UVSQ
LSMA651

2013-2014

Partiel du 17 mars 2014 - 1h30

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (question de cours).

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'existence et l'unicité d'un vecteur gradient noté $\nabla f(u)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $df(u).h = (\nabla f(u), h)$ pour tout h dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $X = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2) Montrer que si l'on suppose que f est différentiable en $(0,0)$, alors la différentielle en ce point est forcément l'application nulle (qui associe 0 à tout élément de $\mathbb{R}^2$).
3) En déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soit J la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v).$$

1) Montrer que A est définie positive.
2) Montrer que J admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer qu'il est unique.
4) Le calculer.
5) Montrer que J admet un minimum sur l'ensemble K défini par

$$K = \{v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^3, v_2 + v_3 = 0\}.$$

6) Montrer qu'il est unique.
7) Le calculer.

Exercice 4.

Soit $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$J(x,y) = x^3 + y^3.$$

Montrer que J n'admet pas de minimum global.

Corrigé succinct du partiel du 17 mars 2014.

Exercice 1

Voir le cours

Exercice 2

1) On sait que $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ donc

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$$

La fonction est donc continue en $(0,0)$.

2) Si on suppose que f est différentiable en $(0,0)$, alors il existe une application linéaire $df(0,0) : (h_1,h_2) \to df(0,0).(h_1,h_2)$ et une application $\varepsilon : (h_1,h_2) \to \varepsilon(h_1,h_2)$ telle que $\lim_{h=(h_1,h_2)\to 0} \varepsilon(h) = 0$

et $\quad f(h_1,h_2) = f(0,0) + df(0,0).(h_1,h_2) + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \forall h_1,h_2$

Puisque $f(h_1,0) = f(0,h_2) = 0$, on en déduit que

$$0 = 0 + df(0,0).(h_1,0) + |h_1|\,\varepsilon(h) \quad \forall h_1$$

et $$0 = 0 + df(0,0).(0,h_1) + |h_2|\,\varepsilon(h) \quad \forall h_2$$

En écrivant comme à l'habitude ces relations pour $h_1 = \lambda h_1$ et $h_2 = \lambda h_2$ et en divisant par λ, on trouve

$$df(0,0)(h_1,0) + |h_1|\,\varepsilon(\lambda h) = 0 \quad \forall h_1,h_2,\lambda.$$
$$df(0,0)(0,h_2) + |h_2|\,\varepsilon(\lambda h) = 0$$

En faisant alors tendre λ vers 0, on obtient $df(0,0)(h_1,0) = 0$ et $df(0,0)(0,h_2) = 0$. Par linéarité on en déduit que $df(0,0)(h_1,h_2) = 0$.

3) Si f était différentiable, on aurait donc, puisque sa différentielle serait nulle, $f(h_1,h_2) = f(0,0) + df(0,0).(h_1,h_2) + \|h\|\,\varepsilon(h)$, ie

$$f(h_1,h_2) = \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \forall h = (h_1,h_2), \text{ ou encore}$$

$\varepsilon(h) = \frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Or $\frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|} = \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} \not\to 0$: en prenant le chemin $h_1 = h_2$ on remarque que cette quantité vaut toujours $1/2$.

Exercice 3

1) Les mineurs principaux sont

$$|2| = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 > 0$$

Ils sont tous strictement positifs. A est donc définie positive

2) On a vu en TD que A symétrique définie positive impliquait que $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ est ∞ à l'∞. J admet donc un minimum sur $\mathbb{R}^3$.

3) On a vu en TD que A symétrique définie positive impliquait que $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ est strictement convexe. Le minimum est donc unique.

4) Le point de minimum est caractérisé par la condition

$$\nabla J(u) = Au - b = 0.$$

Il suffit donc de résoudre le système linéaire $Au = b$.

On trouve $u = \begin{pmatrix} -5/4 \\ 1/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

5) K est fermé, J est continue et ∞ à l'∞. J admet donc un minimum sur K.

6) J est strictement convexe sur K convexe. Le minimum est donc unique.

7) On note $\varphi(v_1, v_2, v_3) = v_2 + v_3$

On a $\nabla\varphi(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le point de minimum est solution des relations de KKT qui s'écrivent

$$\begin{cases} \nabla J(u) + \lambda \nabla\varphi = 0 \\ u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

ie $$\begin{cases} Au - b + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

ie $$\begin{cases} 2u_1 - u_2 = -3 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 + \lambda = 1 \\ -u_2 + 2u_3 + \lambda = 2 \\ u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

Il suffit donc de résoudre ce système.

On trouve $u = \begin{pmatrix} -19/11 \\ -5/11 \\ 5/11 \end{pmatrix}$

Exercice 4

On remarque que $\lim_{x \to -\infty} J(x, 0) = -\infty$

J ne peut donc pas admettre de minimum sur $\mathbb{R}^2$.