcul.

Troisième pas : prise en compte des termes de conductivité thermique ($t^{n+1-} \to t^{n+1}$)
Nous achevons la stratégie de splitting d'opérateurs proposée par la prise en compte des termes de conductivité thermique. Il s'agit de résoudre le problème de Cauchy attendu suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0, \\ \partial_t \rho u = 0, \\ \partial_t \rho E = \partial_x(\kappa \partial_x T) + \sum_{m=1}^{M} \partial_x(\kappa_m \partial_x k^{(m)}), \\ \partial_t \rho S^{(m)} = \frac{\gamma_\tau - 1}{\rho^{\gamma_\tau - 1}} h'_m(s^{(m)}) \partial_x(\kappa_m \partial_x k^{(m)}), \quad m = 1, ..., M, \\ \partial_t \rho S_m^X = \frac{1}{F^{(m)}} \partial_x(\tilde{\kappa}_m \partial_x F^{(m)}) - \frac{C_0^{(m)}}{k^{(m)}} \partial_x(\kappa_m \partial_x k^{(m)}), \quad m = 1, ..., M, \end{cases} \tag{4.33}$$

pour la donnée initiale obtenue en considérant la solution discrète telle que définie à l'issue du second pas. Nous prenons à nouveau avantage de l'invariance en temps de la densité pour considérer le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0, \\ \partial_t \rho u = 0, \\ \frac{\rho}{\gamma - 1} \partial_t T = \partial_x(\kappa \partial_x T), \\ \rho \partial_t k^{(m)} = \partial_x(\kappa_m \partial_x k^{(m)}), \quad m = 1, ..., M, \\ \rho \partial_t F^{(m)} = \partial_x(\tilde{\kappa}_m \partial_x F^{(m)}), \quad m = 1, ..., M. \end{cases} \tag{4.34}$$

Nous proposons une intégration en temps implicite de ce système, en adoptant la discrétisation suivante :

$$\begin{cases} \rho_j^{n+1} = \rho_j^{n+1-}, \\ (\rho u)_j^{n+1} = (\rho u)_j^{n+1-}, \\ (\frac{\rho}{\gamma-1})_j^{n+1} T_j^{n+1} = (\frac{\rho}{\gamma-1})_j^{n+1-} T_j^{n+1-} + \Delta t (\overline{\partial_x(\kappa \partial_x T)})_j^{n+1}, \\ \rho_j^{n+1} (k^{(m)})_j^{n+1} = \rho_j^{n+1-} (k^{(m)})_j^{n+1-} + \Delta t (\overline{\partial_x(\kappa_m \partial_x k^{(m)})})_j^{n+1}, \\ \rho_j^{n+1} (F^{(m)})_j^{n+1} = \rho_j^{n+1-} (F^{(m)})_j^{n+1-} + \Delta t (\overline{\partial_x(\tilde{\kappa}_m \partial_x F^{(m)})})_j^{n+1}, \end{cases} \tag{4.35}$$

où les opérateurs aux différences finies trouvent les expressions consistantes suivantes (voir [10] dans le cas $M = 1$):

$$\begin{cases} (\overline{\partial_x(\kappa \partial_x T)})_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x^2} \times \\ (\kappa_{j+1/2}^{n+1-}(A^n T_{j+1} - A^n T_j) - \kappa_{j-1/2}^{n+1-}(A^n T_j - A^n T_{j-1})), \\ (\overline{\partial_x(\kappa_m \partial_x k^{(m)})})_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x^2} \times \\ ((\kappa_m)_{j+1/2}^{n+1-}(A^n (k^{(m)})_{j+1} - A^n (k^{(m)})_j) - (\kappa_m)_{j-1/2}^{n+1-}(A^n (k^{(m)})_j - A^n (k^{(m)})_{j-1})), \\ (\overline{\partial_x(\tilde{\kappa}_m \partial_x F^{(m)})})_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x^2} \times \\ ((\tilde{\kappa}_m)_{j+1/2}^{n+1-}(A^n (F^{(m)})_{j+1} - A^n (F^{(m)})_j) - (\tilde{\kappa}_m)_{j-1/2}^{n+1-}(A^n (F^{(m)})_j - A^n (F^{(m)})_{j-1})), \end{cases} \tag{4.36}$$

avec l'opérateur A^n défini par :

$$A^n X = \frac{X^{n+1-} + X^{n+1}}{2}.$$

Dans la pratique, il s'agit de résoudre $(2M+1)$ problèmes symétriques définis positifs et découplés portant respectivement sur les variables T, $k^{(m)}$ et $F^{(m)}$. Les matrices correspondantes sont tridiagonales et de type M-matrice à diagonale dominante (sous des conditions aux limites *adhoc*). Les inverses de ces matrices existent donc, ce qui garantit l'existence et l'unicité des mises à jour implicites. Ces inverses possèdent aussi la propriété de ne posséder que des coefficients tous positifs ou nuls. Nous renvoyons le lecteur à [95] pour plus de détails sur ces notions. On montre comme dans [10] que les mises à jour proposées ci-dessus garantissent la positivité des grandeurs réactualisées T, $k^{(m)}$ et $F^{(m)}$, ce qui constitue une propriété de stabilité appréciable. Nous renvoyons le lecteur à [10] pour plus de détails sur le bien fondé (théorique et numérique) d'une telle implicitation dans le cas $M = 1$ (correspondant au modèle $k - \varepsilon$).