

Examen du 15 mai 2014 - 2h00

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (questions de cours).

On considère le problème d'optimisation sans contrainte d'une fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^n$.

- 1) Rappeler la définition de l'algorithme du gradient à pas optimal.
- 2) On rappelle que le pas optimal ρ_k à l'itération k vérifie la relation

$$(\nabla J(u_k - \rho_k d_k), d_k) = 0$$

avec $d_k = \nabla J(u_k)$. Donner une expression simple du pas optimal ρ_k dans le cas d'une fonctionnelle quadratique

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v).$$

Exercice 2.

On considère la fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$J(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 - x_3,$$

et l'ensemble K défini par

$$K = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}.$$

- 1) Montrer que J possède un minimum sur K .
- 2) Ecrire les conditions d'optimalité avec les multiplicateurs de Lagrange.
- 3) Trouver le ou les points de minimum $u = (u_1, u_2, u_3)^t$.

Exercice 3

Soient la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le minimum de la fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

sur l'ensemble K défini par

$$K = \{v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^3, v_2 + v_3 = 0\}.$$

2) Même question avec l'ensemble K défini par

$$K = \{v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^3, v_1 \geq 0\}.$$

Une justification préalable de l'existence et de l'unicité de ces points de minimum serait appréciée (mais n'est pas explicitement demandée)...

Exercice 1

Voir cours

Exercice 2

$$J(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$K = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

1) J est continue et K est un compact. J possède donc un minimum sur K .

2) On note $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$

$$\text{et } \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 1$$

$$\text{On a } \nabla \varphi_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}, \nabla \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla J = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent ici

$$\nabla J + \lambda_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_2 \nabla \varphi_2 = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2 + 2x_1\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -1 + 2x_2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -1 + 2x_3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

avec par ailleurs $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

3) On remarque tout d'abord que $\lambda_1 \neq 0$ car sinon on aurait

$$\lambda_2 = -2 \text{ et } \lambda_2 = 1$$

ce qui est absurde.

La deuxième et la troisième équations donnent donc

$$x_2 = x_3.$$

En sommant les trois premières équations on obtient

$$0 + 2\lambda_1 \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{=1} + 3\lambda_2 = 0$$

$$\text{ie } \lambda_2 = -\frac{2}{3} \lambda_1$$

En injectant cette relation dans les équations du système on a donc

$$\begin{cases} x_1 = 1/3 - 1/2\lambda \\ x_2 = 1/3 + 1/2\lambda \\ x_3 = 1/3 + 1/2\lambda \end{cases}$$

En injectant ces relations dans l'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ on trouve

$$\lambda^2 = 9/4 \text{ ie } \lambda = \pm 3/2.$$

Le cas $\lambda = 3/2$ donne $x_1 = -1/3, x_2 = 2/3, x_3 = 2/3$

$$\text{et } J(-1/3, 2/3, 2/3) = -6/3 = -2$$

Le cas $\lambda = -3/2$ donne $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$

$$\text{et } J(1, 0, 0) = 2.$$

Le point de minimum est donc $(-1/3, 2/3, 2/3)$.

Exercice 3

3/4

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive

$$\text{car } |2| = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\det A = 6 + (-2 - 0) = 4 > 0.$$

La fonctionnelle $J = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ est donc ∞ à l' ∞ .

Les ensembles K considérés dans les questions étant fermés J admet un minimum sur K . Ils sont uniques car A symétrique définie positive implique aussi que J est strictement convexe.

$$1) \quad K = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^3, v_2 + v_3 = 0 \right\}$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent

$$\nabla J(v) + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(=) \quad Av - b + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(=) \quad \begin{cases} 2v_1 - v_2 + 3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 - 1 + \lambda_1 = 0 \\ -v_2 + 2v_3 - 2 + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

avec par ailleurs $v_2 + v_3 = 0$.

La résolution de ce système donne $v_1 = -\frac{19}{11}$, $v_2 = \frac{-5}{11}$, $v_3 = \frac{5}{11}$ qui est donc le point de minimum.

$$2) \quad K = \{v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^3, v_1 \geq 0\}$$

$$v_1 \geq 0 \Leftrightarrow -v_1 \leq 0.$$

$$\text{En notant } \varphi_1(v_1, v_2, v_3) = -v_1 \text{ on a } \nabla \varphi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent

$$\nabla J(v) + \lambda_1 \nabla \varphi_1(v) = 0$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_1 \varphi_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v_1 - v_2 + 3 - \lambda_1 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 - 1 = 0 \\ -v_2 + 2v_3 - 2 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ -\lambda_1 v_1 = 0 \end{cases}$$

avec par ailleurs $v_1 \geq 0$, L'égalité $\lambda_1 v_1 = 0$ nous dit que $\lambda_1 = 0$ ou $v_1 = 0$.

1^{er} cas $v_1 = 0$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} -v_2 + 3 = \lambda_1 \\ 2v_2 - v_3 = 1 \\ -v_2 + 2v_3 = 2 \\ \lambda_1 \geq 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$v_2 = 4/3, v_3 = 5/3 \\ \text{et } \lambda_1 = 5/4 \geq 0.$$

Au point $(v_1, v_2, v_3) = (0, 4/3, 5/3)$, on trouve que $J = -7/3$.

2^{ème} cas $\lambda_1 = 0$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} 2v_1 - v_2 = -3 \\ -v_1 + 2v_2 - v_3 = 1 \\ -v_2 + 2v_3 = 2 \end{cases}$$

ce qui donne $v_1 = -5/4, v_2 = 1/2, v_3 = 5/4$.

ce qui ne convient pas car $v_1 < 0$.

Le point de minimum est donc $(0, 4/3, 5/3)$.