Chapitre 1

Méthode de Relaxation pour les équations d'Euler multi-pression

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la description d'une méthode de type volumes finis, explicite en temps, pour l'approximation numérique des solutions faibles du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x\rho u = 0, \\ \partial_t\rho u + \partial_x(\rho u^2 + \sum_{i=1}^{N} p_i) = 0, \\ \partial_t\rho E + \partial_x(\rho E + \sum_{i=1}^{N} p_i)u = 0, \\ \partial_t\rho S_i + \partial_x\rho S_i u = 0, \quad i = 1, ..., N-1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Nous considérons ici N lois de pressions générales répondant aux lois d'état complètes suivantes. Les pressions partielles $\{p_i\}_{i=1,...,N}$ dérivent d'énergies internes $(\tau, S_i) \to \varepsilon_i(\tau, S_i) > 0$ supposées régulières et strictement convexes pour tout $i = 1, ..., N$, et telles que

$$-T_i(\tau, S_i) = \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial S_i}(\tau, S_i), \quad -p_i(\tau, S_i) = \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\tau}(\tau, S_i), \quad i = 1, ..., N. \tag{1.2}$$

De manière classique, les températures T_i et les pressions partielles p_i sont supposées positives. Ainsi, les applications $(\tau, \varepsilon_i) \to S_i(\tau, \varepsilon_i)$ sont strictement convexes pour tout $i = 1, ..., N$, tout comme, avec un léger abus de notations, les applications $(\rho, \rho\varepsilon_i) \to \rho S_i(\rho, \rho\varepsilon_i) = \rho S_i(1/\rho, \rho\varepsilon_i/\rho)$ et $(\rho, \rho S_i) \to \rho\varepsilon_i(\rho, \rho S_i) = \rho\varepsilon_i(1/\rho, \rho S_i/\rho)$ (voir [57] pour les détails). Remarquons également que par convexité des énergies internes ε_i pour tout $i = 1, ..., N$, nous avons $\partial p_i/\partial\tau < 0$.
La loi de fermeture sur l'énergie totale est donnée par :

$$\rho E = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \sum_{i=1}^{N} \rho\varepsilon_i(1/\rho, \rho S_i/\rho). \tag{1.3}$$

Pour simplifier les démonstrations qui vont suivre, nous adoptons les hypothèses techniques suivantes : les pressions partielles $\{p_i\}_{i=1,...,N}$ sont telles que pour tout $i = 1, ..., N$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p_i}{\partial \tau^2}(\tau, S_i) > 0, \\ \\ \lim_{\tau \to 0} p_i(\tau, S_i) = +\infty, \quad \lim_{\tau \to +\infty} p_i(\tau, S_i) = 0. \end{cases}$$

Elles satisfont donc aux hypothèses de Weyl, hypothèses classiques dans le cadre usuel $N = 1$.
Le système hyperbolique (1.1) est naturellement complété par l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \rho S_N + \partial_x \rho S_N u \leq 0, \tag{1.4}$$

où l'application ρS_N des inconnues est strictement convexe. Avec des notations claires, nous introduisons la forme condensée suivante pour (1.1)-(1.4) :

$$\begin{aligned} &\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = 0, \\ &\partial_t \rho S_N(\mathbf{u}) + \partial_x \rho S_N(\mathbf{u}) u \leq 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

L'espace des états associé à (1.1) est donné par :

$$\Theta = \{\mathbf{u} \in I\!R^{N+2}, \rho > 0, \{\rho S_i > 0\}_{i=1,...,N-1}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \sum_{i=1}^{N-1} \rho \varepsilon_i(1/\rho, S_i) > 0\}. \tag{1.6}$$

Ainsi que précisé dans l'introduction générale de la seconde partie du mémoire, notre objectif est d'approcher les solutions faibles du système (1.5) par celles d'un système de Relaxation autorisant un découplage naturel entre le bloc hydrodynamique gouvernant $\rho, \rho u, \rho E$ et les $(N-1)$ équations de transport relatives aux entropies. Dans les faits, il nous est apparu plus aisé d'introduire un tel système de Relaxation pour un système compagnon à (1.5), obtenu en échangeant le rôle de l'entropie de Lax ρS_N et l'énergie totale (voir sections 1.2 et 1.3). Nous serons alors en mesure de proposer une méthode de volumes finis pour (1.5), où le découplage escompté subsiste une fois rétablis les rôles respectifs de l'énergie totale et de l'entropie ρS_N. Nous conclurons l'exposé de la méthode d'approximation en déduisant de l'ensemble de la construction proposée l'existence (à l'aide du théorème des fonctions implicites) d'un modèle de Relaxation directement consistant avec le système (1.5), et conduisant à un schéma strictement identique.

1.2 Un système compagnon

Nous proposons d'approcher les solutions faibles du système (1.1) par l'intermédiaire de l'approximation des solutions faibles du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + \sum_{i=1}^{N} p_i) = 0, \\ \partial_t \rho S_i + \partial_x \rho S_i u = 0, \quad i = 1, ..., N, \end{cases} \tag{1.7}$$

complété par l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + \sum_{i=1}^{N} p_i) u \leq 0. \tag{1.8}$$

Remarquons en effet que l'application $\mathbf{U} \to \rho E(\mathbf{U})$ est strictement convexe en conséquence des hypothèses thermodynamiques précédentes.
Contrairement à (1.5), ce système privilégie la conservation de l'entropie ρS_N au détriment de l'énergie totale ρE. Ainsi, ρE sera considérée comme une fonction des inconnues du système et le couple $(\rho E, (\rho E + \sum_{i=1}^N p_i)u)$ jouera le rôle d'un couple d'entropie de Lax du système. Notons que si le système (1.1) et le système compagnon (1.7) possèdent les mêmes solutions régulières, leurs solutions choc respectives sont évidemment différentes. Une technique de correction sera alors nécessaire : proposée dans [32], elle rétablira sans calcul supplémentaire l'énergie totale et l'entropie ρS_N dans leur rôle respectif.
Nous aurons besoin dans la suite des notations supplémentaires suivantes. En posant $\mathbf{U} :=^T (\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\dots,N})$, l'espace des états admissibles du système (1.7) est

$$\Omega = \{\mathbf{U} \in I\!R^{N+2}, \rho > 0, \{\rho S_i > 0\}_{i=1,\dots,N}\}. \tag{1.9}$$

Pour simplifier les notations, nous introduisons la forme condensée suivante pour le système (1.7) :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \tag{1.10}$$

où $\mathbf{F}$ trouve une définition naturelle.

1.3 Un modèle de Relaxation pour le système compagnon

Notre objectif est de proposer une méthode d'approximation des solutions faibles du système (1.10) permettant pour un faible coût d'évaluation de respecter les contraintes mises en avant au début de ce chapitre. Il est connu que les non linéarités du système considéré rendent difficilement conciliables l'ensemble de ces exigences dans le contexte de méthodes classiques (voir [57] pour une revue). Nous nous proposons ici d'étendre à notre problématique une stratégie récente reposant sur l'approximation des solutions concernées par celles d'un autre système, plus grand, mais par construction aux non linéarités moindres. Ce type de système, dit système de Relaxation, est censé restaurer dans la limite d'un paramètre de Relaxation infini, non seulement les équations initiales, mais également la condition d'entropie associée. Cette technique a été motivée par les travaux pionniers de Liu [101], puis ceux de Chen, Levermore et Liu [28] et a été appliquée dans un premier temps par Jin et Xin [74] pour des raisons d'approximation numérique. Dans cette approche, toutes les non linéarités du système initial sont relaxées et une telle démarche conduit à définir une méthode de type Lax-Friedrichs connue pour être trop dissipative dans la pratique. Des travaux plus récents, dévolus aux équations d'Euler (voir par exemple Coquel et al. [32]) ont montré qu'une Relaxation sélective des non linéarités conduit à une méthode de faible coût d'approximation tout en conservant de bonnes propriétés de résolution (capture exacte des contacts stationnaires). Motivée par les travaux de Suliciu [131], cette approche suggère de relaxer uniquement la définition de la loi de pression (voir également Coquel et Perthame [39] pour une Relaxation de l'énergie). Elle donne une interprétation complémentaire des schémas de Desprès [43] dans le cadre Lagrangien (voir également Gallice [51]) et a été depuis également analysée par Bouchut [18] dans un cadre plus général. Elle peut être comprise comme une justification d'une méthode due à Toro [136] indépendamment proposée par Cambier, Veuillot et Viviand [144] dès 1978.

Le principe est ici de proposer un système de Relaxation dont tous les champs sont linéairement dégénérés (résolution immédiate du problème de Riemann) et possédant une entropie de Lax coïncidant avec l'énergie totale dans la limite d'un paramètre de Relaxation infini. On montre que cette entropie vérifie un équivalent du théorème H de la théorie cinétique des gaz. Étendant de manière naturelle l'approche proposée dans [32] au présent contexte des équations d'Euler multi-pression, nous suggérons de relaxer la somme des pressions partielles $p = \sum_{i=1}^{N} p_i$, au profit d'une nouvelle variable Π, assujettie à sa propre loi d'évolution. Le système relaxé obtenu trouve la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t\rho + \partial_x\rho u = 0,\\ \partial_t\rho u + \partial_x(\rho u^2 + \Pi) = 0,\\ \partial_t\rho S_i + \partial_x\rho S_i u = 0, \quad i = 1,...,N,\\ \partial_t\Pi + u\partial_x\Pi + a^2\tau\partial_x u = \lambda(\sum_{i=1}^{N} p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) - \Pi),\end{array}\right. \tag{1.11}$$

où l'on a posé

$$I = \Pi + a^2\tau, \quad \tau = \frac{1}{\rho}.$$

La constante réelle a représente un paramètre du modèle de Relaxation devant satisfaire des conditions de stabilité explicitées ultérieurement (condition de Whitham). L'application

$$\begin{array}{rcl}(I\!\!R_+^\star)^{N+1} & \to & I\!\!R_+^\star\\ (\{S_i\}_{i=1,...,N}, I) & \mapsto & \mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I)\end{array}$$

sera également précisée par la suite, mais soulignons dès à présent qu'elle vérifiera par construction la propriété d'équivalence

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) \Leftrightarrow \mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I) = \tau. \tag{1.12}$$

Nous remarquons formellement que dans la limite du paramètre de Relaxation λ ($\lambda > 0$) infini, limite que nous appelons comme il est d'usage "équilibre", nous retrouvons dans (1.11) le système initial (1.7) puisqu'alors $\Pi = \sum_{i=1}^{N} p_i(\tau, S_i)$. En ce sens, les solutions du système (1.11) réalisent une approximation des solutions du système d'équilibre (1.7).
Le système relaxé (1.11) peut être réécrit sous forme complètement conservative :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t\rho + \partial_x\rho u = 0,\\ \partial_t\rho u + \partial_x(\rho u^2 + \Pi) = 0,\\ \partial_t\rho S_i + \partial_x\rho S_i u = 0, \quad i = 1,...,N,\\ \partial_t\rho I + \partial_x\rho I u = \lambda\rho(\sum_{i=1}^{N} p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) - \Pi).\end{array}\right. \tag{1.13}$$

Cette forme, valable pour les solutions régulières, sera privilégiée dans la suite. En posant $\overline{\mathbf{U}} =^T (\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,...,N}, \rho I)$, l'espace des états admissibles de ce système est

$$\overline{\Omega} = \{\overline{\mathbf{U}} \in I\!\!R^{N+3}, \rho > 0, \{\rho S_i > 0\}_{i=1,...,N}, \rho I > 0\}.$$

Nous introduisons la forme condensée suivante pour l'opérateur du premier ordre extrait de (1.13) :

$$\partial_t\overline{\mathbf{U}} + \partial_x\overline{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{U}}) = 0, \tag{1.14}$$

où $\overline{\mathbf{F}}$ trouve une définition immédiate.

Proposition 1

Supposons $a > 0$. Le système du premier ordre (1.14) est hyperbolique sur $\overline{\Omega}$. Il admet les valeurs propres

$$\lambda_1 = u - a\tau = u - \frac{a}{\rho}, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a\tau = u + \frac{a}{\rho}.$$

La valeur propre λ_2 est de multiplicité $N+1$ et les valeurs propres λ_1 et λ_3 sont d'ordre 1. Ces valeurs propres sont toutes associées à des champs linéairement dégénérés.

Démonstration

La preuve de cet énoncé résulte de calculs simples laissés au lecteur. Notre objectif est ici de vérifier que la propriété de dégénérescence linéaire des champs associés aux valeurs propres $\lambda_i(\overline{\mathbf{U}})$ pour $i = 1$ et $i = 3$ ne vaut que pour des vitesses du son $c = c(\rho, \{S_i\}_{i=1,\ldots,N})$ de la forme $c = a/\rho$ où a est une constante réelle positive (a ne peut pas être nul sous peine de perdre l'existence d'une base de diagonalisation). En privilégiant le système de variables admissibles $(\rho, u, \{S_i\}_{i=1,\ldots,N})$, il suffit de remarquer que dans le cas d'une thermodynamique générale, un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_\epsilon(\overline{\mathbf{U}}) = u + \epsilon c$ (avec $\epsilon = -1$ ou $\epsilon = 1$) est donné par $r_\epsilon(u) = (1, \epsilon c/\rho, \{0\}_{i=1,\ldots,N})$. Dès lors, exiger $\nabla_{\overline{\mathbf{U}}}\lambda_\epsilon(\overline{\mathbf{U}}).r_\epsilon(\overline{\mathbf{U}}) = \epsilon(\partial_\rho c + c/\rho) = 0$ pour tout état $\overline{\mathbf{U}}$ impose la propriété recherchée. Ceci justifie la technique de Relaxation introduite.

En conséquence de la propriété de dégénérescence linéaire de tous les champs, la solution du problème de Riemann du système (1.14) est explicitement connue, comme l'illustre le théorème suivant dont le résultat étend de manière naturelle celui obtenu au titre des équations d'Euler usuelles (voir Coquel et al. [32]).

Théorème 1

Soient $\overline{\mathbf{U}}_L$ et $\overline{\mathbf{U}}_R$ deux états constants de $\overline{\Omega}$.
Supposons que la constante a vérifie la condition

$$\begin{gathered}\lambda_1(\overline{\mathbf{U}}_L) = u_L - a\tau_L < u^\star < \lambda_3(\overline{\mathbf{U}}_R) = u_R + a\tau_R, \\ u^\star = \tfrac{1}{2}(u_L + u_R) - \tfrac{1}{2a}(\Pi_R - \Pi_L), \\ \Pi_L = I_L - a^2\tau_L, \quad \Pi_R = I_R - a^2\tau_R.\end{gathered} \tag{1.15}$$

Alors, la solution faible auto-semblable $\overline{\mathbf{U}}(x,t;\overline{\mathbf{U}}_L,\overline{\mathbf{U}}_R) := \overline{\mathbf{U}}(x/t;\overline{\mathbf{U}}_L,\overline{\mathbf{U}}_R)$ du système (1.14) pour la donnée initiale

$$\overline{\mathbf{U}}_0(x) = \begin{cases} \overline{\mathbf{U}}_L & si \quad x < 0, \\ \overline{\mathbf{U}}_R & si \quad x > 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

est constituée de quatre états constants :

$$\overline{\mathbf{U}}(x/t;\overline{\mathbf{U}}_L,\overline{\mathbf{U}}_R) = \begin{cases} \overline{\mathbf{U}}_L & si \quad \frac{x}{t} < \lambda_1(\overline{\mathbf{U}}_L), \\ \overline{\mathbf{U}}_1 & si \quad \lambda_1(\overline{\mathbf{U}}_L) < \frac{x}{t} < \lambda_2(\overline{\mathbf{U}}_1), \\ \overline{\mathbf{U}}_2 & si \quad \lambda_2(\overline{\mathbf{U}}_2) < \frac{x}{t} < \lambda_3(\overline{\mathbf{U}}_R), \\ \overline{\mathbf{U}}_R & si \quad \lambda_3(\overline{\mathbf{U}}_R) < \frac{x}{t}, \end{cases}$$

avec

$$\lambda_2(\overline{\mathbf{U}}_1) = \lambda_2(\overline{\mathbf{U}}_2) = u^\star.$$

En posant

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_2 = u^\star,\\
&\rho_1 = a/(u_2 - \lambda_1(\overline{\mathbf{U}}_L)),\\
&\rho_2 = a/(\lambda_3(\overline{\mathbf{U}}_R) - u_2),\\
&\Pi^\star = \Pi_1 = \Pi_2 = \tfrac{1}{2}(\Pi_L + \Pi_R) - \tfrac{a}{2}(u_R - u_L),\\
&(S_i)_1 = (S_i)_L, \quad 1 \le i \le N,\\
&(S_i)_2 = (S_i)_R, \quad 1 \le i \le N,\\
&I_1 = \Pi_1 + \tfrac{a^2}{\rho_1} = I_L,\\
&I_2 = \Pi_2 + \tfrac{a^2}{\rho_2} = I_R,
\end{aligned}$$

les états constants sont caractérisés de la façon suivante :

$$\overline{\mathbf{U}}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ (\rho u)_1 \\ (\rho S_1)_1 \\ \vdots \\ (\rho S_N)_1 \\ (\rho I)_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{U}}_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ (\rho u)_2 \\ (\rho S_1)_2 \\ \vdots \\ (\rho S_N)_2 \\ (\rho I)_2 \end{pmatrix}.$$

De plus, $\overline{\mathbf{U}}_1$ *et* $\overline{\mathbf{U}}_2$ *sont dans* $\overline{\Omega}$.

Démonstration

Les champs étant tous linéairement dégénérés, la solution du problème de Riemann considéré est systématiquement composée de discontinuités se déplaçant à la vitesse caractéristique du champ concerné et séparant au plus quatre états constants : $\overline{\mathbf{U}}_L$, $\overline{\mathbf{U}}_1$, $\overline{\mathbf{U}}_2$, $\overline{\mathbf{U}}_R$. L'examen des relations de saut suffit à conclure en remarquant que la condition (1.15) portant sur la constante a assure que les trois ondes composant la solution du problème de Riemann sont toujours ordonnées selon le sens naturel :

$$\sigma_1 = \lambda_1(\overline{\mathbf{U}}_L) < \sigma_2 = u^\star < \sigma_3 = \lambda_3(\overline{\mathbf{U}}_R).$$

En conséquence des formules définissant les densités intermédiaires ρ_1 et ρ_2, ces dernières sont par construction positives dès que a vérifie (1.15).

Nous verrons plus tard que par construction le modèle de Relaxation préserve les discontinuités de contact stationnaires du modèle d'équilibre et ce quelque soit le choix de a. Toutefois, il est connu d'après les travaux de Liu [101] et de Chen, Levermore et Liu [28] (voir également Bouchut [18]), que a, paramètre du modèle de Relaxation, doit être astreint à vérifier certaines conditions indispensables à la stabilité de la procédure de Relaxation considérée dans le régime asymptotique $\lambda = +\infty$. Ces conditions, dites conditions sous-caractéristiques ou d'entrelacements, expriment dans notre contexte que la vitesse du son a/ρ du système relaxé doit être nécessairement plus grande que la vitesse du son c associée au modèle d'équilibre. Nous retrouverons cette condition dans le paragraphe suivant dévolu à l'analyse de la consistance de la condition d'entropie avec le procédé de Relaxation proposé.

Pour conclure cette section, nous proposons de décrire brièvement la procédure numérique que nous développerons par la suite. Cette procédure est classique dans le contexte des méthodes de Relaxation (voir par exemple Jin et Xin [74]). La solution du problème de Riemann de l'opérateur du premier ordre extrait du système relaxé étant explicitement connue, le schéma numérique est basé sur la méthode de Godunov. Supposons donc connue à l'instant t^n une solution discrète

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x,t^n) = {}^T(\rho_{\Delta x}(x,t^n), (\rho u)_{\Delta x}(x,t^n), \{(\rho S_i)_{\Delta x}(x,t^n)\}_{i=1,\ldots N}), \tag{1.17}$$

de (1.7). De manière classique, nous supposons cette solution constante sur chaque intervalle $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$ avec $x_{j+1/2} = (j+1/2)\Delta x$. Δx représente le pas de discrétisation en espace, et j parcourt l'ensemble des entiers relatifs.
L'évolution en temps de cette approximation jusqu'à la date t^{n+1} se fait alors en deux étapes :

Premier pas : Evolution en temps $(t^n \to t^{n+1-})$
Lors de ce premier pas, nous résolvons pour des temps suffisamment petits le système (1.14) avec la donnée initiale à l'équilibre suivante, déduite de $\mathbf{U}_{\Delta x}(x,t^n)$:

$$\overline{\mathbf{U}}_{\Delta x}(x,t^n) = {}^T(\rho_{\Delta x}(x,t^n), (\rho u)_{\Delta x}(x,t^n), \{(\rho S_i)_{\Delta x}(x,t^n)\}_{i=1,\ldots N}, (\rho I)_{\Delta x}(x,t^n)), \tag{1.18}$$

avec

$$(\rho I)_{\Delta x}(x,t^n) = \rho_{\Delta x}(x,t^n)\sum_{i=1}^{N}(p_i)_{\Delta x}(x,t^n) + a^2.$$

Le choix de a sera mené à chaque pas de temps, conformément à une stratégie décrite ultérieurement. Sous la condition CFL classique

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\max_{i=1,3}|\lambda_i(\overline{\mathbf{U}})| \le \frac{1}{2}, \tag{1.19}$$

et lorsque la valeur de a est choisie constante en espace, la solution exacte du problème de Cauchy considéré est constituée de la juxtaposition des solutions des problèmes de Riemann posés à chaque interface $x_{j+1/2}$. Ces problèmes de Riemann sont explicitement résolus d'après le précédent théorème. Nous utilisons donc dans la pratique une formulation à trois points de type Godunov pour obtenir par projection L^2 une solution notée $\overline{\mathbf{U}}_{\Delta x}(x,t^{n+1-})$, constante par morceaux sur chaque intervalle $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$, $j \in Z$. Cette solution réactualisée n'a aucune raison d'appartenir à la variété d'équilibre, ce qui justifie l'introduction du second pas.

Deuxième pas : Relaxation $(t^{n+1-} \to t^{n+1})$
Ce deuxième pas consiste en une projection de la solution $\overline{\mathbf{U}}_{\Delta x}(x,t^{n+1-})$, obtenue à l'issue du pas précédent, sur la variété d'équilibre $\lambda = +\infty$. Plus précisément, nous définissons

$$\overline{\mathbf{U}}_{\Delta x}(x,t^{n+1}) =$$
$${}^T(\rho_{\Delta x}(x,t^{n+1}), (\rho u)_{\Delta x}(x,t^{n+1}), \{(\rho S_i)_{\Delta x}(x,t^{n+1})\}_{i=1,\ldots N}, (\rho I)_{\Delta x}(x,t^{n+1})), \tag{1.20}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\rho_{\Delta x}(x,t^{n+1}) = \rho_{\Delta x}(x,t^{n+1-}),\\
&(\rho u)_{\Delta x}(x,t^{n+1}) = (\rho u)_{\Delta x}(x,t^{n+1-}),\\
&(\rho S_i)_{\Delta x}(x,t^{n+1}) = (\rho S_i)_{\Delta x}(x,t^{n+1-}), \quad i = 1,\ldots,N,
\end{aligned}$$

et

$$(\rho I)_{\Delta x}(x,t^{n+1}) = \rho_{\Delta x}(x,t^{n+1-}) \sum_{i=1}^N (p_i(\tau,S_i))_{\Delta x}(x,t^{n+1-}) + a^2.$$

Ces formules sont équivalentes à résoudre le système d'équations différentielles ordinaires suivant pour $\lambda \to +\infty$,

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \rho = 0, \\ \partial_t \rho u = 0, \\ \partial_t \rho S_i = 0, \quad i = 1,...,N, \\ \partial_t \rho I = \lambda \rho (\sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) - \Pi), \end{array}\right. \tag{1.21}$$

avec comme donnée initiale la solution $\overline{\mathbf{U}}_{\Delta x}(x,t^{n+1-})$.
Pour achever la description de l'algorithme, nous posons :

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x,t^{n+1}) = ^T (\rho_{\Delta x}(x,t^{n+1}), (\rho u)_{\Delta x}(x,t^{n+1}), \{(\rho S_i)_{\Delta x}(x,t^{n+1})\}_{i=1,...N}). \tag{1.22}$$

Cet algorithme peut donc être compris comme une stratégie de splitting d'opérateurs appliquée au système (1.13), en considérant dans un premier pas les phénomènes convectifs puis dans un second pas le terme source de Relaxation dans la limite $\lambda = +\infty$.

1.4 Entropie de Lax et premières propriétés

En vue de justifier rigoureusement le bien-fondé de l'algorithme décrit ci-dessus, notre objectif est maintenant de construire un couple d'entropie de Lax $(\rho\Sigma, \rho\Sigma u + \Pi u)$ pour le système relaxé (1.14), coïncidant avec le couple d'entropie de Lax $(\rho E, \rho E u + \sum_{i=1}^N p_i u)$ du système d'équilibre (1.7) dans le régime d'un paramètre de Relaxation infini. De manière à proposer un relèvement du couple d'entropie de Lax à l'équilibre, il convient dans un premier temps de définir le relèvement $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I)$ du covolume τ intervenant dans la condition d'équilibre (1.12). Son obtention repose sur le résultat suivant.

Lemme 1
Pour tous $\{S_i > 0\}_{i=1,...,N}$ et $I > 0$ fixés, l'application f définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ \tau & \mapsto & f(\tau) = \sum_{i=1}^N p_i(\tau, S_i) + a^2\tau - I, \end{array} \tag{1.23}$$

est convexe en τ. De plus,

$$\lim_{\tau \to +\infty} f(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \to 0} f(\tau) = +\infty.$$

Démonstration
Chacune des pressions p_i étant par hypothèse convexe par rapport à sa première variable, la convexité de l'application f est immédiate. Par ailleurs, la positivité des pressions implique l'inégalité $f(\tau) \geq a^2\tau - I$. Ainsi, $\lim_{\tau\to+\infty} f(\tau) = +\infty$. La limite en 0 est quant à elle déduite de l'hypothèse asymptotique $\lim_{\tau\to0} p_i(\tau, S_i) = +\infty$ pour tout $i = 1,...,N$.

En conséquence de ce résultat, pour tous $\{S_i > 0\}_{i=1,\dots,N}$ et $I > 0$ fixés, l'application f définie par (1.23) s'annule au plus deux fois sur $\mathbb{R}_+^\star$. Par construction, nous serons dans la suite systématiquement en présence de deux racines distinctes. Par définition, nous distinguerons la plus grande de ces racines en la notant $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I)$. Elle vérifie :

$$\begin{cases} f(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I)) = 0, \quad \mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) > 0, \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial \tau}(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I), S_i) + a^2 > 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Il importe de remarquer que lorsque la variable I est prise à l'équilibre, c'est-à-dire lorsque $I = \sum_{i=1}^N p_i(\tau, S_i) + a^2\tau$, et que la constante a est choisie suffisamment grande de sorte à satisfaire l'inégalité suivante (dite condition de Whitham) :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial \tau}(\tau, S_i) + a^2 > 0,$$

nous avons par définition $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) = \tau$. La condition de Whitham exprime la condition d'entrelacement sur les valeurs propres rapportée dans la section précédente. Munis de cette nouvelle définition, nous considérons l'application

$$(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) \mapsto \Sigma(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I),$$

en posant

$$\Sigma(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) = \frac{1}{2}u^2 + \theta(\tau, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I), \tag{1.25}$$

$$\theta(\tau, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) = \frac{\Pi^2}{2a^2} + \phi(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I), \quad \Pi = I - a^2\tau, \tag{1.26}$$

et

$$\begin{gathered} \phi(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) = \\ \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I), S_i) - \frac{(\sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I), S_i))^2}{2a^2}. \end{gathered} \tag{1.27}$$

Avec un léger abus de notation, nous définissons également l'application

$$(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\dots,N}, \rho I) \mapsto \rho\Sigma(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\dots,N}, \rho I),$$

en posant

$$\rho\Sigma(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\dots,N}, \rho I) = \rho\Sigma(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I), \quad \tau = \frac{1}{\rho}. \tag{1.28}$$

Remarquons que dès que $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) = \tau$ (*i.e.* lorsque I est à l'équilibre) et lorsque a est choisi suffisamment grand (voir ci-dessus), il est clair que

$$\rho\Sigma(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\dots,N}, \rho I) = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \sum_{i=1}^N \rho\varepsilon_i(\tau, S_i) = \rho E.$$

A l'équilibre, l'énergie relaxée $\rho\Sigma$ coïncide donc avec l'énergie totale ρE.
Le résultat suivant exprime le fait que cette énergie relaxée est bien compatible au

sens de la théorie proposée par Chen, Levermore et Liu [28] avec la procédure de Relaxation proposée.

Théorème 2

(i) *Les solutions régulières du système (1.14) (i.e. lorsque $\lambda = 0$) vérifient sans condition supplémentaire la loi de conservation suivante sur $\rho\Sigma$:*

$$\partial_t \rho\Sigma + \partial_x(\rho\Sigma + \Pi)u = 0. \tag{1.29}$$

(ii) *Les solutions régulières du système (1.13) (i.e. avec $\lambda > 0$) vérifient sans condition supplémentaire la loi d'évolution suivante sur $\rho\Sigma$:*

$$\partial_t \rho\Sigma + \partial_x(\rho\Sigma + \Pi)u = -\frac{\lambda}{a^2}\rho(\sum_{i=1}^{N} p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I), S_i) - \Pi)^2 \leq 0. \tag{1.30}$$

Démonstration

La démonstration de ce théorème s'obtient en manipulant les équations des différents systèmes considérés.

Dans un premier temps, les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement conduisent à

$$\partial_t u + u\partial_x u + \tau\partial_x \Pi = 0, \quad \tau = \frac{1}{\rho}.$$

Une multiplication par u implique

$$\partial_t \frac{u^2}{2} + u\partial_x \frac{u^2}{2} + \tau u \partial_x \Pi = 0,$$

équivalent en vertu de la conservation de la masse à :

$$\partial_t \rho \frac{u^2}{2} + \partial_x \rho \frac{u^3}{2} + u\partial_x \Pi = 0. \tag{1.31}$$

D'autre part, les lois de conservation de la masse et d'évolution de la variable I du système (1.13) conduisent successivement à

$$\partial_t \Pi + u\partial_x \Pi + a^2\tau\partial_x u = \lambda(\sum_{i=1}^{N} p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I), S_i) - \Pi),$$

et

$$\partial_t \rho \frac{\Pi^2}{2a^2} + \partial_x \rho u \frac{\Pi^2}{2a^2} + \Pi\partial_x u = \lambda\rho\frac{\Pi}{a^2}(\sum_{i=1}^{N} p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I), S_i) - \Pi). \tag{1.32}$$

Enfin, il est clair que pour toute fonction $\phi(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I)$ régulière, nous avons

$$\partial_t \rho\phi(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I) + \partial_x \rho\phi(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I)u =$$

$$\lambda\rho\frac{\partial\phi}{\partial I}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I)(\sum_{i=1}^{N} p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I), S_i) - \Pi), \tag{1.33}$$

d'après la validité des équations

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho S_i + \partial_x \rho S_i u = 0, \quad i = 1, ..., N, \\ \partial_t \rho I + \partial_x \rho I u = \lambda \rho (\sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) - \Pi). \end{cases}$$

L'addition des équations (1.31)-(1.32)-(1.33) permet d'écrire

$$\partial_t \rho \Sigma + \partial_x (\rho \Sigma + \Pi) u =$$

$$\lambda \rho (\sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) - \Pi) \times (\frac{\partial \phi}{\partial I}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I) + \frac{\Pi}{a^2}).$$

Afin de préciser le second membre de cette équation, remarquons que par définition de $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I)$, nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial \tau}(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) + a^2}. \tag{1.34}$$

Par dérivation de (1.27), nous obtenons

$$\frac{\partial \phi}{\partial I} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I} \times (\sum_{i=1}^N \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \tau}(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) -$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) \times \sum_{i=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial \tau}(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i)}{a^2}),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \phi}{\partial I} = -\frac{\sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i)}{a^2} \times$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I} \times (\sum_{i=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial \tau}(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) + a^2),$$

puisque par définition,

$$p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) = -\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \tau}(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i).$$

D'après (1.34), nous obtenons :

$$\frac{\partial \phi}{\partial I} = -\frac{\sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i)}{a^2}, \tag{1.35}$$

de telle sorte que :

$$\partial_t \rho \Sigma + \partial_x (\rho \Sigma + \Pi) u = -\frac{\lambda}{a^2} \rho (\sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,...,N}, I), S_i) - \Pi)^2.$$

Un raisonnement identique en posant $\lambda = 0$ permet d'obtenir pour le système (1.14)

$$\partial_t \rho \Sigma + \partial_x (\rho \Sigma + \Pi) u = 0.$$

Lemme 2
L'application Σ définie par (1.25) est strictement convexe en I.

Démonstration
Par définition, nous avons

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I} = \frac{\partial \theta}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I}(\frac{\Pi^2}{2a^2} + \phi(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I)),$$

avec rappelons le $\Pi = I - a^2\tau$. Ainsi, (1.35) entraîne

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I} = \frac{I - a^2\tau}{a^2} - \frac{\sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I), S_i)}{a^2},$$

et, par définitions de Π et $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I)$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial I} = \frac{\Pi - \sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I), S_i)}{a^2} = \mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) - \tau.$$

Nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I^2} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial I}.$$

D'après (1.34), l'application Σ est donc strictement convexe en I en vertu de (1.24).

Corollaire 1
L'application $\rho\Sigma$ définie par (1.28) est strictement convexe en ρI.

Démonstration
D'après (1.28), il est clair que

$$\frac{\partial \rho\Sigma}{\partial \rho I} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I}, \quad \frac{\partial^2 \rho\Sigma}{\partial (\rho I)^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I^2}.$$

L'application $\rho\Sigma$ est de ce fait strictement convexe en ρI en vertu du lemme précédent et par positivité de ρ.

De manière plus précise, nous énonçons les deux résultats suivants.
Théorème 3
L'application Σ définie par (1.25)-(1.26)-(1.27) est strictement convexe.

Corollaire 2
L'application $\rho\Sigma$ définie par (1.28) est strictement convexe.

Ces résultats n'étant pas indispensables pour la suite de nos propos, nous omettons volontairement leurs démonstrations. Nous sommes néammoins en mesure d'affirmer que par définition, le couple $(\rho\Sigma, \rho\Sigma u + \Pi u)$ est un couple d'entropie de Lax pour le système relaxé (1.14) puisque la loi de conservation (1.29) est satisfaite. De ce fait, il est important de souligner que les champs du système (1.14) étant linéairement dégénérés, les solutions faibles de ce système vérifient sans hypothèse supplémentaire la loi de conservation (1.29) sur $\rho\Sigma$ au sens des distributions.

Pour conclure cette section, nous établissons le résultat suivant comparant l'énergie $\rho\Sigma$ du système relaxé (1.14) et l'énergie ρE du système à l'équilibre (1.10).

Théorème 4
Soit $(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\ldots,N}, \rho I)$ *un* $(N+3)$*-uplet de* $\overline{\Omega}$*. Supposons que la constante a vérifie la condition de Whitham*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial p_i}{\partial \tau}(\tau, S_i) + a^2 > 0, \quad \tau = 1/\rho. \tag{1.36}$$

Posons

$$I^{eq} := I^{eq}(\tau, \{S_i\}_{i=1,\ldots,N}) = \sum_{i=1}^{N} p_i(\tau, S_i) + a^2 \tau. \tag{1.37}$$

Alors sur son domaine de définition l'énergie relaxée $\rho\Sigma$ *est convexe en* ρI *et atteint son minimum sur la position d'équilibre* ρI^{eq} *:*

$$\rho\Sigma(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\ldots,N}, \rho I^{eq}) \leq \rho\Sigma(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\ldots,N}, \rho I), \tag{1.38}$$

avec de plus

$$\rho\Sigma(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\ldots,N}, \rho I^{eq}) = \rho E(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\ldots,N}).$$

Remarquons que les identités de ce théorème sont équivalentes à

$$\Sigma(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I^{eq}) \leq \Sigma(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I), \tag{1.39}$$

avec de plus

$$\Sigma(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I^{eq}) = \rho E(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\ldots,N})/\rho.$$

Démonstration
En vertu de la remarque précédente, il suffit d'établir la validité de (1.39).
Rappelons que par construction, dès que $I = I^{eq}$, nous avons $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I^{eq}) = \tau$ puisque la condition de Whitham (1.36) est satisfaite, et

$$\Sigma(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I^{eq}) = \frac{1}{2}u^2 + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\tau, S_i).$$

Par ailleurs, on rappelle (voir démonstration du lemme 2) que

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I} = \frac{\partial \theta}{\partial I} = \mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I) - \tau.$$

L'application Σ étant strictement convexe par rapport à la variable I d'après le lemme 2, son minimum en I est réalisé lorsque $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I) = \tau$. L'application $I \to \mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I)$ étant strictement croissante (voir (1.34) et la définition de $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\ldots,N}, I)$), ce minimum ne peut être atteint que pour $I = I^{eq}$. L'inégalité (1.39) est démontrée.

1.5 Schéma par Relaxation

Nous donnons maintenant une description précise de la méthode numérique proposée en Section 1.3 pour approcher numériquement les solutions du problème de Cauchy (1.7)-(1.8), pour la donnée initiale

$$\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_0(x). \tag{1.40}$$

Soient Δt et Δx les pas de temps et d'espace choisis constants par souci de simplicité. Les solutions approchées $\mathbf{U}_{\Delta x}(x,t) : I\!R \times I\!R_\star^+ \to \Omega$ du système (1.7)-(1.8)-(1.40) seront cherchées sous la forme de fonctions constantes par morceaux, telles que

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x,t) = \mathbf{U}_j^n =^T (\rho_j^n, (\rho u)_j^n, \{(\rho S_i)_j^n\}_{i=1,\ldots,N}) \tag{1.41}$$

si $x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$, $j \in Z$ et $t \in [t^n, t^{n+1}[$, avec $t^n = n\Delta t$, $n \in N$.
A l'instant $t = 0$, nous introduisons

$$\mathbf{U}_j^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} {}^T(\rho_0(x), (\rho u)_0(x), \{(\rho S_i)_0(x)\}_{i=1,\ldots,N})dx, \quad j \in Z. \tag{1.42}$$

Supposons connue la solution approchée $\mathbf{U}_{\Delta x}(x,.)$ à une date $t^n \geq 0$. Nous suggérons d'avancer cette solution à l'instant suivant t^{n+1} en adoptant la stratégie générale décrite précédemment mais en faisant choix d'une valeur de a définie relativement à chaque interface $x_{j+1/2}$. Notre objectif est en effet de minimiser la dissipation numérique de la méthode en choisissant la plus petite valeur de a vérifiant des conditions de Whitham locales explicitées ci-après. Cette volonté repose sur l'heuristique suivante. Un développement de Chapman-Enskog mené autour de la variété d'équilibre du présent modèle de Relaxation (voir Bouchut [18], et aussi [28], [39] pour les détails dans le cas 3×3) conduit à devoir considérer une perturbation du système d'équilibre qui s'avère être visqueuse dès que la condition de Whitham est satisfaite. La viscosité apparente croît avec a, ce qui suggère fortement de minimiser cette valeur localement. Fixons une arête $x_{j+1/2}$ et associons lui une valeur $a_{j+1/2} = a(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)$. Relativement à cette valeur, nous définissons le système de Relaxation suivant, où le paramètre de Relaxation λ est choisi nul conformément à la description du premier pas de la méthode :

$$\partial_t \overline{\mathbf{U}} + \partial_x \overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}) = 0. \tag{1.43}$$

La dépendance de la fonction flux en $a_{j+1/2}$ intervient bien évidemment dans la définition de la pression relaxée :

$$\Pi = I - a_{j+1/2}^2 \tau, \quad \tau = 1/\rho. \tag{1.44}$$

L'observation centrale aux développements qui vont suivre est la suivante. A un état donné $\mathbf{U}$ dans Ω, associons l'état relaxé $\overline{\mathbf{U}}$ dans $\overline{\Omega}$ défini par :

$$\overline{\mathbf{U}} = {}^T(\mathbf{U}, (\rho I) = \rho \sum_{i=1}^N p_i(\mathbf{U}) + a_{j+1/2}^2), \tag{1.45}$$

et évaluons la fonction flux $\overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}$ sur cet état à l'équilibre (*i.e.* avec $\Pi(\overline{\mathbf{U}}) = \sum_{i=1}^N p_i(\mathbf{U})$) pour obtenir l'identité suivante :

$$\overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}) = {}^T(\mathbf{F}(\mathbf{U}), (\rho I u) = (\rho \sum_{i=1}^N p_i(\mathbf{U}) + a_{j+1/2}^2)u). \tag{1.46}$$

En d'autres termes, les $(N+2)$ premières composantes de cette fonction flux sont indépendantes du choix du coefficient a défini relativement à l'arête $x_{j+1/2}$. Cette remarque évidente associée au choix de la restriction CFL (1.19) ($\leq 1/2$) permet, ainsi que nous le verrons, de localiser le choix de a à chaque interface tout en définissant une méthode de volumes finis conservative et consistante pour la réactualisation de $\mathbf{U}_j^{n+1}$.
Munis du système de Relaxation (1.43), formons un problème de Riemann à l'interface $x_{j+1/2}$ en considérant les données gauche et droite suivantes :

$$\overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n = {}^T(\mathbf{U}_j^n, (\rho I)_{j,+}^n = \rho_j^n \sum_{i=1}^N p_i(\mathbf{U}_j^n) + a_{j+1/2}^2), \tag{1.47}$$

$$\overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n = {}^T(\mathbf{U}_{j+1}^n, (\rho I)_{j+1,-}^n = \rho_{j+1}^n \sum_{i=1}^N p_i(\mathbf{U}_{j+1}^n) + a_{j+1/2}^2). \tag{1.48}$$

Désignons par $\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}((x-x_{j+1/2})/(t-t^n); \overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n)$ la solution auto-semblable du problème de Riemann considéré, donnée conformément au théorème 1. Suivant le formalisme proposé par Harten, Lax et Van Leer [61] pour les méthodes de volumes finis, nous introduisons les projections L^2 à l'instant t^{n+1-} de cette solution, respectivement sur les demi-cellules $(x_j, x_{j+1/2})$ et $(x_{j+1/2}, x_{j+1})$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}}_{j+1/2,L}^{n+1-} &= \tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}((x-x_{j+1/2})/(t^{n+1-}-t^n); \overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n)dx, \\ \overline{\mathbf{U}}_{j+1/2,R}^{n+1-} &= \tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} \overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}((x-x_{j+1/2})/(t^{n+1-}-t^n); \overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n)dx. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Des considérations très classiques permettent de réexprimer ces moyennes sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}}_{j+1/2,L}^{n+1-} &= \overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n - 2\tfrac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}^g(\overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n) - \overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n)), \\ \overline{\mathbf{U}}_{j+1/2,R}^{n+1-} &= \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n - 2\tfrac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n) - \overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}^g(\overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n)), \end{aligned} \tag{1.50}$$

où la fonction flux numérique impliquée trouve la définition standard :

$$\overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}^g(\overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n) = \overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(0^+; \overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n)). \tag{1.51}$$

Avec ces définitions, introduisons alors la moyenne suivante définie relativement à chaque cellule $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ à l'instant t^{n+1-} :

$$\overline{\mathbf{U}}_j^{n+1-} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{U}}_{j+1/2,L}^{n+1-} + \overline{\mathbf{U}}_{j-1/2,R}^{n+1-}). \tag{1.52}$$

Notons que cette définition ne peut pas être comprise comme résultant de la moyenne d'une juxtaposition de solutions de problèmes de Riemann sans interaction, même sous la condition CFL (1.19). En effet, la définition du système de Relaxation ainsi que celle des données initiales associées changent en $x = x_j$, puisque a est défini relativement à chaque interface $x_{j+1/2}$ (c'est-à-dire localement sur chaque intervalle (x_j, x_{j+1})).

Toutefois, la définition de la solution discrète à l'équilibre $\mathbf{U}_j^{n+1}$, donnée conformément au second pas de la stratégie générale à partir de la connaissance de (1.52) trouve une formulation conservative consistante au sens usuel. La valeur réactualisée à l'instant t^{n+1} de la solution discrète à l'équilibre s'écrit sur chaque cellule $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$:

$$\mathbf{U}_{\Delta x}(x, t^{n+1}) = \mathbf{U}_j^{n+1} = \begin{cases} \rho_j^{n+1} = \rho_j^{n+1-}, \\ (\rho u)_j^{n+1} = (\rho u)_j^{n+1-}, \\ (\rho S_i)_j^{n+1} = (\rho S_i)_j^{n+1-}, \quad i = 1, ..., N. \end{cases} \tag{1.53}$$

Remarquons que d'après (1.52) cette mise à jour se réécrit trivialement sous la forme :

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j+1/2,L}^{n+1} + \mathbf{U}_{j-1/2,R}^{n+1}), \tag{1.54}$$

où par définition nous avons posé pour tout $j \in Z$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{j+1/2,L}^{n+1} &= ((\rho)_{j+1/2,L}^{n+1-}, (\rho u)_{j+1/2,L}^{n+1-}, \{(\rho S_i)_{j+1/2,L}^{n+1-}\}_{i=1,...,N}), \\ \mathbf{U}_{j+1/2,R}^{n+1} &= ((\rho)_{j+1/2,R}^{n+1-}, (\rho u)_{j+1/2,R}^{n+1-}, \{(\rho S_i)_{j+1/2,R}^{n+1-}\}_{i=1,...,N}). \end{aligned} \tag{1.55}$$

Or, l'examen des formules de demi-moyennes (1.55) rentrant dans la définition (1.54) conduit à considérer

$$\overline{\mathbf{F}}_{a_{j-1/2}}(\overline{\mathbf{U}}_{j,-}^n) = {}^T(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n), (\rho I u)_{j,-}^n), \tag{1.56}$$

et

$$\overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n) = {}^T(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n), (\rho I u)_{j,+}^n), \tag{1.57}$$

en vertu de l'identité (1.46). Ces considérations conduisent immédiatement à réexprimer la valeur réactualisée $\mathbf{U}_j^{n+1}$ donnée en (1.54) selon la formulation conservative suivante :

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)), \tag{1.58}$$

où le flux numérique $\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) \in I\!R^{N+2}$ est défini pour tout $j \in Z$ par (1.51) :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) =^T (\overline{F}_\rho^g, \overline{F}_{\rho u}^g, \{\overline{F}_{\rho S_i}^g\}_{i=1,...,N})_{a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n). \tag{1.59}$$

L'algorithme permettant de définir la suite $(\mathbf{U}_j^{n+1})_{j \in Z}$ rentre donc dans le cadre des schémas explicites à trois points sous forme conservative.

Nous montrons maintenant que le présent algorithme proposé pour approcher numériquement les solutions de (1.7)-(1.8)-(1.40) partage avec la méthode de Godunov exacte (*i.e.* appliquée directement sur le système (1.7) et non sur le système relaxé (1.14)) bon nombre des propriétés de stabilité et de précision attendues. En effet, les solutions des problèmes de Riemann $\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}((x - x_{j+1/2})/(t - t^n); \overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n)$ vérifient aisément pour tout $j \in Z$ les principes du maximum suivants (voir théorème 1) :

$$\min((S_i)_j^n, (S_i)_{j+1}^n) \leq S_i((x - x_{j+1/2})/(t - t^n); \overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n) \leq \max((S_i)_j^n, (S_i)_{j+1}^n),$$

$$\rho((x - x_{j+1/2})/(t - t^n); \overline{\mathbf{U}}_{j,+}^n, \overline{\mathbf{U}}_{j+1,-}^n) > 0,$$

de telle sorte que la mise à jour (1.53) entraîne les principes du maximum

$$\min((S_i)^n_{j-1}, (S_i)^n_j, (S_i)^n_{j+1}) \leq (S_i)^{n+1}_j \leq \max((S_i)^n_{j-1}, (S_i)^n_j, (S_i)^n_{j+1}), \tag{1.60}$$

pour tout $j \in Z$ et tout $i = 1, ..., N$. Nous montrons ci-dessous que l'algorithme définit un schéma entropique au sens des volumes finis (voir l'inégalité d'entropie (1.62) sur ρE). La seule propriété de précision perdue concerne la capture exacte des solutions ondes de choc stationnaires (la condition de Whitham s'y oppose) alors que les contacts stationnaires sont exactement résolus. Dans l'énoncé qui suit ainsi que dans les développements ultérieurs, nous omettrons la dépendance du coefficient a relativement à l'indice d'arête, lorsque cela ne prête pas à confusion.

Théorème 5
Supposons que la constante $a := a_{j+1/2}(\mathbf{U}^n_j, \mathbf{U}^n_{j+1})$ choisie localement à chaque interface $x_{j+1/2}$ et le couple $(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) := (\mathbf{U}^n_j, \mathbf{U}^n_{j+1})$ satisfont pour tout $j \in Z$ la condition (1.15) et les conditions de Whitham suivantes :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \tfrac{\partial p_i}{\partial \tau}(\tau_L, (S_i)_L) + a^2 > 0, \quad &&\sum_{i=1}^N \tfrac{\partial p_i}{\partial \tau}(\tau_1, (S_i)_L) + a^2 > 0, \\ &\sum_{i=1}^N \tfrac{\partial p_i}{\partial \tau}(\tau_R, (S_i)_R) + a^2 > 0, \quad &&\sum_{i=1}^N \tfrac{\partial p_i}{\partial \tau}(\tau_2, (S_i)_R) + a^2 > 0, \end{aligned} \tag{1.61}$$

où nous avons utilisé les définitions du théorème 1 pour $\tau_1 = 1/\rho_1$ et $\tau_2 = 1/\rho_2$. Alors, sous la condition CFL (1.19), le schéma numérique (1.58) satisfait les propriétés suivantes :

(i) Propriétés de stabilité :
- *Stabilité L^1 : $\mathbf{U}^{n+1}_j \in \Omega$ pour tout $j \in Z$.*
- *Inégalité d'entropie :*

$$\begin{aligned} (\rho E)^{n+1}_j := \rho E(\mathbf{U}^{n+1}_j) \leq \\ (\rho E)^n_j - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}(F_{\rho\Sigma}(\mathbf{U}^n_j, \mathbf{U}^n_{j+1}) - F_{\rho\Sigma}(\mathbf{U}^n_{j-1}, \mathbf{U}^n_j)), \quad j \in Z, \end{aligned} \tag{1.62}$$

où le flux numérique d'énergie est donné par la fonction flux consistante :

$$F_{\rho\Sigma}(\mathbf{U}^n_j, \mathbf{U}^n_{j+1}) = \{(\rho\Sigma + \Pi)u\}_{a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(0^+; \overline{\mathbf{U}}^n_{j,+}, \overline{\mathbf{U}}^n_{j+1,-})). \tag{1.63}$$

- *Principes du maximum :*

$$\begin{aligned} \min((S_i)^n_{j-1}, (S_i)^n_j, (S_i)^n_{j+1}) \leq (S_i)^{n+1}_j \leq \max((S_i)^n_{j-1}, (S_i)^n_j, (S_i)^n_{j+1}), \\ i = 1, ..., N, \quad j \in Z. \end{aligned} \tag{1.64}$$

(ii) Propriété de précision :
- *Les discontinuités de contact stationnaires du système (1.7) sont exactement résolues.*

L'inégalité (1.62) exprime la consistance du schéma numérique proposé avec l'inégalité d'entropie (1.8).
Remarquons que les covolumes intermédiaires intervenant dans (1.61) :

$$\tau_1 = \tau_1(a) = \tau_L + \frac{1}{a^2}(\sum_{i=1}^{N}(p_i)_L - \Pi^\star), \quad \tau_2 = \tau_2(a) = \tau_R + \frac{1}{a^2}(\sum_{i=1}^{N}(p_i)_R - \Pi^\star),$$

avec

$$\Pi^\star = \Pi^\star(a) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}((p_i)_L + (p_i)_R) - \frac{a}{2}(u_R - u_L),$$

peuvent être rendus arbitrairement proches respectivement de τ_L et τ_R, quitte à prendre a suffisamment grand. En conséquence, les conditions de Whitham (1.61) portant sur les états intermédiaires τ_1 et τ_2 peuvent toujours être satisfaites. Il en est de même pour l'hypothèse (1.15) portant sur l'ordre naturel des ondes. Nous ne détaillons pas ici d'algorithme permettant d'optimiser le calcul de a selon (1.15)-(1.61). Soulignons cependant qu'il est possible d'obtenir une formulation affaiblie de ces conditions de stabilité, plus simple à manipuler et à imposer numériquement. Nous renvoyons le lecteur à Bouchut [18] pour une description dans le cas d'une loi de gaz parfait polytropique.

La démonstration du théorème (5) utilise la validité du résultat suivant :

Lemme 3

Soient $\overline{\mathbf{U}}_L$ et $\overline{\mathbf{U}}_R$ deux états de $\overline{\Omega}$ à l'équilibre, c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} (\rho I)_L = \rho_L \sum_{i=1}^{N} p_i(1/\rho_L, (\rho S_i)_L/\rho_L) + a^2, \\ (\rho I)_R = \rho_R \sum_{i=1}^{N} p_i(1/\rho_R, (\rho S_i)_R/\rho_R) + a^2. \end{cases}$$

En reprenant les notations du théorème 1, supposons que la constante a satisfait la condition (1.15) et les conditions de Whitham (1.61).
Soit $\overline{\mathbf{U}}(x/t; \overline{\mathbf{U}}_L, \overline{\mathbf{U}}_R) = (\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\dots,N}, \rho I)(x/t; \overline{\mathbf{U}}_L, \overline{\mathbf{U}}_R)$ la solution auto-semblable du problème de Riemann (1.14) pour la donnée initiale (1.16).
Alors, pour tout $(x,t) \in I\!R \times I\!R^+$

$$\rho E((\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\dots,N})(x/t; \overline{\mathbf{U}}_L, \overline{\mathbf{U}}_R)) \leq \rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}}(x/t; \overline{\mathbf{U}}_L, \overline{\mathbf{U}}_R)). \tag{1.65}$$

Démonstration du Lemme 3

Pour tout $(x,t) \in I\!R \times I\!R^+$, la solution $\overline{\mathbf{U}}(x/t; \overline{\mathbf{U}}_L, \overline{\mathbf{U}}_R)$ du problème de Riemann (1.14) pour la donnée initiale (1.16) est, d'après le théorème 1, telle que

$$(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I)(x/t; \overline{\mathbf{U}}_L, \overline{\mathbf{U}}_R)$$

vaut soit $(\{(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, I_L)$, soit $(\{(S_i)_R\}_{i=1,\dots,N}, I_R)$. Ainsi, la condition de Whitham (1.61) étant satisfaite, $\mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I)$ est bien défini pour tout (x,t) et vaut respectivement τ_L ou τ_R, puisque I_L et I_R sont par hypothèse à l'équilibre. De manière plus précise et en reprenant les notations du théorème 1, $\overline{\mathbf{U}}(x/t; \overline{\mathbf{U}}_L, \overline{\mathbf{U}}_R)$ est telle que :

(i) pour tout couple (x,t) tel que $x/t \in]-\infty, \lambda_1(\overline{\mathbf{U}}_L)[$,

$$\overline{\mathbf{U}}(x/t; \overline{\mathbf{U}}_L, \overline{\mathbf{U}}_R) = (\rho_L, (\rho u)_L, \{(\rho S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, (\rho I)_L).$$

L'état $\overline{\mathbf{U}}_L$ étant à l'équilibre, nous avons

$$\rho E(\rho_L, (\rho u)_L, \{(\rho S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}) = \rho\Sigma(\rho_L, (\rho u)_L, \{(\rho S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, (\rho I)_L).$$

Sur cet intervalle, (1.65) est donc satisfaite avec égalité.
(ii) pour tout couple (x,t) tel que $x/t \in \,]\lambda_1(\overline{\mathbf{U}}_L), \lambda_2(\overline{\mathbf{U}}_1)[$,

$$\overline{\mathbf{U}}(x/t; \overline{\mathbf{U}}_L, \overline{\mathbf{U}}_R) = (\rho_1, \rho_1 u^\star, \{\rho_1 (S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, \rho_1 I_L).$$

Remarquons tout d'abord que $\rho\Sigma(\rho_1, \rho_1 u^\star, \{\rho_1(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, \rho_1 I_L)$ existe et est bien défini puisque $\rho_1 > 0$ et que par construction $\mathcal{T}(I_L, \{(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}) = \tau_L$. Posons

$$I_{1L}^{eq} = I_{1L}^{eq}(\tau_1, \{(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}) = \sum_{i=1}^{N} p_i(\tau_1, (S_i)_L) + a^2 \tau_1, \quad \tau_1 = \frac{1}{\rho_1}. \tag{1.66}$$

La condition de Whitham (1.61) étant satisfaite, $\rho\Sigma(\rho_1, \rho_1 u^\star, \{\rho_1(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, \rho_1 I_{1L}^{eq})$ existe et est bien défini. En effet, $\mathcal{T}(\{(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, I_{1L}^{eq})$ est bien défini et vaut τ_1 d'après (1.66). Il s'en suit par définition de $\rho\Sigma$ que

$$\rho\Sigma(\rho_1, \rho_1 u^\star, \{\rho_1(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, \rho_1 I_{1L}^{eq}) = \rho E(\rho_1, \rho_1 u^\star, \{\rho_1(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}). \tag{1.67}$$

Nous avons montré que l'application $I \to \mathcal{T}(\{(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, I)$ est définie en I_L et en I_{1L}^{eq}. La convexité de l'application f définie au lemme 1 montre qu'elle admet nécessairement deux racines distinctes pour tout

$$I \in \; [\min(I_L, I_{1L}^{eq}), \max(I_L, I_{1L}^{eq})],$$

puisque tel est le cas aux bornes de cet intervalle. En conséquence, $\mathcal{T}(\{(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, I)$ (et donc $\Sigma(\rho_1, \rho_1 u^\star, \{\rho_1(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, \rho_1 I)$) est bien défini sur l'intervalle précédent et vérifie

$$\mathcal{T}(\{(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, I) \in \; [\min(\tau_L, \tau_1), \max(\tau_L, \tau_1)].$$

Par ailleurs, l'application

$$I \to \rho_1 \Sigma(\rho_1, \rho_1 u^\star, \{\rho_1(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, \rho_1 I)$$

étant définie sur l'intervalle $[\min(I_L, I_{1L}^{eq}), \max(I_L, I_{1L}^{eq})]$, elle y est convexe d'après le lemme 2. Le théorème 4 précise que le minimum est atteint sur la valeur de I réalisant l'équilibre, à savoir $I = I_{1L}^{eq}$. Nous obtenons :

$$\rho\Sigma(\rho_1, \rho_1 u^\star, \{\rho_1(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, \rho_1 I_{1L}^{eq}) \le \rho\Sigma(\rho_1, \rho_1 u^\star, \{\rho_1(S_i)_L\}_{i=1,\dots,N}, \rho_1 I_L).$$

L'inégalité (1.65) est donc satisfaite d'après (1.67) pour tout couple (x,t) tel que $x/t \in \,]\lambda_1(\overline{\mathbf{U}}_L), \lambda_2(\overline{\mathbf{U}}_1)[$.
De la même manière qu'en **(ii)** (respectivement en **(i)**) on prouve que (1.65) est satisfaite pour tout couple (x,t) tel que $x/t \in]\lambda_2(\overline{\mathbf{U}}_1), \lambda_3(\overline{\mathbf{U}}_R)[$ (respectivement pour tout couple (x,t) tel que $x/t \in]\lambda_3(\overline{\mathbf{U}}_R), +\infty[$). Ceci conclut la démonstration du lemme.

Démonstration du théorème 5
La propriété de stabilité L^1 est vraie par construction : rappelons que les densités intermédiaires ρ_1 et ρ_2 sont positives dès que a vérifie (1.15) et que chaque entropie

spécifique reste positive en vertu des principes du maximum (1.60) mis en évidence précédemment.
Etablissons maintenant l'inégalité d'entropie (1.62). De sorte à alléger le système de notations introduit lors de l'exposé détaillé de la méthode, écrivons pour tout (x,t) appartenant à $(x_j, x_{j+1}) \times (t^n, t^{n+1-})$:

$$(\mathbf{U}, \rho I)(x,t) = \overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(x,t) := \overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}((x - x_{j+1/2})/(t-t^n); \overline{\mathbf{U}}^n_{j,+}, \overline{\mathbf{U}}^n_{j+1,-}),$$

avec par construction (voir (1.55) et (1.49)) :

$$\mathbf{U}^{n+1}_{j+1/2,L} = \frac{2}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \mathbf{U}(x, t^{n+1-})dx, \tag{1.68}$$

$$\mathbf{U}^{n+1}_{j+1/2,R} = \frac{2}{\Delta x}\int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} \mathbf{U}(x, t^{n+1-})dx. \tag{1.69}$$

Le lemme précédent assure que pour tout $x \in (x_j, x_{j+1})$ l'inégalité suivante a lieu :

$$\rho E(\mathbf{U}(x, t^{n+1-})) \leq \rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(x, t^{n+1-})).$$

Moyennons cette inégalité sur chaque demi-cellule $(x_j, x_{j+1/2})$ et $(x_{j+1/2}, x_{j+1})$ pour obtenir respectivement :

$$\tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \rho E(\mathbf{U}(x, t^{n+1-}))dx \leq \tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(x, t^{n+1-}))dx, \tag{1.70}$$

et

$$\tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} \rho E(\mathbf{U}(x, t^{n+1-}))dx \leq \tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} \rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(x, t^{n+1-}))dx. \tag{1.71}$$

En invoquant les relations (1.68) et (1.69), la stricte convexité de l'application $\mathbf{U} \to \rho E(\mathbf{U})$ permet de déduire par l'inégalité de Jensen :

$$\rho E(\mathbf{U}^{n+1}_{j+1/2,L}) \leq \tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(x, t^{n+1-}))dx, \tag{1.72}$$

et

$$\rho E(\mathbf{U}^{n+1}_{j+1/2,R}) \leq \tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} \rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(x, t^{n+1-}))dx. \tag{1.73}$$

Donnons une formulation équivalente à chacune des moyennes intervenant dans le membre de droite de ces inégalités. A cette fin, rappelons que la propriété du système de Relaxation (1.14) de ne posséder que des champs linéairement dégénérés implique que toute loi de conservation supplémentaire vérifiée par les solutions régulières de ce système est encore vérifiée (*i.e.* avec égalité à zéro) au sens des distributions pour les solutions faibles (voir Godlewski et Raviart [57] ou Serre [118] pour ce résultat). En conséquence, la solution du problème de Riemann considéré vérifie au sens faible :

$$\partial_t \rho\Sigma + \partial_x(\rho\Sigma + \Pi)u = 0, \tag{1.74}$$

de sorte qu'en projection sur chaque demi-cellule $(x_j, x_{j+1/2})$ et $(x_{j+1/2}, x_{j+1})$, la propriété d'équilibre de la donnée initiale conduit à :

$$\begin{aligned}(\rho\Sigma)^{n+1-}_{j+1/2,L} &:= \tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(x,t^{n+1-}))dx = \\ (\rho E)^n_j &- 2\tfrac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{F}^g_{\rho\Sigma,a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}^n_{j,+},\overline{\mathbf{U}}^n_{j+1,-}) - \overline{F}_{\rho\Sigma,a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}^n_{j,+})),\end{aligned} \tag{1.75}$$

$$\begin{aligned}(\rho\Sigma)^{n+1-}_{j+1/2,R} &:= \tfrac{2}{\Delta x}\int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} \rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}}_{a_{j+1/2}}(x,t^{n+1-}))dx = \\ (\rho E)^n_{j+1} &- 2\tfrac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{F}_{\rho\Sigma,a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}^n_{j+1,-}) - \overline{F}^g_{\rho\Sigma,a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}^n_{j,+},\overline{\mathbf{U}}^n_{j+1,-})).\end{aligned} \tag{1.76}$$

La fonction flux numérique intervenant dans ces deux identités vérifie par construction la définition (1.63) donnée dans l'énoncé. Avec des notations claires, la fonction flux exact $\overline{F}_{\rho\Sigma,a_{j+1/2}}$ trouve quant à elle une définition immédiate à partir de celle du flux $\overline{\mathbf{F}}_{a_{j+1/2}}$. En observant à l'instar des relations (1.56) et (1.57) que la propriété d'équilibre vérifiée par $\overline{\mathbf{U}}^n_{j,-}$ et $\overline{\mathbf{U}}^n_{j,+}$ pour tout $j \in Z$ se traduit par l'égalité suivante :

$$\overline{F}_{\rho\Sigma,a_{j-1/2}}(\overline{\mathbf{U}}^n_{j,+}) = \overline{F}_{\rho\Sigma,a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}^n_{j,-}) = \{(\rho E + \sum_{i=1}^N p_i)u\}(\mathbf{U}^n_j),$$

nous déduisons de (1.72)–(1.73) et (1.75)–(1.76) l'inégalité suivante vérifiée sur la cellule $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$:

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}(\rho E(\mathbf{U}^{n+1}_{j+1/2,L}) + \rho E(\mathbf{U}^{n+1}_{j-1/2,R})) \leq \\ (\rho E)^n_j - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{F}^g_{\rho\Sigma,a_{j+1/2}}(\overline{\mathbf{U}}^n_{j,+},\overline{\mathbf{U}}^n_{j+1,-}) - \overline{F}^g_{\rho\Sigma,a_{j-1/2}}(\overline{\mathbf{U}}^n_{j-1,+},\overline{\mathbf{U}}^n_{j,-})).\end{gathered}$$

Pour conclure à la validité de l'inégalité d'énergie, il suffit d'invoquer la relation (1.54) :

$$\mathbf{U}^{n+1}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{n+1}_{j+1/2,L} + \mathbf{U}^{n+1}_{j-1/2,R}),$$

ainsi que l'inégalité de Jensen.

Concernant enfin la propriété de précision (ii), rappelons que l'algorithme proposé consiste en une méthode de Godunov appliquée au système relaxé (1.14), la donnée initiale à l'équilibre considérée étant déduite de la donnée initiale du système (1.7) (voir (1.45) par exemple). La méthode de Godunov capturant de manière exacte les contacts stationnaires, il suffit de prouver que les contacts stationnaires du système à l'équilibre (1.7) sont aussi des contacts stationnaires pour la formulation relaxée (1.14). Considérons $\mathbf{U}_L$ et $\mathbf{U}_R$ deux états constants (appartenant à Ω) d'une discontinuité de contact stationnaire du système (1.7) associée à la valeur propre u. Les relations de Rankine-Hugoniot impliquent $\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$ de telle sorte que $u_L = u_R = 0$, et $\sum_{i=1}^N (p_i)_L = \sum_{i=1}^N (p_i)_R$. Notons $\overline{\mathbf{U}}_L$ et $\overline{\mathbf{U}}_R$ les deux états constants à l'équilibre de $\overline{\Omega}$ associés à $\mathbf{U}_L$ et $\mathbf{U}_R$, c'est-à-dire tels que

$$(\rho I)_L = \rho_L \sum_{i=1}^N (p_i)_L + a^2, \quad (\rho I)_R = \rho_R \sum_{i=1}^N (p_i)_R + a^2,$$

ou encore

$$\Pi_L = \sum_{i=1}^{N} (p_i)_L, \quad \Pi_R = \sum_{i=1}^{N} (p_i)_R.$$

Les formules donnant la solution du problème de Riemann (voir théorème 1) montrent que $u^\star = u_L = u_R = 0$, $\Pi^\star = \Pi_L = \Pi_R$. $\overline{\mathbf{U}}_L$ et $\overline{\mathbf{U}}_R$ sont donc deux états constants appartenant à $\overline{\Omega}$ d'une discontinuité de contact stationnaire du système (1.14), associée à la valeur propre u. Ceci conclut la démonstration.

1.6 Application aux équations d'Euler multi-pression

1.6.1 Définition du schéma

Dans cette section, nous montrons comment déduire de la méthode de Relaxation précédemment décrite, une méthode de volumes finis consistante pour l'approximation des solutions faibles des équations d'Euler multi-pression (1.5), *i.e.* :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + \sum_{i=1}^{N} p_i) = 0, \\ \partial_t \rho E + \partial_x (\rho E + \sum_{i=1}^{N} p_i) u = 0, \\ \partial_t \rho S_i + \partial_x \rho S_i u = 0, \quad i = 1, ..., N-1, \end{cases}$$

complétées par l'inégalité d'entropie

$$\partial_t \rho S_N(\mathbf{u}) + \partial_x \rho S_N(\mathbf{u}) u \leq 0.$$

La technique utilisée s'appuie sur une idée proposée par Coquel et Perthame [40] (voir également Coquel et al. [32]).
La solution approchée de (1.5), notée $\mathbf{u}_{\Delta x}(x,t) : I\!R \times I\!R_\star^+ \to \Theta$, avec $\mathbf{u_0}$ comme donnée initiale, est une fois de plus considérée constante par morceaux sur chaque pavé $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[\times[t^n, t^{n+1}[$ pour $(n,j) \in N \times Z$, et nous posons

$$\mathbf{u}_{\Delta x}(x,t) = \mathbf{u}_j^n, \quad \text{pour tout } (x,t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[\times[t^n, t^{n+1}[. \tag{1.77}$$

Nous posons par ailleurs $\mathbf{u}_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}_0(x) dx$ pour tout $j \in Z$.
Supposons connue la suite $(\mathbf{u}_j^n = (\rho_j^n, (\rho u)_j^n, (\rho E)_j^n, \{(\rho S_i)_j^n\}_{i=1,...,N-1}))_{j \in Z}$, et définissons la suite correspondante $(\mathbf{U}_j^n = (\rho_j^n, (\rho u)_j^n, \{(\rho S_i)_j^n\}_{i=1,...,N}))_{j \in Z}$ de Ω à l'aide de la loi de fermeture (1.3). Nous proposons alors d'avancer la solution $\mathbf{u}_{\Delta x}(x,t)$ jusqu'à l'instant t^{n+1} en deux étapes :

Premier pas : Evolution en temps $(t^n \to t^{n+1-})$
Ce premier pas consiste à faire évoluer en temps la suite $(\mathbf{U}_j^n)_{j \in Z}$ en utilisant la méthode de Relaxation décrite dans la section précédente. En reprenant les notations correspondantes, nous obtenons une mise à jour $(\mathbf{U}_j^{n+1-})_{j \in Z}$ définie par

$$\mathbf{U}_j^{n+1-} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)), \quad j \in Z, \tag{1.78}$$

où la fonction flux numérique est donnée par (1.59). D'après le théorème 5, cette mise à jour conservative est consistante avec le système (1.7) et possède toutes les propriétés de stabilité requises. Elle est en particulier, d'après (1.62), consistante avec l'inégalité d'énergie (1.8) :

$$\rho E(\mathbf{U}_j^{n+1-}) \leq (\rho E)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{\rho\Sigma}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - F_{\rho\Sigma}(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)), \tag{1.79}$$

où la fonction flux d'énergie numérique est donnée par (1.63).

Second pas : Conservation de l'énergie totale $(t^{n+1-} \to t^{n+1})$
L'objectif de ce deuxième pas est de définir la suite $(\mathbf{u}_j^{n+1})_{j\in Z}$ en forçant la conservation de l'énergie totale ρE par opposition à l'inégalité (1.79). Pour cela, nous proposons de garder inchangées les variables suivantes :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^{n+1-}, \quad (\rho u)_j^{n+1} = (\rho u)_j^{n+1-}, \quad (\rho S_i)_j^{n+1} = (\rho S_i)_j^{n+1-}, \quad i = 1, ..., N-1, \tag{1.80}$$

et de redéfinir l'énergie totale $(\rho E)_j^{n+1}$ en posant

$$(\rho E)_j^{n+1} = (\rho E)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{\rho\Sigma}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - F_{\rho\Sigma}(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)). \tag{1.81}$$

Nous avons ainsi défini une évolution conservative et consistante à trois points de la suite $(\mathbf{u}_j^n)_{j\in Z}$. Nous établissons le résultat suivant mettant en évidence les propriétés de cette mise à jour explicite.

Théorème 6
Sous les hypothèses du théorème 5, le schéma numérique (1.78)-(1.80)-(1.81) satisfait les propriétés suivantes :

(i) Propriétés de stabilité :
- *Stabilité* L^1 : $\mathbf{u}_j^{n+1} \in \Theta$ *pour tout* $j \in Z$.
- *Inégalité d'entropie :*

$$\begin{gathered}(\rho S_N)_j^{n+1} := \rho S_N(\mathbf{u}_j^{n+1}) \leq \\ (\rho S_N)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{\rho S_N}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - F_{\rho S_N}(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)), \quad j \in Z.\end{gathered} \tag{1.82}$$

- *Principes du maximum :*

$$\min((S_i)_{j-1}^n, (S_i)_j^n, (S_i)_{j+1}^n) \leq (S_i)_j^{n+1} \leq \max((S_i)_{j-1}^n, (S_i)_j^n, (S_i)_{j+1}^n), \quad i = 1, ..., N-1, \tag{1.83}$$

$$(S_N)_j^{n+1} \leq \max((S_N)_{j-1}^n, (S_N)_j^n, (S_N)_{j+1}^n), \quad j \in Z. \tag{1.84}$$

(ii) Propriété de précision :
- *Les discontinuités de contact stationnaires du système (1.5) sont exactement résolues.*

Démonstration du théorème 6
Tout d'abord, les principes du maximum (1.83) sont immédiats compte-tenu de (1.80) et du théorème 5.
Concernant la propriété de précision, toute discontinuité de contact stationnaire pour

le système (1.5) est une discontinuité de contact stationnaire pour le système relaxé (1.14). En effet, dans le cas d'une discontinuité de contact, (1.4) est vraie avec une égalité à zéro (la dissipation d'entropie correspondante est nulle). Or les mises à jour (1.80) et (1.81) correspondent à une projection L^2 de type Godunov des variables conservées $(\rho, \rho u, \rho\Sigma, (\rho S_i)_{i=1,...,N})$ du système (1.14). La méthode de Godunov préservant les discontinuités de contact stationnaires, la propriété de précision attendue est vérifiée.
Afin d'établir l'inégalité d'entropie (1.82), remarquons que la loi d'énergie

$$\rho E = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \sum_{i=1}^{N} \rho\varepsilon_i(1/\rho, \rho S_i/\rho)$$

définit implicitement l'application $\mathbf{u} \to \rho S_N(\mathbf{u})$ et implique en la dérivant partiellement par rapport à ρE :

$$1 = \frac{\partial \varepsilon_N}{\partial S_N}(\frac{1}{\rho}, \frac{\rho S_N}{\rho}) \times \frac{\partial \rho S_N}{\partial \rho E},$$

c'est-à-dire $\frac{\partial \rho S_N}{\partial \rho E} = -\frac{1}{T_N} < 0$ d'après (1.2). L'application $\mathbf{u} \to \rho S_N(\mathbf{u})$ est donc une application décroissante de ρE. Ainsi, la validité de (1.79), qui se réexprime d'après la définition (1.81) sous la forme :

$$\rho E(\mathbf{U}_j^{n+1-}) \leq (\rho E)_j^{n+1},$$

entraîne

$$\rho S_N(\rho_j^{n+1}, (\rho u)_j^{n+1}, (\rho E)_j^{n+1}, \{(\rho S_i)_j^{n+1}\}_{i=1,...,N-1}) \leq$$

$$\rho S_N(\rho_j^{n+1}, (\rho u)_j^{n+1}, \rho E(\mathbf{U}_j^{n+1-}), \{(\rho S_i)_j^{n+1}\}_{i=1,...,N-1}) = (\rho S_N)_j^{n+1-}, \quad j \in Z. \tag{1.85}$$

Le membre de droite de cette inégalité coïncide en effet par construction avec la quantité $(\rho S_N)_j^{n+1-}$ d'après (1.80). Nous obtenons l'inégalité attendue en invoquant (1.78) :

$$\rho S_N(\mathbf{u}_j^{n+1}) \leq (\rho S)_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{\rho S_N}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - F_{\rho S_N}(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)).$$

Par ailleurs, puisque $\rho_j^{n+1} = \rho_j^{n+1-}$, (1.85) entraîne $(S_N)_j^{n+1} \leq (S_N)_j^{n+1-}$. La validité du principe du maximum (1.84) est assurée puisque d'après le théorème 5, $(S_N)_j^{n+1-} \leq \max((S_N)_{j-1}^n, (S_N)_j^n, (S_N)_{j+1}^n)$. De plus, la décroissance de l'application ε_N par rapport à la variable S_N ($\partial\varepsilon_N/\partial S_N = -T_N < 0$) entraîne

$$0 \leq \varepsilon_N(\rho_j^{n+1-}, (S_N)_j^{n+1-}) = \varepsilon_N(\rho_j^{n+1}, (S_N)_j^{n+1-}) \leq \varepsilon_N(\rho_j^{n+1}, (S_N)_j^{n+1}).$$

On en déduit :

$$\rho_j^{n+1}\varepsilon_N(\rho_j^{n+1}, (S_N)_j^{n+1}) = (\rho E)_j^{n+1} - \frac{((\rho u)_j^{n+1})^2}{2\rho_j^{n+1}} - \sum_{i=1}^{N-1} \rho_j^{n+1}\varepsilon_i(1/\rho_j^{n+1}, (S_i)_j^{n+1}) \geq 0.$$

Le vecteur $\mathbf{u}_j^{n+1}$ est donc dans Θ puisque la positivité des grandeurs ρ_j^{n+1} et $(\rho S_i)_j^{n+1}$ pour tout $i = 1, ..., N-1$ est assurée par construction. Ceci conclut la démonstration du théorème.

1.6.2 Un modèle de Relaxation équivalent

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'algorithme de la méthode de volumes finis précédente s'appuyant sur une méthode de Relaxation pour le système compagnon (1.14), peut être réinterprétée directement comme une méthode de Relaxation pour le système Euler multi-pression, compatible au sens de Chen, Levermore et Liu [28] avec le couple d'entropie de Lax $(\rho S_N, \rho S_N u)$. Dans ce nouveau modèle de Relaxation, l'énergie $\rho\Sigma$ devient une inconnue conservative, et un relèvement $\rho\mathcal{S}_\mathcal{N}$ de l'entropie ρS_N est défini de manière implicite à partir de la construction précédente. Cette réinterprétation sera utile aux développements suivants consacrés à l'implicitation en temps de la présente technique d'approximation numérique.

Le premier résultat suivant montre qu'il est possible d'inverser le relèvement de l'énergie $\rho\Sigma$ relativement à ρS_N de sorte à définir ultérieurement le relèvement de $\rho\mathcal{S}_\mathcal{N}$.

Lemme 4
L'application $\overline{\mathbf{U}} = {}^T(\rho, \rho u, \{\rho S_i\}_{i=1,\dots,N}, \rho I) \to \rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}})$ *est inversible par rapport à la variable* ρS_N*.*

Démonstration
Il suffit de montrer que l'application

$$^T(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) \to \Sigma(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I)$$

est inversible en S_N. Rappelons que cette application est définie par :

$$\Sigma(\tau, u, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}, I) = \frac{u^2}{2} + \frac{(I - a^2\tau)^2}{2a^2} + \phi(\{S_i\}_{i=1,\dots,N-1}, S_N, I),$$

où

$$\phi(\{S_i\}_{i=1,\dots,N-1}, S_N, I) = \varepsilon(\mathcal{T}, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}) - \frac{p^2(\mathcal{T}, \{S_i\}_{i=1,\dots,N})}{2a^2},$$

et avec

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\{S_i\}_{i=1,\dots,N-1}, S_N, I), \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(\mathcal{T}, S_i), \quad p = \sum_{i=1}^N p_i(\mathcal{T}, S_i).$$

Un calcul direct donne :

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial S_N} = (\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathcal{T}} - \frac{p}{a^2}\frac{\partial p}{\partial\mathcal{T}})\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial S_N} + (\frac{\partial\varepsilon}{\partial S_N}_{|\mathcal{T}} - \frac{p}{a^2}\frac{\partial p}{\partial S_N}_{|\mathcal{T}})$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial S_N} = -\frac{p}{a^2}(a^2 + \frac{\partial p}{\partial\mathcal{T}})\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial S_N} + (\frac{\partial\varepsilon}{\partial S_N}_{|\mathcal{T}} - \frac{p}{a^2}\frac{\partial p}{\partial S_N}_{|\mathcal{T}}).$$

Or par construction, $\mathcal{T}$ est solution de

$$I = p(\mathcal{T}, \{S_i\}_{i=1,\dots,N}) + a^2\mathcal{T},$$

de sorte que

$$(a^2 + \frac{\partial p}{\partial\mathcal{T}})\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial S_N} = -\frac{\partial p}{\partial S_N}_{|\mathcal{T}}.$$

Nous obtenons donc

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial S_N} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial S_N}_{|\mathcal{T}} = -T_N(\mathcal{T}, S_N) < 0, \tag{1.86}$$

ce qui conclut la preuve.

Munis de ce résultat, nous définissons le changement de variable admissible $\overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{U}}) = (\rho, \rho u, \rho\Sigma, \{\rho S_i\}_{i=1,...,N-1}, \rho I)$ et considérons l'application $\rho\mathcal{S}_\mathcal{N}(\overline{\mathbf{u}})$ définie implicitement à partir de la définition de $\rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}})$. Avec un léger abus de notations, le relèvement $\mathcal{T}$ du covolume τ sera à l'avenir compris comme une fonction de $\overline{\mathbf{u}}$. Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 2
Considérons le modèle de Relaxation suivant pour le système Euler multi-pression :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + \Pi) = 0, \\ \partial_t \rho\Sigma + \partial_x(\rho\Sigma + \Pi)u = 0, \\ \partial_t \rho S_i + \partial_x \rho S_i u = 0, \quad i = 1, ..., N-1, \\ \partial_t \rho I + \partial_x \rho I u = \lambda\rho(p(\overline{\mathbf{u}}) - \Pi). \end{cases} \tag{1.87}$$

Les solutions régulières de ce modèle vérifient l'inégalité d'entropie suivante :

$$\partial_t \rho\mathcal{S}_\mathcal{N} + \partial_x \rho\mathcal{S}_\mathcal{N} u = -\lambda \frac{\rho}{a^2 T_N(\mathcal{T}, \mathcal{S}_\mathcal{N})}(p(\overline{\mathbf{u}}) - \Pi)^2 < 0. \tag{1.88}$$

En d'autres termes, le système (1.87) constitue bien un modèle de Relaxation du système (1.5) au sens de Chen, Levermore et Liu [28].

Démonstration
De manière à obtenir le résultat attendu, comprenons la loi de conservation sur $\rho\Sigma$ lorsque cette énergie est fonction de la variable $\overline{\mathbf{U}}$. Des calculs identiques à ceux proposés lors de la démonstration du théorème 2 conduisent aux relations (1.31) et (1.32) à partir du nouveau modèle de Relaxation, soit donc en les superposant :

$$\partial_t\left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho\Pi^2}{2a^2}\right) + \partial_x\left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho\Pi^2}{2a^2} + \Pi\right)u = \lambda\frac{\rho\Pi}{a^2}(p - \Pi).$$

En soustrayant cette identité à la loi de conservation gouvernant $\rho\Sigma(\overline{\mathbf{U}})$, nous obtenons avec les notations de la preuve précédente :

$$\rho(\partial_t \phi + u\partial_x \phi) = -\lambda\frac{\rho\Pi}{a^2}(p - \Pi).$$

En tenant compte des équations de transport satisfaites par les $(N-1)$ premières entropies spécifiques, il vient :

$$\rho\frac{\partial \phi}{\partial I}(\partial_t I + u\partial_x I) + \rho\frac{\partial \phi}{\partial S_N}(\partial_t \mathcal{S}_\mathcal{N} + u\partial_x \mathcal{S}_\mathcal{N}) = -\lambda\frac{\rho\Pi}{a^2}(p - \Pi).$$

Des arguments semblables à ceux développés lors de la preuve du théorème 2 montrent que $\frac{\partial \phi}{\partial I}$ est toujours donné par la formule (1.35), alors que $\frac{\partial \phi}{\partial S_N} = \frac{\partial \Sigma}{\partial S_N} = -T_N$ en vertu de la preuve précédente. Nous venons donc d'établir :

$$-\rho T_N(\partial_t \mathcal{S}_\mathcal{N} + u\partial_x \mathcal{S}_\mathcal{N}) = \lambda \frac{\rho}{a^2}(p - \Pi)^2,$$

ce qui n'est autre que le résultat recherché.

L'équivalence de la méthode de volumes finis associée à ce nouveau modèle de Relaxation, obtenue conformément à la stratégie générale à deux pas ($\lambda = 0$ puis $\lambda = +\infty$), avec la méthode construite dans les précédents paragraphes résulte de la propriété de dégénérescence linéaire de tous les champs. En effet, rappelons-le, une loi de conservation satisfaite par les solutions régulières d'un système présentant cette propriété, reste vraie au sens des distributions. La solution du problème de Riemann pour le nouveau modèle est en particulier la même que celle du modèle (1.14) et en conséquence la méthode numérique explicite est strictement identique. Elle possède dès lors les mêmes propriétés de stabilité. Il nous reste juste à préciser les valeurs de Σ à la traversée des ondes constituant cette solution. Ceci fait l'objet du résultat suivant concluant la présente section.

Théorème 7
Soit $\overline{\Theta}$ l'espace des états admissibles du système (1.87) avec $\lambda = 0$ défini par

$$\overline{\Theta} = \{\overline{\mathbf{u}} \in I\!R^{N+3}, \rho > 0, \{\rho S_i > 0\}_{i=1,\dots,N-1}, \rho E - \frac{(\rho u)^2}{2\rho} - \sum_{i=1}^{N-1} \rho\varepsilon_i(1/\rho, \rho S_i/\rho) > 0, \rho I > 0\}, \tag{1.89}$$

et $(\overline{\mathbf{u}}_L, \overline{\mathbf{u}}_R)$ deux états de $\overline{\Theta}$.
Supposons que la constante a vérifie la condition

$$\begin{gathered}\lambda_1(\overline{\mathbf{u}}_L) = u_L - a\tau_L < u^\star < \lambda_3(\overline{\mathbf{u}}_R) = u_R + a\tau_R,\\ u^\star = \tfrac{1}{2}(u_L + u_R) - \tfrac{1}{2a}(\Pi_R - \Pi_L),\\ \Pi_L = I_L - a^2\tau_L, \quad \Pi_R = I_R - a^2\tau_R.\end{gathered} \tag{1.90}$$

Alors, la solution faible auto-semblable $\overline{\mathbf{u}}(x,t;\overline{\mathbf{u}}_L,\overline{\mathbf{u}}_R) := \overline{\mathbf{u}}(x/t;\overline{\mathbf{u}}_L,\overline{\mathbf{u}}_R)$ du système (1.87) avec $\lambda = 0$ pour la donnée initiale

$$\overline{\mathbf{u}}_0(x) = \begin{cases} \overline{\mathbf{u}}_L & si \quad x < 0,\\ \overline{\mathbf{u}}_R & si \quad x > 0,\end{cases} \tag{1.91}$$

est constituée de quatre états constants :

$$\overline{\mathbf{u}}(x/t;\overline{\mathbf{u}}_L,\overline{\mathbf{u}}_R) = \begin{cases} \overline{\mathbf{u}}_L & si \quad \frac{x}{t} < \lambda_1(\overline{\mathbf{u}}_L),\\ \overline{\mathbf{u}}_1 & si \quad \lambda_1(\overline{\mathbf{u}}_L) < \frac{x}{t} < \lambda_2(\overline{\mathbf{u}}_1),\\ \overline{\mathbf{u}}_2 & si \quad \lambda_2(\overline{\mathbf{u}}_2) < \frac{x}{t} < \lambda_3(\overline{\mathbf{u}}_R),\\ \overline{\mathbf{u}}_R & si \quad \lambda_3(\overline{\mathbf{u}}_R) < \frac{x}{t},\end{cases}$$

avec

$$\lambda_2(\overline{\mathbf{u}}_1) = \lambda_2(\overline{\mathbf{u}}_2) = u^\star.$$

En posant

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_2 = u^\star,\\
&\rho_1 = a/(u_2 - \lambda_1(\overline{\mathbf{u}}_L)),\\
&\rho_2 = a/(\lambda_3(\overline{\mathbf{u}}_R) - u_2),\\
&\Pi^\star = \Pi_1 = \Pi_2 = \tfrac{1}{2}(\Pi_L + \Pi_R) - \tfrac{a}{2}(u_R - u_L),\\
&(S_i)_1 = (S_i)_L, \quad 1 \le i \le N-1,\\
&(S_i)_2 = (S_i)_R, \quad 1 \le i \le N-1,\\
&I_1 = \Pi_1 + \tfrac{a^2}{\rho_1} = I_L,\\
&I_2 = \Pi_2 + \tfrac{a^2}{\rho_2} = I_R,\\
&\Sigma_1 = \Sigma_L + (\Pi_L u_L - \Pi^\star u^\star)/a,\\
&\Sigma_2 = \Sigma_R - (\Pi_R u_R - \Pi^\star u^\star)/a,
\end{aligned}$$

les états constants sont caractérisés de la façon suivante :

$$\overline{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ (\rho u)_1 \\ (\rho\Sigma)_1 \\ (\rho S_1)_1 \\ \vdots \\ (\rho S_{N-1})_1 \\ (\rho I)_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ (\rho u)_2 \\ (\rho\Sigma)_2 \\ (\rho S_1)_2 \\ \vdots \\ (\rho S_{N-1})_2 \\ (\rho I)_2 \end{pmatrix}.$$

De plus, les états $\overline{\mathbf{u}}_1$ *et* $\overline{\mathbf{u}}_2$ *sont dans* $\overline{\Theta}$.

1.7 Validation numérique

Nous proposons de tester la méthode de Relaxation présentée pour approcher les solutions du système (1.5). Pour cela, nous utilisons des lois de pression de gaz parfaits polytropiques, les coefficients adiabatiques associés étant notés $\{\gamma_i > 1\}_{i=1,\dots,N}$. La loi de fermeture sur l'énergie totale (1.3) se réécrit

$$\rho E = \frac{(\rho u)^2}{2\rho} + \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i}{\gamma_i - 1}.$$

Nous effectuons dans cette section des expériences numériques en une dimension d'espace pour plusieurs cas tests de tube à choc. La discontinuité séparant les deux états constants (états gauche et droit) de la donnée initiale est située à l'abscisse $x = 0$.

Après avoir présenté ces cas tests, nous donnons les résultats numériques obtenus pour plusieurs maillages uniformes en espace, et à l'ordre 1 d'approximation. Nous utilisons pour ces calculs les modèles à 1, 2 ou 3 lois de pression. Nous comparons systématiquement la solution donnée par la méthode de Relaxation proposée avec celle obtenue par une méthode de Roe développée par Berthon [10]. Les solutions discrètes obtenues par ces deux méthodes sont identiques pour les cas tests considérés. Notons toutefois que la méthode de Relaxation proposée est entropique, contrairement à la méthode de Roe (sauf à faire appel à des techniques de correction proposées par exemple par Harten).

Expérience 1 : tube à choc de Sod

Pour ce premier cas test, nous faisons le choix d'une seule loi de pression polytropique associée à un coefficient adiabatique fixé à 1.4. Le système étudié n'est autre que le système des équations d'Euler habituelles. Les conditions initiales sont celles du tube à choc de Sod. Les valeurs initiales, exprimées en variables primitives, sont rappelées dans le tableau suivant.

Expérience 1

	densité	vitesse	pression
État gauche	1.	0.	1.
État droit	0.125	0.	0.1

L'examen des résultats ne laisse apparaître aucune différence notable entre les méthodes de Roe et de Relaxation.
A titre d'illustration, nous effectuons deux expériences supplémentaires en prenant successivement $N = 2$ et $N = 3$. Nous comparons les solutions numériques avec les solutions exactes pour obtenir une nouvelle fois un bon accord. Nous précisons les coefficients adiabatiques ainsi que les états gauche et droit de la donnée initiale, et validons numériquement la méthode de Relaxation.

Expérience 2

N	γ_1	γ_2
2	1.6	1.4

Expérience 2

	densité	vitesse	pression 1	pression 2
État gauche	1.	1.	0.6	1.
État droit	1.0553	-0.8863	0.3277	0.1633

Expérience 3

N	γ_1	γ_2	γ_3
3	1.6	1.4	1.4

Expérience 3

État gauche

densité	vitesse	pression 1	pression 2	pression 3
1.	1.	0.6	1.	1.

État droit

densité	vitesse	pression 1	pression 2	pression 3
1.1583	-1.0020	0.2450	0.2890	0.4023

Présentation des résultats

Expérience 1 : tube à choc de Sod

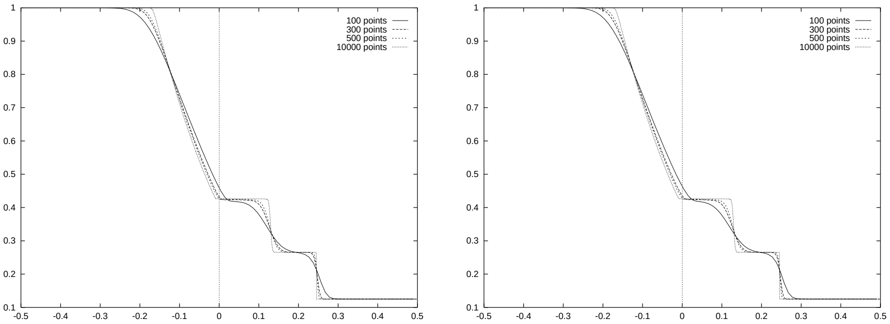

FIG. 1.1 – *Densité : Méthode de Roe, Méthode de Relaxation*

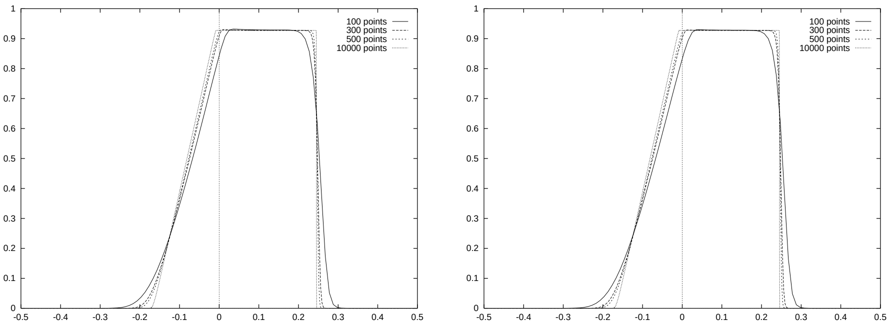

FIG. 1.2 – *Vitesse : Méthode de Roe, Méthode de Relaxation*

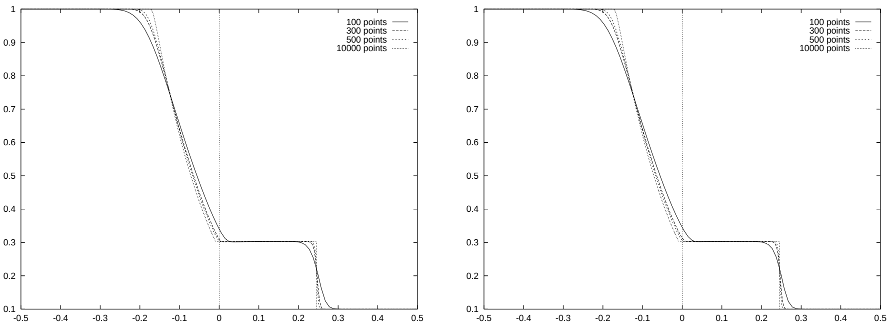

FIG. 1.3 – *Pression : Méthode de Roe, Méthode de Relaxation*

Expérience 2 : Cas 2 pressions

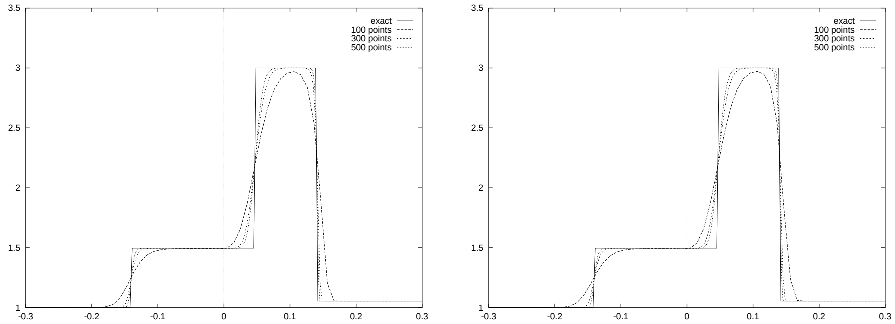

FIG. 1.4 – *Densité : Méthode de Roe, Méthode de Relaxation*

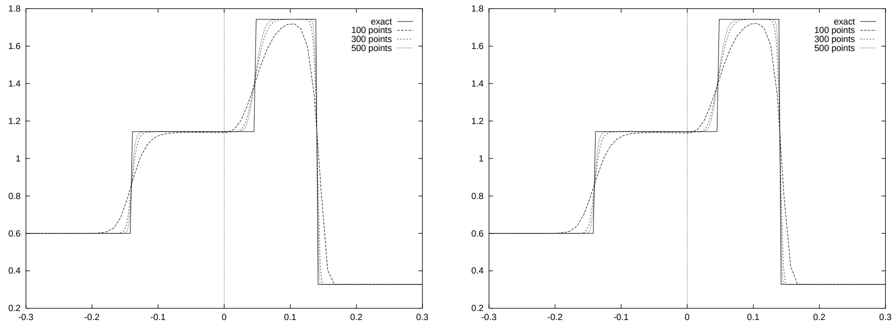

FIG. 1.5 – *Pression 1 : Méthode de Roe, Méthode de Relaxation*

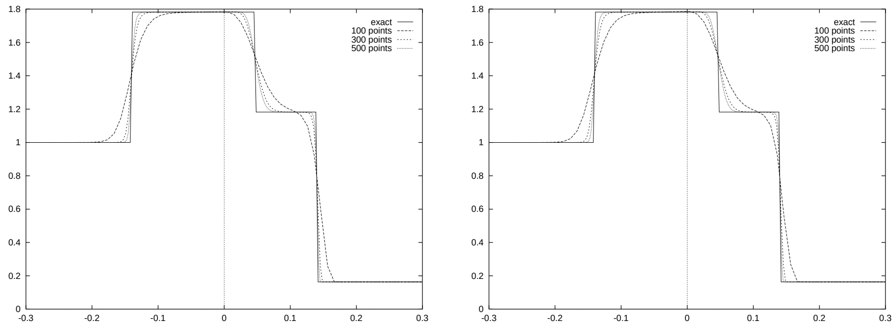

FIG. 1.6 – *Pression 2 : Méthode de Roe, Méthode de Relaxation*

Expérience 3 : Cas 3 pressions

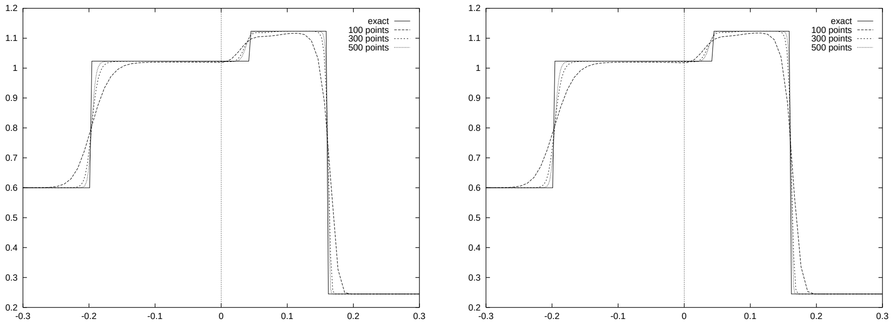

FIG. 1.7 – *Pression 1 : Méthode de Roe, Méthode de Relaxation*

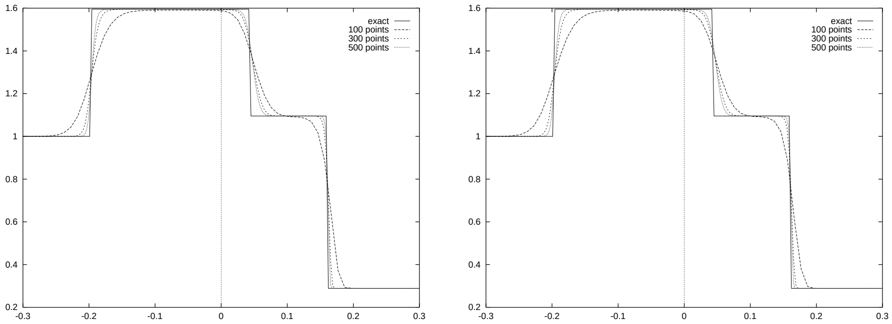

FIG. 1.8 – *Pression 2 : Méthode de Roe, Méthode de Relaxation*

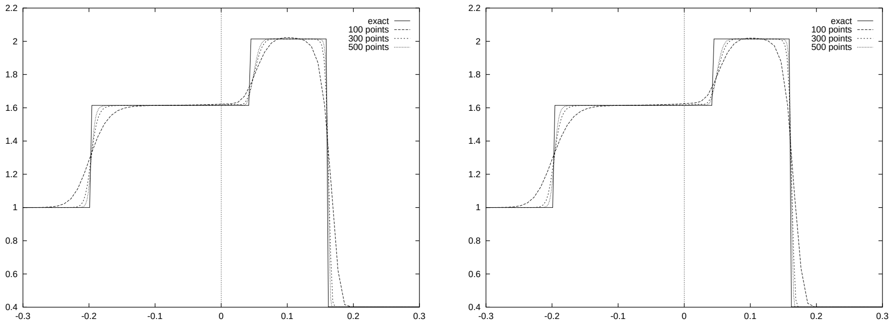

FIG. 1.9 – *Pression 3 : Méthode de Roe, Méthode de Relaxation*