Mathématiques générales pour la biologie

Benjamin Groux
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Septembre 2016

Introduction

Ce polycopié est issu d'un cours-TD de mathématiques générales pour la biologie enseigné en première année de licence à l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines de 2013 à 2015.

La finalité de ce module est la modélisation et la compréhension de certains phénomènes physiques, chimiques et surtout biologiques, ce qui permet de montrer l'application des mathématiques à d'autres disciplines. Les chapitres ont pour but de donner quelques méthodes classiques, ils sont constitués du minimum de théorie nécessaire, sans démonstration. Chaque chapitre est accompagné d'un ensemble de problèmes d'applications, hormis le premier chapitre de révisions. Les exercices de TD ne sont toutefois pas inclus dans ce document.

Les thèmes abordés sont les fonctions usuelles, les équations différentielles, les suites numériques et les matrices. Les probabilités et les statistiques appliquées à la biologie faisant l'objet d'un second module d'enseignement, elles ne sont pas traitées ici.

Les prérequis nécessaires pour aborder ce cours de première année de licence de biologie sont, outre la pratique de calculs élémentaires, la connaissance des fonctions de référence et la résolution d'équations du second degré.

Table des matières

Chapitre 1

Révisions sur les fonctions

Objectifs :
— Rappeler l'essentiel sur les limites et la dérivation.
— Énoncer les propriétés des fonctions sinus et cosinus.
— Énoncer les propriétés des fonctions ln et exp.
— Introduire le logarithme et l'exponentielle décimaux.
— Savoir manipuler ces fonctions dans les calculs et mener des études de fonctions.

1.1 Limites

Définitions. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

— Limite en $+\infty$:
  — On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, lorsque pour tout $A > 0$, il existe un réel x_A tel que $f(x) > A$ pour tout $x > x_A$;
  — On dit que f a pour limite l en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_ε tel que $|f(x) - l| < \varepsilon$ pour tout $x > x_\varepsilon$;
  — On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, lorsque pour tout $A > 0$, il existe un réel x_A tel que $f(x) < -A$ pour tout $x > x_A$.

— De même, on peut introduire les limites en $-\infty$, notées $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, en étudiant $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

— Enfin, on peut aussi introduire les limites en un réel a, notées $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, en étudiant $f(x)$ lorsque x tend vers a.

Remarque. Certaines fonctions n'ont pas forcément de limite en un point donné et il est parfois possible de parler de limite à gauche et de limite à droite.

Propriété. Les limites usuelles sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

	En $-\infty$	En 0^-	En 0^+	En $+\infty$
x	$-\infty$			$+\infty$
x^2	$+\infty$			$+\infty$
$\sqrt{x}$			0^+	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0^-	$-\infty$	$+\infty$	0^+
$\ln(x)$			$-\infty$	$+\infty$
e^x	0^+			$+\infty$

Propriétés.

— Si f et g admettent une limite, alors $f + g$ admet une limite pour chaque cas décrit par le tableau ci-dessous :

Limite de g / Limite de f	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

— Si f et g admettent une limite, alors $f \times g$ admet une limite pour chaque cas décrit par le tableau ci-dessous :

Limite de g / Limite de f	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$l \times l'$	$l \times l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$l \times l'$	$l \times l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

— Si f et g admettent une limite, alors $\dfrac{f}{g}$ admet une limite pour chaque cas décrit par le tableau ci-dessous :

Limite de g / Limite de f	$l' > 0$	$l' < 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	l/l'	l/l'	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$l < 0$	l/l'	l/l'	$-\infty$	$+\infty$	0^-	0^+
0^+	0^+	0^-	F.I.	F.I.	0^+	0^-
0^-	0^-	0^+	F.I.	F.I.	0^-	0^+
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

— Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Remarque. Il y a quatre formes indéterminées (F.I.) :

$$\ll \infty - \infty \gg, \quad \ll 0 \times \infty \gg, \quad \ll \frac{0}{0} \gg, \quad \ll \frac{\infty}{\infty} \gg .$$

Les limites usuelles, ainsi que les propriétés opératoires ci-dessus, permettent de calculer de nombreuses limites.

Exemples.

— On s'intéresse à la limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Quand $x \to 0$, $\sqrt{x}$ tend vers 0^+, donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \ .$$

— On s'intéresse à la limite $\lim_{x\to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$.
Quand $x \to -\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, donc

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \ .$$

— On s'intéresse à la limite $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2}$.
Quand $x \to +\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ et $1 + x^2$ tend aussi vers $+\infty$. On obtient donc une forme indéterminée (du type « $\frac{\infty}{\infty}$ »). Il est toutefois possible de calculer la limite en transformant l'expression.

1.2 Dérivation

Définition. Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. Cette limite est alors appelée nombre dérivé de f en a et notée $f'(a)$.

Le nombre dérivé a une interprétation graphique : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Définition. La dérivée de f, notée f', est la fonction qui à tout x associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Propriété. On donne ci-dessous les dérivées des fonctions usuelles.

Intervalle	$f(x)$	$f'(x)$	
$\mathbb{R}$	k	0	$k \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^*$
$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$	x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^*$
$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	

$]0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	
$]0;+\infty[$	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	

Propriété. Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I. On peut calculer les dérivées de certaines fonctions s'exprimant à l'aide de f et g.

Expression de la fonction	Expression de la dérivée	
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	
$\lambda f(x)$	$\lambda f'(x)$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	
$f(x)^n$	$nf'(x)f(x)^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{g(x)}$	$-\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$	g ne s'annule pas sur I
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	g ne s'annule pas sur I
$f(g(x))$	$g'(x)f'(g(x))$	

Les dérivées usuelles, ainsi que les propriétés opératoires ci-dessus, permettent de calculer de nombreuses dérivées.

Exemples.
— La fonction $f : x \mapsto 3x^2 + \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = 3 \times (2x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

— La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

La dérivée est principalement utilisée pour les études de variations.

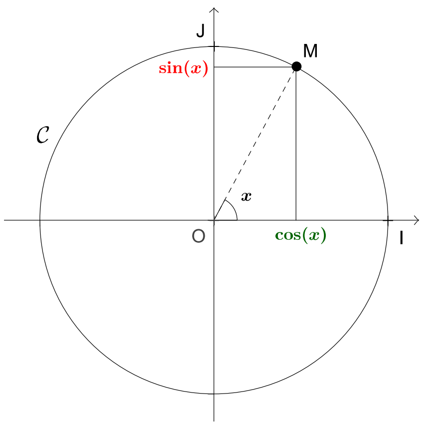
Théorème.
— Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
— Si f' est strictement positive sur I (sauf éventuellement en un point où f' s'annule), alors f est strictement croissante sur I.
— Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.
— Si f' est strictement négative sur I (sauf éventuellement en un point où f' s'annule), alors f est strictement décroissante sur I.
— Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Exemple. La dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ est $f' : x \mapsto 2x - 1$. La fonction f' est négative sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$. La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ puis croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$. On peut construire son tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$

1.3 Fonctions sinus et cosinus

Définitions. On considère un repère orthonormé direct du plan $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ et le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note M le point de $\mathcal{C}$ tel que la mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$ soit égale à x.
Le cosinus de x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse du point M et le sinus de x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée du point x.
Les fonctions cosinus et sinus sont définies respectivement par $\cos : x \mapsto \cos(x)$ et $\sin : x \mapsto \sin(x)$.



Propriétés.

— Valeurs particulières :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x), & \cos(-x) &= \cos(x), \\ \sin(x+2\pi) &= \sin(x), & \cos(x+2\pi) &= \cos(x), \\ \sin(x+\pi) &= -\sin(x), & \cos(x+\pi) &= -\cos(x), \\ \sin(\pi-x) &= \sin(x), & \cos(\pi-x) &= -\cos(x)\,. \end{aligned}$$

Remarque. Toutes ces formules peuvent être retrouvées graphiquement à l'aide du cercle trigonométrique.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

— Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\,. \end{aligned}$$

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

— Les fonctions sin et cos sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

— Si f est une fonction dérivable, alors la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(f(x))$ est $x \mapsto f'(x)\cos(f(x))$. De même, la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(f(x))$ est $x \mapsto -f'(x)\sin(f(x))$.

Exemple. La dérivée de $x \mapsto \cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -3\sin(3x)$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

— Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \sin(x) = \sin(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = y + 2k\pi \\ & \quad \underline{\text{ou}} \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \pi - y + 2k\pi\,, \\ \cos(x) = \cos(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = y + 2k\pi \\ & \quad \underline{\text{ou}} \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -y + 2k\pi\,. \end{aligned}$$

Exemple. On veut résoudre l'équation $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En remarquant que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, on a

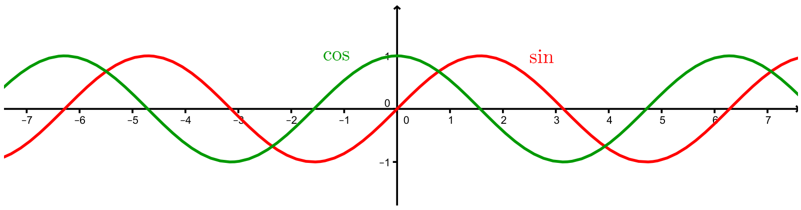
$$\begin{aligned} \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ & \quad \text{ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{8} + k\pi$$
$$\text{ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{3\pi}{8} + k\pi\,.$$

L'ensemble des solutions de $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Représentations graphiques.



1.4 Fonction logarithme népérien

Définition. La fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique fonction définie sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1.

Propriétés.

- On a $\ln(1) = 0$.
- La fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
- Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- Si f est une fonction dérivable et à valeurs dans $]0;+\infty[$, alors la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$.

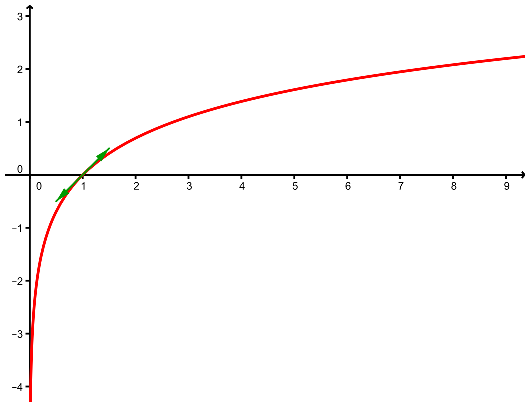
  Exemple. La dérivée de $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Ainsi,
$$\forall x, y \in]0;+\infty[, \quad x < y \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(y)\,.$$
- La fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, tout $x \in \mathbb{R}$ admet un unique antécédent dans $]0;+\infty[$ par la fonction ln.
- Pour tous $x, y \in]0;+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(x^n) = n\ln(x),$$
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)\,.$$
- On a :
$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty\,.$$

— (Théorème des croissances comparées) Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0 .$$

— Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $\ln(x) \leq x - 1$.

Représentation graphique.



1.5 Fonction exponentielle népérienne

Définition. La fonction exponentielle népérienne, notée exp, est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On note e la valeur $\exp(1) \approx 2,71828$ (appelé nombre d'Euler, ou constante de Néper) et on note $e^x = \exp(x)$ pour tout réel x.

Propriétés.
— On a $\exp(0) = 1$.
— La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
— Si f est une fonction dérivable, alors la dérivée de la fonction $x \mapsto \exp(f(x))$ est $x \mapsto f'(x)\exp(f(x))$.
Exemple. La dérivée de $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$.
— La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \Leftrightarrow e^x < e^y .$$

— La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$. Autrement dit, tout $x \in]0;+\infty[$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction exp et tout $x \in]-\infty;0]$ n'admet aucun antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction exp.
— Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit,

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad e^{\ln(x)} = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in]0;+\infty[, \quad x = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^x .$$

En particulier, $\ln(e) = 1$, $\ln(e^2) = 2$, $e^{\ln(2)} = 2$, etc.

— Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^{x+y} = e^x.e^y, \quad e^{nx} = (e^x)^n, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}\,.$$

— On a :

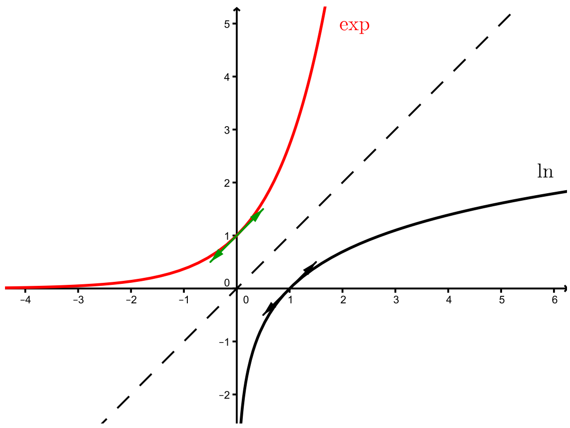
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+\,.$$

— (Théorème des croissances comparées) Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha (e^x)^\beta = 0\,.$$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq x + 1$.

Représentation graphique. En repère orthonormé, les courbes représentatives de ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



1.6 Fonctions logarithme et exponentielle décimaux

Définition. La fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}\,.$$

En particulier, $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, $\log(100) = 2$ etc.

Définition. La fonction exponentielle décimale, notée $\exp_{10}$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\exp_{10}(x) = e^{x.\ln(10)}\,.$$

En particulier, $\exp_{10}(0) = 1$, $\exp_{10}(1) = 10$, $\exp_{10}(-1) = 0,1$ etc.
On note $10^x = \exp_{10}(x)$ pour tout réel x.

Propriétés. Les fonctions log et $\exp_{10}$ ont des propriétés similaires à celles des fonctions ln et exp. Voici les principales propriétés dont on aura besoin en exercice.

- La fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
- La fonction $\exp_{10}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions log et $\exp_{10}$ sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit,
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad 10^{\log(x)} = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \log(10^x) = x,$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in]0;+\infty[, \quad x = \log(y) \Leftrightarrow y = 10^x\,.$$
- Pour tous $x, y \in]0;+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\log(xy) = \log(x) + \log(y), \quad \log(x^n) = n\log(x),$$
$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x), \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)\,.$$
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$10^{x+y} = 10^x.10^y, \quad 10^{nx} = (10^x)^n, \quad 10^{-x} = \frac{1}{10^x}, \quad 10^{x-y} = \frac{10^x}{10^y}\,.$$

Chapitre 2

Équations différentielles

Objectifs :
— Résoudre des équations différentielles linéaires du premier ordre.
— Résoudre des équations différentielles linéaires du second ordre homogènes et à coefficients constants.
— Résoudre des équations différentielles par changement de fonction.
— Modéliser certains phénomènes par des équations différentielles.

2.1 Rappels sur les primitives

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété. On suppose que f admet une primitive F_0 sur I. Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F : x \mapsto F_0(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

Exemple. L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 3x^2$ est $\left\{ F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + k \end{array},\ k \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarque. Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

Propriété. On donne ci-dessous des primitives des fonctions usuelles.

Intervalle	$f(x)$	$F(x)$	
$\mathbb{R}$	0	k	$k \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	1	x	
$\mathbb{R}$	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
$]0; +\infty[$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	
$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	

$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	

Propriété. Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I. On peut calculer des primitives de certaines fonctions s'exprimant à l'aide de f et g (on reconnaît à chaque fois la formule d'une dérivée).

Expression de la fonction	Expression d'une primitive	
$f'(x) + g'(x)$	$f(x) + g(x)$	
$\lambda f'(x)$	$\lambda f(x)$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$f(x)g(x)$	
$nf'(x)f(x)^{n-1}$	$f(x)^n$	$n \in \mathbb{N}^*$
$-\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$	$\dfrac{1}{g(x)}$	g ne s'annule pas sur I
$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	g ne s'annule pas sur I
$g'(x)f'(g(x))$	$f(g(x))$	

Remarque. En particulier, une primitive de $f'e^f$ est e^f, et une primitive de $\dfrac{f'}{f}$ est $\ln|f|$.

2.2 Vocabulaire usuel

Définition. Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction $x \mapsto y(x)$, et qui relie y, ses dérivées et la variable x.

Exemples. $y' = y^2$, $3y' - y = 0$, $y'' = 6x$ sont des équations différentielles. La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.

Les équations différentielles permettent de modéliser de nombreux phénomènes naturels : elles interviennent en électricité (circuit RLC), en mécanique (chute d'un objet sous l'effet de la gravité), en thermodynamique, en cinétique chimique, en biologie (croissance d'individus ou de populations) etc...

Il est donc intéressant de savoir résoudre une équation différentielle. On verra dans ce chapitre des méthodes pour en résoudre certains types.

Définition. Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I consiste à chercher toutes les solutions de cette équation définies sur I et à valeurs réelles.

Remarque. Lorsqu'on résoudra une équation différentielle (E), on écrira :

$$\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \mathcal{S}_E = \{......\}$$

ou

$$y \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow ......$$

Définitions. On appelle condition initiale une condition de la forme $y(x_0) = y_0$.
On appelle problème de Cauchy un système constitué d'une équation différentielle du premier ordre et d'une condition initiale.

Exemple. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (E) : y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La fonction exponentielle est une solution de ce problème de Cauchy (c'est sa définition). En fait, c'est même la seule solution (d'après le corollaire du paragraphe 2.4.1).

2.3 Équations différentielles à variables séparées

Définition. Une équation différentielle à variables séparées est une équation différentielle de la forme $f(y, y', ...) = g(x)$.

On peut résoudre certaines de ces équations grâce à un simple calcul de primitive.

Exemples.
— Soit $(E) : y' = 2x$. L'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \{x \mapsto x^2 + k,\ k \in \mathbb{R}\}$.
— On souhaite déterminer les solutions de $(E) : y' + x^2y^2 = 0$ qui ne s'annulent pas.
Soit y une fonction ne s'annulant pas sur un intervalle I.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ -\frac{y'(x)}{y(x)^2} = x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I,\ \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{3}x^3 + k \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I,\ y(x) = \frac{1}{x^3/3 + k}. \end{aligned}$$

2.4 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définitions. Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle de la forme

$$(E) \ :\ a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

où a, b, c sont trois fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a n'est pas la fonction nulle.
L'équation homogène associée à (E) est l'équation différentielle

$$(H) \ :\ a(x)y' + b(x)y = 0\,.$$

Le second membre de l'équation (E) est la fonction c.

2.4.1 Résolution d'une équation homogène

Théorème. On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I. L'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^{-F(x)} \end{array},\ k \in \mathbb{R} \right\}$$

où F est une primitive sur I de la fonction $\dfrac{b}{a}$.

Exemple. Soit $(H) : 2y' + 5y = 0$. Ici, on a $I = \mathbb{R}$ et $\dfrac{b(x)}{a(x)} = \dfrac{5}{2}$, on peut donc choisir $F(x) = \dfrac{5}{2}x$. L'ensemble des solutions de (H) est donc $\mathcal{S}_H = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^{-5x/2} \end{array},\ k \in \mathbb{R} \right\}$.

Corollaire. On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I. Tout problème de Cauchy pour l'équation (H) admet une unique solution.

Exemple. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} (E) : y' - 2xy = 0 \\ y(0) = 2 \end{array} \right.$$

D'après le corollaire ci-dessus, on sait qu'il existe une unique solution. De plus, l'équation (E) est homogène et une primitive de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$. D'après le théorème précédent, l'ensemble des solutions de (E) est donc $\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^{x^2} \end{array},\ k \in \mathbb{R} \right\}$.
La solution recherchée correspond à k tel que $ke^{0^2} = 2$, c'est-à-dire $k = 2$.
La solution du problème de Cauchy est donc $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2e^{x^2} \end{array}$.

2.4.2 Résolution d'une équation avec second membre

Théorème. On suppose qu'on connaît une solution y_p de (E). L'ensemble des solutions de (E) est alors

$$\mathcal{S} = \{y : x \mapsto y_H(x) + y_p(x),\ y_H \in \mathcal{S}_H\}$$

Autrement dit, les solutions de (E) sont les fonctions s'écrivant comme somme d'une solution de (H) et d'une solution particulière de (E).

Corollaire. On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur I. Tout problème de Cauchy pour l'équation (E) admet une unique solution.

On a vu dans le paragraphe précédent comment déterminer les solutions de (H). Pour résoudre (E), il s'agit désormais d'obtenir une solution particulière.

Lorsqu'aucune solution particulière n'est proposée, on utilise l'une des deux méthodes suivantes :

— il existe une solution particulière évidente (fonction constante ou ayant une expression simple) : on vérifie qu'elle est bien solution et on a terminé ;
— on pense qu'il existe une solution particulière d'une certaine forme : on recherche une solution de la forme souhaitée en introduisant des paramètres à calculer.

Exemples.
— On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (E) : y' + y = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

D'après le corollaire ci-dessus, il existe une unique solution.
L'équation homogène associée à (E) est $(H) : y' + y = 0$. L'ensemble de ses solutions est $\mathcal{S}_H = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^{-x} \end{array},\ k \in \mathbb{R} \right\}$.
Ensuite, la fonction $y_p : x \mapsto 2$ est une solution évidente de (E).
L'ensemble des solutions de (E) est donc $\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^{-x} + 2 \end{array},\ k \in \mathbb{R} \right\}$.
La solution recherchée correspond à k tel que $ke^0 + 2 = 1$, c'est-à-dire $k = -1$.
La solution du problème de Cauchy est donc $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2 - e^{-x} \end{array}$.

— Soit $(E) : 2y' - 4y = 2x - 3$.
L'équation homogène associée à (E) est $(H) : 2y' - 4y = 0$. L'ensemble de ses solutions est $\mathcal{S}_H = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^{2x} \end{array},\ k \in \mathbb{R} \right\}$.
On ne voit pas de solution évidente et on peut penser qu'il existe une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$.
Soient alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on note $y : x \mapsto \alpha x + \beta$.

$$\begin{array}{rcl} y \text{ est solution de } (E) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ 2\alpha - 4(\alpha x + \beta) = 2x - 3 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ -4\alpha x + (2\alpha - 4\beta) = 2x - 3 \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} -4\alpha = 2 \\ 2\alpha - 4\beta = -3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

Une solution particulière de (E) est donc $y_p : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^{2x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{array},\ k \in \mathbb{R} \right\}$.

2.5 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes et à coefficients constants

Définitions. Une équation différentielle linéaire du second ordre homogène et à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$(E) \ : \ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

où a, b, c sont trois réels et $a \neq 0$.
L'équation caractéristique de (E) est l'équation du second degré

$$ar^2 + br + c = 0\,.$$

Théorème. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

— Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \end{array} \ ,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une unique solution r_1 et l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (k_1 x + k_2) e^{r_1 x} \end{array} \ ,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

— Si $\Delta < 0$, alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{b}{2a}x} \left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2|a|} x \right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2|a|} x \right) \right) \end{array} \ ,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemples.

— Soit $(E) : y'' - 5y' + 4y = 0$. Le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 - 5r + 4 = 0$ est $\Delta = 9 > 0$, et ses racines sont 1 et 4. L'ensemble des solutions de (E) est donc $\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & k_1 e^{x} + k_2 e^{4x} \end{array} \ ,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

— Soit $(E) : 2y'' + 2y' + y = 0$. Le discriminant de l'équation caractéristique $2r^2 + 2r + 1 = 0$ est $\Delta = -4 < 0$. L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{x}{2}} \left(k_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + k_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) \end{array} \ ,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.6 Changement de fonction

Pour certaines équations différentielles dont on ne connaît pas a priori les solutions, un changement de fonction peut permettre de se ramener à une équation différentielle qu'on sait résoudre.

Exemple. On va résoudre $(E) : y' + 2y - y\ln(y) = 0$ en effectuant le changement de fonction $z = \ln(y)$.
Soit y une fonction à valeurs strictement positives. On pose $z = \ln(y)$, on a donc $y = e^z$.

$$\begin{array}{rcl} y \text{ est solution de } (E) & \Leftrightarrow & e^z \text{ est solution de } (E) \\ & \Leftrightarrow & z'e^z + 2e^z - e^z.z = 0 \\ & \Leftrightarrow & z \text{ est solution de } (E') : z' - z = -2. \end{array}$$

L'équation homogène associée à (E') est $(H') : z' - z = 0$. L'ensemble de ses solutions est $\mathcal{S}_{H'} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^x \end{array} \ ,\ k \in \mathbb{R} \right\}$.

De plus, la fonction constante $x \mapsto 2$ est une solution particulière de (E').
L'ensemble des solutions de (E') est donc $\mathcal{S}_{E'} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ke^x + 2 \end{array}, \; k \in \mathbb{R} \right\}$.
Donc :

$$\begin{array}{lcl} y \text{ est solution de } (E) & \Leftrightarrow & \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = ke^x + 2 \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{ke^x + 2}. \end{array}$$

2.7 Annexe : Éléments pour la modélisation de phénomènes

Dans certains exercices, il est demandé de déterminer une équation différentielle traduisant un phénomène. Il faut donc être capable de traduire un énoncé en équation et vice-versa.

Voici quelques éléments pour ce genre d'exercices.

- En général, une vitesse ou une variation correspond à une dérivée.
- Dire qu'une grandeur y est en croissance exponentielle de taux k, ou dire que la variation de y est proportionnelle à y, signifie que y vérifie : $y' = ky$.
- Dans certaines situations, il est possible de déterminer le signe de la constante k, par exemple, dans un modèle de croissance de population, on a $k > 0$.

Exemple. On injecte un médicament dans le sang d'un patient. On suppose que la variation de la concentration $C(t)$ du médicament à l'instant t est proportionnelle à l'écart entre cette concentration et la concentration maximale $C_{\max}$. L'équation différentielle régissant ce phénomène est : $C'(t) = k(C(t) - C_{\max})$ avec $k < 0$.

Chapitre 3

Suites numériques

Objectifs :
— Rappeler les généralités sur l'étude des suites (variations, comportement asymptotique).
— Étudier des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
— Raisonner par récurrence.
— Étudier des suites récurrentes d'ordre 1.
— Modéliser certains phénomènes par des suites.

3.1 Vocabulaire usuel

3.1.1 Suite réelle

Définition. Une suite réelle est une famille de nombres réels, indexée par des entiers.
On utilise la notation $(u_n)_{n \geq n_0}$, u_n est appelé le terme d'indice n de la suite, n_0 est le rang à partir duquel la suite est définie.

On rencontrera principalement deux types de suites :
— celles où u_n est défini explicitement en fonction de n (exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$),
— celles où u_n est défini par une relation de récurrence et des termes initiaux (exemple : $u_{n+1} = 2 + u_n$ avec $u_0 = 1$).
Les techniques pour étudier ces suites sont assez différentes.

Remarque. Dans la suite, on considère des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$, et on notera simplement (u_n) pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.1.2 Suite monotone

Définitions. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :
— (u_n) est croissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$,
— (u_n) est strictement croissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$,
— (u_n) est décroissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$,

— (u_n) est strictement décroissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.

Exemples.
— Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
— La suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas monotone, car ses termes valent alternativement -1 et 1.

3.1.3 Suite bornée

Définitions. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :
— (u_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$,
— (u_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$,
— (u_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée. Cela revient à dire qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$, ou encore à dire qu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Exemple. On va étudier les variations et la bornitude de la suite de terme général $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$.
Pour cela, on étudie la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$ car $u_n = f(n)$.
La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$, et pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+5) - (2x^2+1)2x}{(x^2+5)^2} = \frac{18x}{(x^2+5)^2} \geq 0\,.$$

De plus, $f(0) = \dfrac{1}{5}$ et quand $x \to +\infty$, $f(x) = \dfrac{2 + 1/x^2}{1 + 5/x^2}$ tend vers 2. On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	2

On en déduit que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est bornée entre $\dfrac{1}{5}$ et 2.

3.2 Comportement asymptotique des suites réelles

3.2.1 Définitions

Définition. Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge de limite l lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel on a toujours $|u_n - l| \leq \varepsilon$, ou de manière équivalente, $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$. On appelle alors l la limite de la suite (u_n).

Définition. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) admet une limite égale à $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang à partir duquel on a toujours $u_n > A$ (resp. $u_n < A$).

Remarques.
- La notion de limite pour les suites est proche de celle pour les fonctions.
- Il est possible qu'une suite n'admette pas de limite !
- Chercher la limite de (u_n) revient à considérer u_n et à faire tendre n vers $+\infty$.

Propriétés. Comportement asymptotique des suites usuelles :
- Les suites de terme général n, n^2, n^3, ..., $\sqrt{n}$, $\ln(n)$, e^n admettent une limite égale à $+\infty$.
- Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^3}$, ..., $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ admettent une limite égale à 0.
- La suite de terme général q^n $\begin{cases} \text{admet une limite égale à } +\infty \text{ si } q > 1 \\ \text{admet une limite égale à } 0 \text{ si } -1 < q < 1 \\ \text{n'admet pas de limite si } q \leq -1 \end{cases}$.
- Les suites de terme général $(-1)^n$, $\cos(n)$, $\sin(n)$ n'admettent pas de limite.

3.2.2 Opérations sur les limites

Les règles opératoires sont exactement les mêmes que pour les limites de fonctions. On rappelle qu'il y a quatre formes indéterminées : « $\infty - \infty$ » , « $0 \times \infty$ » , « $\dfrac{0}{0}$ » et « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

Exemples.
- La suite de terme général $-2n^3 + 1$ admet une limite égale à $-\infty$.
- La suite de terme général $\dfrac{2n^2+1}{n^2+5}$ converge de limite 2.

3.2.3 Utilisation des inégalités

Pour étudier le comportement asymptotique d'une suite, il peut être judicieux de la comparer à une suite ayant une expression plus simple et dont le comportement asymptotique est connu.

Théorème. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, (u_n) converge de limite l et (v_n) converge de limite l'. On a alors $l \leq l'$.

Exemple. Soit (u_n) une suite convergente dont tous les termes sont positifs. Alors la limite de (u_n) est positive.

Remarque. Si on a $u_n < v_n$ au lieu de $u_n \leq v_n$, alors on a toujours $l \leq l'$ et non $l < l'$.

Théorème. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

— Si (u_n) admet une limite égale à $+\infty$, alors (v_n) également.
— Si (v_n) admet une limite égale à $-\infty$, alors (u_n) également.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(4 + 2\cos(n) + (-1)^n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4 + 2\cos(n) + (-1)^n \geq 4 - 2 - 1 = 1$ donc $u_n \geq n$. La suite (u_n) admet donc une limite égale à $+\infty$.

Théorème (des gendarmes). Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, (u_n) converge de limite l et (w_n) converge également de limite l. Alors la suite (v_n) converge de limite l.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \geq 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
Pour tout $n \geq 1$, on a $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ et $-\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n}$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. D'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge de limite 0.

3.3 Suites arithmético-géométriques

3.3.1 Suites arithmétiques

Définition. Soient (u_n) une suite réelle et r un réel. On dit que (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + r$.

Exemples.

— La suite de terme général $u_n = 3n + 2$ est arithmétique de raison 3 car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$.
— La suite de terme général $u_n = n^2 + 1$ n'est pas arithmétique car $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$ dépend de n.

Propriétés. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$. Plus généralement, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.
— On en déduit facilement les variations et la limite de (u_n) selon que r soit positif, nul ou négatif.

— Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, la somme $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ est égale à

$$(n - p + 1)\frac{u_p + u_n}{2}.$$

3.3.2 Suites géométiques

Définition. Soient (u_n) une suite réelle et q un réel. On dit que (u_n) est géométique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = qu_n$.

Exemples.
— La suite de terme général $u_n = 2^n$ est géométique de raison 2 car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.
— La suite de terme général $u_n = n^2$ n'est pas géométique car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ dépend de n.

Propriétés. Soit (u_n) une suite géométique de raison q.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 q^n$. Plus généralement, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p q^{n-p}$.
— On en déduit facilement les variations et le comportement asymptotique de (u_n) selon les valeurs de q et u_0.
— Lorsque $q \neq 1$, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, la somme $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ est égale à

$$\frac{u_p - u_{n+1}}{1 - q}.$$

3.3.3 Suites arithmético-géométriques

Définition. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Remarque. Lorsque $a = 1$ (resp. $b = 0$), on a une suite arithmétique (resp. géométrique) donc on sait l'étudier. Dans le cas où $a \neq 1$, il est également possible d'obtenir l'expression de u_n en fonction de n. Pour cela :
— on cherche l solution de l'équation $l = al + b$,
— on définit une nouvelle suite (v_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - l$, et on montre que (v_n) est géométrique de raison a,
— on en déduit l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

Exemple. Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
On cherche l solution de $l = 2l - 3$ et on trouve $l = 3$.
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2.
Puisque $v_0 = u_0 - 3 = 2$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2.2^n = 2^{n+1}$, donc $u_n = 2^{n+1} + 3$.

3.4 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout entier n. Ceci est très pratique puisque cela évite de faire une infinité de démonstrations. Un raisonnement par récurrence s'effectue en deux étapes :

— l'initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie,

— l'hérédité : on fixe un entier n, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.

Si ces deux étapes sont vérifiées, cela signifie que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques.

— Il est possible d'initialiser la récurrence à un rang n_0 en vérifiant que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie. Dans ce cas, $\mathcal{P}(n)$ ne sera vraie que pour $n \geq n_0$.

— Dans l'hérédité, il est essentiel d'exploiter le lien entre $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ pour montrer que : si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ aussi.

— On ne fait d'ailleurs pas de raisonnement par récurrence s'il n'y a pas de lien entre $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.

Exemple. Soit $a > 0$. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$. On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $(1+a)^n \geq 1+na$ » et on va procéder par récurrence.
• Initialisation : On a $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$, donc $(1+a)^0 \geq 1+0\times a$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
• Hérédité : On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang n et on va démontrer qu'alors, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie. Autrement dit, on suppose que $(1+a)^n \geq 1+na$ et on va en déduire que $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.
On a $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$ d'après l'hypothèse de récurrence, donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

3.5 Suites récurrentes d'ordre 1

Définition. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est une suite récurrente d'ordre 1 s'il existe une fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Les suites arithmético-géométriques sont des cas particuliers de suites récurrentes d'ordre 1, mais contrairement à celles-ci, il ne sera pas possible en général d'obtenir l'expression de u_n en fonction de n. Toutefois, on pourra quand même étudier certaines suites définies par itération.

Lorsque l'énoncé n'indique pas précisément la démarche à suivre, il peut être utile de commencer par faire un dessin ou calculer les premiers termes de la suite, afin d'avoir une idée du comportement de la suite. Ensuite, on peut adopter les techniques expliquées ci-après en ayant en tête que les deux points qui nous intéressent sont :

— les variations de la suite,
— la convergence de la suite (et le calcul de la limite éventuelle).

Dans la suite de ce paragraphe, on considère une suite réelle (u_n) et une fonction f telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3.5.1 Recherche d'un intervalle stable

Cette étape préliminaire permet souvent de simplifier l'étude des variations et de la convergence de (u_n). L'objectif est d'obtenir un intervalle contenant tous les termes de la suite (à partir d'un certain rang).

Définition. On dit qu'un intervalle I est stable par f si pour tout $x \in I$, $f(x)$ appartient à I.

Exemples.
— L'intervalle $[-1; 1]$ est stable par sin, tout comme les intervalles $[-1; 0]$ et $[0; 1]$.
— L'intervalle $[0; +\infty[$ est stable par la fonction $x \mapsto x^2$, tout comme les intervalles $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$.

Propriété. Si I est un intervalle stable par f et si un terme de la suite appartient à I, alors tous les termes suivants sont aussi dans I.

Remarques.
— La recherche d'un intervalle stable peut s'effectuer en étudiant la fonction f.
— On aura intérêt à choisir un intervalle stable de taille la plus petite possible et qui contient un des premiers termes de la suite.
— On peut se passer de cette étape s'il est évident que tous les termes de la suite sont dans un intervalle donné qui convient pour la suite de l'étude.

3.5.2 Étude des variations

Pour étudier les variations de (u_n), on peut :
— procéder de manière directe,
— procéder par récurrence,
— étudier la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur l'intervalle stable I déterminé auparavant, comme le justifie la propriété suivante.

Propriété. Si la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est positive (resp. négative) sur I, alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).

3.5.3 Étude de la convergence

Les deux étapes précédentes permettent parfois de conclure quant à la convergence de (u_n) grâce à la propriété suivante.

Théorème. Une suite croissante majorée converge. Une suite décroissante minorée converge.

Il est alors possible d'étudier sa limite.

Théorème. Si f est continue sur I et si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie $f(l) = l$.

3.5.4 Exemple

On étudie la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$. On note $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

• L'intervalle $]0; +\infty[$ est stable par f puisque pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 0$. On a donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On peut être plus précis en étudiant f (il faudra être précis pour la suite de l'étude de toute manière).
La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $f'(x)$ est positif si et seulement si $\dfrac{1}{x^2} \leq 1$, ssi $x^2 \geq 1$, ssi $x \geq 1$. On en déduit le tableau de variations de f, qu'on peut compléter en remarquant que f admet des limites en 0^+ et en $+\infty$ égales à $+\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que l'intervalle $I = [1; +\infty[$ est stable par f et, puisque u_1 est dans cet intervalle, que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \in [1; +\infty[$.
On remarque qu'au passage, on a montré que (u_n) est minorée.

• Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(-u_n + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1 - u_n^2}{u_n} \leq 0$$

puisque $u_n \geq 1$ d'après ce qui précède. La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 1.

• La suite (u_n) étant décroissante (à partir du rang 1) et minorée, elle converge d'après un théorème du cours.

• On note l sa limite. Comme f est continue sur I, d'après un autre théorème du cours, on a $f(l) = l$, donc $\frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{l}\right) = l$, donc $\frac{1}{2l} = \frac{1}{2}l$, donc $l^2 = 1$. La suite (u_n) est positive donc sa limite l aussi, ce qui donne $l = 1$.

En conclusion, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et converge de limite 1.

Chapitre 4

Matrices

Objectifs :
— Mener des calculs matriciels.
— Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour inverser une matrice ou un système linéaire.
— Diagonaliser une matrice de taille 2 ou 3.
— Modéliser certains phénomènes par des matrices.

4.1 Calcul matriciel

4.1.1 Vocabulaire usuel

Définition. Une matrice de taille (n, p) est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

Notation. Pour une matrice A, on note $a_{i,j}$ le coefficient sur la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.

Exemples.
— $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice $(2, 3)$. On a $a_{1,1} = 1$, $a_{2,1} = 3$, $a_{1,2} = -1$ etc.
— $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/3 \\ \pi & 2 & x \\ 0,57 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice $(3, 3)$.

Définitions. On dit qu'une matrice de taille (n, p) est une matrice colonne (resp. ligne, carrée) lorsque $p = 1$ (resp. $n = 1$, $n = p$).
On dit qu'une matrice carrée est diagonale lorsque ses termes non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire $\forall i \neq j$, $a_{i,j} = 0$.

Exemples.
— $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

— Les matrices unité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales.

On peut effectuer plusieurs opérations sur les matrices.

4.1.2 Somme de deux matrices

Définition. Pour deux matrices A et B de *même* taille (n, p), $A + B$ est la matrice de taille (n, p) de terme général $a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemples.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & x-1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ n'est pas définie.}$$

4.1.3 Multiplication d'une matrice par un réel

Définition. Pour une matrice A de taille (n, p) et $\lambda \in \mathbb{R}$, λA est la matrice de taille (n, p) de terme général $\lambda a_{i,j}$.

Exemple.

$$3 \times \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3x \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.1.4 Multiplication de deux matrices

Définition. Pour une matrice A de taille $(n, \boldsymbol{p})$ et une matrice B de taille $(\boldsymbol{p}, q)$, AB est la matrice de taille (n, q) de terme général $a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,p}b_{p,j}$.

Exemples.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ n'est pas définie.}$$

Remarques.
— Multiplier une matrice par une matrice unité ne modifie pas cette matrice.
— L'ordre de multiplication a une importance (en général, $AB \neq BA$).
— Pour une matrice *carrée* A et $n \in \mathbb{N}$, on note $A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ fois}}$.

4.1.5 Déterminant d'une matrice carrée

On ne s'intéresse ici qu'aux déterminants de matrices de taille $(2,2)$ ou $(3,3)$.

Définitions.

— Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de taille $(2,2)$. Le déterminant de A, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, est le nombre $ad - bc$.

— Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de taille $(3,3)$. Le déterminant de A, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, est le nombre $aei+dhc+gbf-gec-hfa-idb$.

Remarques.

— Le déterminant est un nombre, pas une matrice.

— Pour calculer un déterminant de taille 3, on développe suivant une ligne ou une colonne (contenant des zéros de préférence) en multipliant les coefficients de la matrice par 1 ou -1 suivant leur position. $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

— Si les termes sous la diagonale et/ou les termes au-dessus de la diagonale sont nuls, alors le déterminant de la matrice est égal au produit des termes diagonaux.

Exemples.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

En développant par rapport à la première colonne, on calcule

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

et en développant par rapport à la deuxième ligne, on obtient également

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\,.$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

4.2 Méthode du pivot de Gauss et applications

4.2.1 Description de la méthode

Afin d'inverser une matrice ou de résoudre un système linéaire, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss. Le principe de cette méthode est d'effectuer une succession d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice (resp. du système) jusqu'à obtenir la matrice unité (resp. un système échelonné).

Les opérations élémentaires sont :

— l'échange de lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$),

— la multiplication d'une ligne par un réel non nul ($L_i \leftarrow \lambda L_i$),

— l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

Remarques.

— L'idée est qu'on utilise une opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ pour faire apparaître un 0, une opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ pour faire apparaître un 1 et une opération $L_i \leftrightarrow L_j$ lorsqu'on pense que cela simplifiera les calculs.

— Les opérations qu'on effectue doivent être réversibles. On n'a donc pas le droit d'effectuer certaines opérations simultanément, ni d'autres opérations que celles décrites précédemment. Par exemple, les opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda$ et $L_i \leftarrow L_i \times L_j$ sont interdites.

— La méthode doit son nom aux coefficients non nuls qui servent de base pour faire apparaître des zéros dans les différentes étapes et qu'on appelle pivots.

4.2.2 Inverse d'une matrice

Définition. On dit qu'une matrice *carrée* A de taille (n, n) est inversible lorsqu'il existe une matrice B de taille (n, n) telle que $AB = BA = I_n$, où I_n est la matrice unité de taille n. La matrice B est alors unique, on l'appelle inverse de A et on la note A^{-1}.

Théorème. Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Exemples. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ sont inversibles, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

On peut calculer l'inverse d'une matrice à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Pour cela, on écrit les matrices A et I_n côte à côte, on transforme A à l'aide d'opérations élémentaires et on effectue simultanément les mêmes opérations sur I_n. Lorsque la matrice A est transformée en I_n, c'est que la matrice I_n est transformée en A^{-1}.

Exemple.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & -5 & -2 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow -\tfrac{1}{10}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{2}{10} & -1 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{5}{10} & -\frac{2}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{10} & 0 & \frac{2}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{5}{10} & -\frac{2}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

L'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est donc $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

4.2.3 Système d'équations linéaires

Définition. Un système d'équations linéaires est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des réels.
Résoudre le système signifie déterminer l'ensemble des $(x_1, \dots, x_p)$ satisfaisant les n relations.

Un système peut se réécrire à l'aide d'une relation matricielle et vice-versa. En notant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix},$$

le système ci-dessus est équivalent à la relation $AX = B$.

Théorème. On considère un système $AX = B$.
— Si A est inversible, alors ce système admet une unique solution, qui est $A^{-1}B$.
— Si A n'est pas inversible, alors il admet soit aucune, soit une infinité de solutions.

Dans le cas où on a déjà calculé A^{-1}, un simple produit de matrices permet donc de résoudre le système. Dans tous les autres cas, on peut résoudre le système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Pour cela, on transforme le système à l'aide d'opérations élémentaires jusqu'à obtenir un système dit échelonné, qui est simple à résoudre.

Exemples. Soit le système

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ \quad\quad y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = -1 \end{cases}.$$

(S_1) peut se réécrire

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Or, on a vu dans la section précédente que la matrice qui apparaît ici est inversible et on a calculé son inverse. Le système (S_1) admet donc une unique solution, qui est donnée par

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant le système

$$(S_2)\ :\ \begin{cases} \boxed{x} + y + 3z = -1 \\ x + 2z = 0 \\ -2x + y - 3z = -1 \end{cases}.$$

On a :

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ -\boxed{y} - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ -y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = -1 \\ y + z = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z - 1 \\ x = -y - 3z - 1 = -2z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_2) est donc $\mathcal{S}_{S_2} = \{(-2\lambda, -\lambda - 1, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4.3 Diagonalisation

4.3.1 Matrices diagonales

Rappel. Une matrice diagonale est une matrice carrée dont les coefficients situés en dehors de la diagonale sont nuls.

Les calculs avec les matrices diagonales sont plus simples.

Propriétés. Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_p \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de taille (p, p) et soit A une matrice carrée de taille (p, p).

— AD est la matrice de terme général $a_{i,j} d_j$, autrement dit, la j-ième colonne de AD est la j-ième colonne de A multipliée par d_j.

— DA est la matrice de terme général $d_i a_{i,j}$, autrement dit, la i-ième ligne de DA est la i-ième ligne de A multipliée par d_i.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_p^n \end{pmatrix}$.

Exemples. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a

$$AD = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad DA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

4.3.2 Diagonalisation

Partant d'une matrice carrée A, on va chercher une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. C'est ce qu'on appelle diagonaliser A.

Définitions. Soit A une matrice carrée de taille (p, p).

— Le polynôme caractéristique de A, noté $p_A(\lambda)$, est le déterminant $\det(A - \lambda I_p)$.

— Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $p_A(\lambda) = 0$.

— Un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ est un vecteur colonne X non nul tel que $AX = \lambda X$.

Pour diagonaliser A, on adoptera la méthode suivante :

— calculer le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$,

— en déduire les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$,

— calculer un vecteur propre X_i associé à chaque valeur propre λ_i en résolvant un système,

— noter

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & \dots & X_p \end{array} \right)$$

et écrire la relation $AP = PD$,

— vérifier que P est inversible en calculant son déterminant, et écrire la relation $A = PDP^{-1}$.

Cela permettra de calculer facilement les puissances de A notamment.

Propriété. Si $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

Remarque. Certaines matrices ne sont pas diagonalisables.

Exemple. On va diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique de A est

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)\,.$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et 3.
On va maintenant calculer un vecteur propre associé à 1, puis un vecteur propre associé à 3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
On a $AX = X \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 3x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x = 0$. Un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est donc par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ensuite, $AX = 3X \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 3x = 3x \\ x+y = 3y \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x = 2y$. Un vecteur propre associé à la valeur propre 3 est donc par exemple $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
En notant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a donc $AP = PD$. La matrice P est inversible puisque $\det(P) = -2 \neq 0$, donc on a $A = PDP^{-1}$.
On a ainsi diagonalisé la matrice A.
On pourrait également calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2.3^n \\ 1 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ \dfrac{3^n - 1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Références

Références générales pour compléter le cours :

• Driss BOULARAS, Daniel FREDON & Daniel PETIT, *Mini manuel de mathématiques pour les sciences de vie et de l'environnement*, Dunod, 2009.
• Joël MALAVAL *et al.*, *Hyperbole Terminale S spécifique*, Nathan, 2012.
• Joël MALAVAL *et al.*, *Hyperbole Terminale S spécialité*, Nathan, 2012.

Sources desquelles sont issus certains problèmes d'application proposés dans ce document :

• Académie de Besançon, *P@nse-math, Académie de Besançon · Voir le sujet - Suite qui ressemble à de la chimie*, [En ligne]. `http://pansemath.ac-besancon.fr/viewtopic.php?f=9&t=3718` (Page consultée le 4 novembre 2013)
• Annales du baccalauréat Scientifique.
• Pierre AUGER, Christophe LETT & Jean-Christophe POGGIALE, *Modélisation mathématique en écologie*, Dunod, 2010.
• Edward BATSCHELET, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, Springer, 1979.
• Simone BÉNAZETH, Michel BONIFACE, Catherine DEMARQUILLY, Virginie LASSERRE, Mohamed LEMDANI & Ionnis NICOLIS, *Biomathématiques, analyse, algèbre, probabilités, statistiques*, Masson, 2007.
• Jean-Paul BERTRANDIAS & Françoise BERTRANDIAS, *Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé*, EDP Sciences, 1997.
• Sandrine CHARLES, Dominique MOUCHIROUD, Lionel HUMBLOT, Muriel NEY & Christophe BATIER, *Accueil*, [En ligne]. `http://mathsv.univ-lyon1.fr/` (Page consultée le 2 septembre 2015)
• André GIROUX, *Mathématiques pour chimistes*, Presses Universitaires de Montréal, 1983.
• Jean-Marie LEGAY, *Mathématiques pour biologistes*, Masson, 1981.