UVSQ
LSMA651 **2015-2016**

Contrôle du 17 mars 2016 - 1h30

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (question de cours).
Montrer que pour une fonction convexe f, la valeur de f en deux points de minimum locaux est identique, et que si f est strictement convexe, alors deux points de minimum locaux coincident nécessairement.

Corrigé succinct. Voir le polycopié de cours.

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $X = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
2) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Corrigé succinct.
1) Comme $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (identité remarquable), il vient tout de suite que

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y|,$$

de sorte que $f(x, y)$ tend bien vers 0 lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$.
2) Par définition des dérivées partielles, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

3) D'après la question précédente, si f était différentiable en $(0,0)$, on aurait $df(0,0).(h_1,h_2) = 0$ pour tout (h_1,h_2). Ainsi, puisque d'après la définition de la différentielle

$$f(h_1,h_2) = f(0,0) + df(0,0).(h_1,h_2) + ||(h_1,h_2)||\varepsilon(h)$$

pour tout $h = (h_1,h_2)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$, il vient

$$f(h_1,h_2) = ||(h_1,h_2)||\varepsilon(h)$$

avec donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||} = 0.$$

Mais, si on se place sur le chemin particulier $h_1 = h_2$, on observe que

$$\frac{f(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||} = \frac{1}{2^{3/2}},$$

et cette quantité ne tend clairement pas vers 0 avec h. La fonction f ne peut donc pas être différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soit J la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av,v) - (b,v).$$

1) Montrer que A est définie positive.
2) Montrer que J admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer qu'il est unique.
4) Le calculer.

Corrigé succinct.
1) Des calculs simples montrent que les mineurs principaux sont égaux à 6, 3 et 4 et sont donc tous strictement positifs. La matrice symétrique A est donc définie positive.
2) On a vu en TD que lorsque la matrice symétrique A est définie positive, la fonctionnelle quadratique J est infinie à l'infini. Elle admet donc un minimum sur $\mathbb{R}^3$.
3) On a également vu en TD que lorsque la matrice symétrique A est définie positive, la fonctionnelle quadratique J est strictement convexe. Le minimum est donc unique.
4) D'après la condition d'optimalité du premier ordre, le point de minimum u annule le gradient de J en u qui est donné par $Au - b$. La résolution du système linéaire $Au = b$ donne que le point de minimum global de J est $u = (-5/4, 1/2, 5/4)^T$.

Exercice 4
On souhaite calculer les points de minimum locaux de la fonction

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

1) Déterminer les candidats potentiels en utilisant la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre.
2) Déterminer les candidats potentiels en utilisant également la condition nécessaire d'optimalité du second ordre.
3) En utilisant une condition suffisante d'optimalité, donner le ou les points de minimum locaux.
4) Les points de minimum locaux obtenus sont-ils globaux ?

Corrigé succinct.
1) La condition nécessaire d'optimalité du premier ordre dit que le vecteur gradient de la fonction doit s'annuler en un point de minimum local, de sorte que les candidats sont les solutions du système

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0, \end{cases}$$

ce qui donne les quatre candidats $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$ et $(-2, -1)$.
2) La condition nécessaire d'optimalité du second ordre dit que la matrice

Hessienne de la fonction, donnée ici par

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix},$$

doit être positive en un point de minimum local, c'est-à-dire que ses valeurs propres doivent être positives. Un calcul simple montrer que les valeurs propres de H sont données par $x-y$ et $x+y$. Le seul candidat qui résiste à cette condition est le point $(2,1)$.
3) Les mineurs principaux de la matrice Hessienne sont donnés pas $6x$ et $36(x^2-y^2)$. Au voisinage du point $(2,1)$, ces mineurs sont proches de 12 et 102 et sont donc strictement positifs. La matrice Hessienne est donc définie positive dans un voisinage du point $(2,1)$ ce qui est suffisant, puisque ce point annule aussi le vecteur gradient, pour dire que ce point est effectivement un point de minimum local.
4) On remarque que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 15x = -\infty$$

de sorte que f ne peut pas admettre de minimum global.