

Partiel du 16 mars 2015 - 1h30

Aucun document n'est autorisé.

Question de cours.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Donner la définition de la différentielle $df(u)$ de f en u , montrer qu'elle est unique, et donner sa définition à l'aide du vecteur gradient noté $\nabla f(u)$.

Exercice 1.

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + \frac{1}{3}y^3 - 4y - 2.$$

- a) Déterminer les points critiques de f .
 - b) Parmi ces points critiques, déterminer les minima locaux de f . On expliquera bien le raisonnement.
 - c) Montrer que ces minima locaux ne sont pas globaux.
- 2) Mêmes questions avec la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = 3x^3 + xy^2 - 2xy.$$

Exercice 2.

On considère les points du plan M_1, M_2 et M_3 de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ et (x_3, y_3) , et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^3 (y_i - ax_i - b)^2.$$

On supposera de plus que les x_i ne sont pas tous égaux.

- 1) Montrer que f n'admet qu'un seul point critique $(\tilde{a}, \tilde{b})$ (*i.e.* annulant le vecteur gradient).
- 2) Exprimer $\tilde{b}$ en fonction de $\tilde{a}$.

- 3) Montrer que f est strictement convexe.
- 4) En déduire que f admet un unique minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
- 5) Que fait-t-on concrètement dans cet exercice en cherchant à trouver a et b qui minimisent la fonction f ?

Question de cours.

Voir le cours.

Exercice 1

$$1) \quad f(x, y) = x^4 + \frac{1}{3}y^3 - 4y - 2 \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

a) Les points critiques sont tels que

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{ie} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Il y a deux points critiques $(0, -2)$ et $(0, 2)$

b) Calculons la Hessienne de f

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

On remarque que $H_f(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ qui n'est pas une matrice positive car ses valeurs propres sont $\lambda = 0$ et $\lambda = -4$.
 $(0, -2)$ ne peut donc pas être un point de minimum local de f .

En revanche, $H_f(x, y)$ est une matrice positive au point $(0, 2)$ mais aussi en tout point voisin de $(0, 2)$ car les valeurs propres $\lambda = 0$ et $\lambda = 2y$ sont bien ≥ 0 .

$(0,2)$ est donc un point de minimum local de f .

2/

c) Ce point ne peut pas être un minimum global car on

$$\text{remarque que } \lim_{y \rightarrow -\infty} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}y^3 - 4y - 2 \\ = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}y^3 = -\infty.$$

$$2) \quad g(x, y) = 3x^3 + xy^2 - 2xy \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 9x^2 + y^2 - 2y \\ 2xy - 2x \end{pmatrix}$$

a) Les points critiques sont tels que

$$\begin{cases} 9x^2 + y(y-2) = 0 \\ 2x(y-1) = 0 \end{cases} \quad \text{ie } \begin{cases} x = 0 \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \quad \text{ou } \begin{cases} y = 1 \\ 9x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Il y a donc quatre points critiques

$$(0,0) \quad (0,2) \quad (-1/3, 1) \quad (1/3, 1)$$

b) Calculons la matrice Hessienne de g

$$H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 18x & 2(y-1) \\ 2(y-1) & 2x \end{pmatrix}$$

$$\text{On remarque que } H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dont les valeurs}$$

propres sont $\lambda = \pm 2$. $(0,0)$ ne peut pas être un point de minimum local de g

De même, $H_g(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres $\lambda = \pm 2$ de sorte que $(0,2)$ ne peut pas être un point de minimum local de g .

Par ailleurs $H_g(-1/3, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$ n'est pas

une matrice positive car ses valeurs propres sont négatives.

Donc $(-1/3, 1)$ ne peut pas être un point de minimum local.

(c'est en fait un point de maximum local).

Enfin, $H_g(1/3, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}$ est une

matrice définie positive. Plus généralement, les mineurs principaux de $H_g(x,y)$, donnés par $18x$ et $36x^2 - 4(y-1)^2$, qui valent 6 et 4 au point $(1/3, 1)$, sont bien strictement positifs au voisinage de ce point. Donc $H_g(1/3, 1)$ est définie positive et $(1/3, 1)$ est un minimum local de g .

c) On remarque que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty$ de sorte que $(1/3, 1)$ ne peut pas être un minimum global.

Exercice 2

4/

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^3 (y_i - ax_i - b)^2$$

$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 -2x_i(y_i - ax_i - b) \\ \sum_{i=1}^3 -2(y_i - ax_i - b) \end{pmatrix}$$

1) Un point critique est tel que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 -2x_i(y_i - ax_i - b) = 0 \\ \sum_{i=1}^3 -2(y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^3 x_i(y_i - ax_i - b) = 0 \\ \sum_{i=1}^3 (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 x_i y_i = a \sum_{i=1}^3 x_i^2 + b \sum_{i=1}^3 x_i \\ \sum_{i=1}^3 y_i = a \sum_{i=1}^3 x_i + 3b \end{cases}$$

Il s'agit d'un système 2×2 en (a, b) dont la matrice est donnée par

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 x_i^2 & \sum_{i=1}^3 x_i \\ \sum_{i=1}^3 x_i & 3 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est donné par

$$\begin{aligned} & 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2. \end{aligned}$$

Le déterminant est > 0 car les x_i ne sont pas tous égaux. Il existe donc une unique solution au système, notée $(\tilde{a}, \tilde{b})$.

2) La deuxième équation du système donne

$$\tilde{b} = \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^3 y_i - \tilde{a} \sum_{i=1}^3 x_i \right)$$

3) Calculons la matrice Hessienne de f ,

$$H_f(a, b) = \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^3 x_i^2 & 2 \sum_{i=1}^3 x_i \\ 2 \sum_{i=1}^3 x_i & 6 \end{pmatrix}$$

Il est clair que les mineurs principaux de cette matrice sont $2 \sum_{i=1}^3 x_i^2 > 0$ et $\det H_f(a, b) = 2((x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2) > 0$

(d'après la question 1) car les x_i ne sont pas tous égaux.

$H_f(a, b)$ est donc définie positive $\forall (a, b)$. f est donc strictement convexe.

4) Comme $H_f(a, b)$ est définie positive le point critique (qui est unique) est un point de minimum local.

Pour une fonction strictement convexe, un point de minimum local est forcément local et unique.

5) On cherche la droite d'équation $y = ax + b$ qui soit la plus proche des 3 points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) au sens où (a, b) minimisent la norme du vecteur

$$\begin{pmatrix} y_1 - ax_1 - b \\ y_2 - ax_2 - b \\ y_3 - ax_3 - b \end{pmatrix}.$$