UVSQ
LSMA651 2014-2015

Examen du 24 juin 2015 - 2h00

Documents et calculatrices non autorisés.

Nom :
Prénom :

Exercice 1.
Minimiser la fonctionnelle

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 6. \end{cases}$$

Exercice 2.
On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + xy.$$

On note

$$D = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1\}.$$

1) Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que u possède un unique minimum sur D.
3) Calculer ce point de minimum.

Exercice 3.
On considère la fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

que l'on souhaite minimiser sans contrainte. On suppose que la matrice A est symétrique et définie positive.

1) Rappeler le critère d'optimalité du premier ordre.
2) Montrer que $\nabla J(v) = Av - b$.
3) Montrer que J est infinie à l'infini.
4) Expliquer pourquoi le problème admet une unique solution.
5) On souhaite approcher cette solution à l'aide de l'algorithme du gradient à pas fixe.
a) Rappeler les conditions de convergence de cet algorithme.
b) Compléter sur cette feuille (que vous rendrez et sur laquelle vous indiquerez vos nom et prénom) les pointillés de la fonction Scilab suivante.

```
function [u] = GPF (A,b,u0,epsilon,rho)
u = ...

while (.........................................)

u = ...

end
endfunction
```

où `epsilon`, `rho` représentent respectivement la précision souhaitée de la solution numérique et le pas fixe.

Corrigé de l'examen du 24/06/15

LSMA 651

Exercice 1

On cherche à minimiser la fonctionnelle

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_3 \leq 0 \\ 6 - x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Avec les notations habituelles, les relations de KKT s'écrivent

$$\begin{cases} \nabla f + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \nabla \varphi_i = 0 \\ \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i \varphi_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3 - \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \\ 5 - \lambda_2 - 2\lambda_4 = 0 \\ 6 - \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0 \\ \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 = \lambda_3 x_3 = \lambda_4 (6 - x_1 - 2x_2 - 2x_3) = 0 \end{cases}$$

sans oublier les contraintes $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 6$.

Remarquons tout d'abord que $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 3 \Rightarrow \lambda_2 = 5 - 2\lambda_4 = 5 - 6 = -1$ de sorte que $\lambda_1 = 0$ n'est pas possible. L'équation $\lambda_1 x_1 = 0$ donne donc nécessairement $x_1 = 0$.

De même, $\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 3 \Rightarrow \lambda_2 = 5 - 2\lambda_4 = 5 - 6 = -1$ donc $\lambda_3 = 0$ n'est pas possible. L'équation $\lambda_3 x_3 = 0$ donne donc nécessairement $x_3 = 0$.

Puisque $x_1 = x_3 = 0$, le problème revient à minimiser la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_2$$

sous les contraintes $x_2 \geq 0$.
$x_2 \geq 3$

La solution du problème est donc $(x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 0)$.

Exercice 2

$$u(x,y) = x^2 + y^2 + xy$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad x+y \geq 1 \}$$

1) On a $\nabla u(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{pmatrix}$ et $H_u(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

La matrice $H_u(x,y)$ est constante, symétrique et ses valeurs propres sont données par l'équation $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2-\lambda = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ et } \lambda = 3.$$

Elles sont donc strictement positives.

$H_u(x,y)$ est donc symétrique définie positive $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$ de sorte que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2) D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc un compact de $\mathbb{R}^2$, et u est continue sur D. u admet donc (au moins) un point de minimum sur D. u étant par ailleurs strictement convexe, ce point de minimum est unique.

3) En écrivant les contraintes sous la forme

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ 1-x-y \leq 0 \end{cases}$$

les relations de KKT s'écrivent

$$\begin{cases} 2x+y + 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2y+x + 2y\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1(x^2+y^2-1) = \lambda_2(1-x-y) = 0 \end{cases}$$

sans oublier les contraintes $x^2+y^2 \leq 1$ et $x+y \geq 1$.

En faisant la différence entre les deux premières équations, on obtient $(y-x) + 2\lambda_1(y-x) = 0$

$$\Leftrightarrow (1+2\lambda_1)(y-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -1/2 \text{ ou } y = x$$

Comme $\lambda_1 \geq 0$, on a forcément $y = x$, et les relations de KKT deviennent

$$\begin{cases} 3x + 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3x + 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1(2x^2-1) = \lambda_2(1-2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_2 = x(2\lambda_1+3)$$

sans oublier les contraintes $2x^2 \leq 1$ et $2x \geq 1$.

Les équations $\begin{array}{l} \lambda_2(1-2x) = 0 \\ \lambda_2 = x(2\lambda_1+3) \end{array}$ donnent $x(2\lambda_1+3)(1-2x) = 0$.

Comme $x \neq 0$ et $\lambda_1 \neq -3/2$ d'après $2x \geq 1$ et $\lambda_1 \geq 0$, on a forcément $1-2x = 0$ ie $x = 1/2$.

Le point de minimum est donc $(x,y) = (1/2, 1/2)$.

Exercice 3

1) Le critère d'optimalité du 1er ordre pour un point de minimum u est ici $\nabla J(u) = 0$

2) Comme A est symétrique, on a

$$J(v+h) = \frac{1}{2}(A(v+h), v+h) - (b, v+h)$$

$$J(v+h) = \frac{1}{2}(Av, v) + \frac{1}{2}(Ah, v) + \frac{1}{2}(Av, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) - (b, v) - (b, h)$$

$$J(v+h) = J(v) + (Av-b, h) + \frac{1}{2}(Ah, h)$$

Comme $h \to (Av-b, h)$ est une application linéaire et continue et $|(Ah, h)| \leq \|Ah\| \, \|h\|$ de sorte que $\dfrac{|(Ah,h)|}{\|h\|} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$,

on a $\nabla J(v) = Av - b$ par définition de la différentielle et du vecteur gradient.

3) On a vu en TD que A étant symétrique définie positive, $\exists c>0$ t.q $(Av,v) \geq c\|v\|^2$

Ainsi

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av,v) - (b,v) \geq \frac{c}{2}\|v\|^2 - (b,v)$$

ou encore, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$J(v) \geq \frac{c}{2}\|v\|^2 - \|b\|\,\|v\|$$

Ainsi $\lim\limits_{\|v\|\to+\infty} J(v) \geq \lim\limits_{\|v\|\to+\infty} \frac{c}{2}\|v\|^2 - \|b\|\,\|v\| = +\infty$

ce qui prouve que J est infinie à l'infini.

4) $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et J est infinie à l'infinie.
Donc il existe un point de minimum.
Comme A est symétrique définie positive, on a vu en TD que J est strictement convexe. Le point de minimum est donc unique.

5).

a) On a vu en TD qu'une condition était donnée par $\rho \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$ où λ_n est la plus grande valeur propre de A et ρ est le pas fixe de la méthode du gradient à pas fixe

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k - \rho(Au_k - b) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

b) La fonction s'écrit

```
function [u] = GPF(A,b,u0,epsilon,rho)
  u = u0
  while(||A*u-b|| > epsilon)
    u = u - rho*(A*u-b)
  end
endfunction
```