Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L2, Aspects différentiels (LSMA421)
Année 2014-2015

Partiel du 23 juin 2015 - 2h00

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Déterminer toutes les solutions du système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x'(t) &= -5\,x(t) &- \quad y(t) &+ \quad 3, \\ y'(t) &= \quad -x(t) &- \quad 5\,y(t) &- \quad 9. \end{cases}$$

Exercice 2

On relie les points de l'espace $A = (1, 0, 0)$ et $B = (0, 1, 0)$ par le chemin Γ défini par

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t, \\ y(t) = t, \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

avec $t \in [0, 1]$, et on considère le champ de vecteur V défini en chaque point de l'espace par

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le travail de V le long de Γ.
2) Dire si ce travail dépend du chemin suivi pour rejoindre les points A et B en justifiant votre réponse.

Exercice 3

A l'aide de la formule de Green-Riemann et au moyen d'une intégrale simple, calculer l'aire de l'intérieur de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On rappelle que la frontière Γ de l'ellipse est définie par

$$\begin{cases} x = a \cos v \\ y = b \sin v \end{cases}$$

avec $v \in [0, 2\pi]$.

Exercice 4

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On considère une surface S de $\mathbb{R}^3$ définie par $z = f(x, y)$ avec $(x, y) \in D$.

1) Donner l'expression de l'aire de S à l'aide d'une intégrale double faisant intervenir le domaine D et les dérivées partielles de f.

2) On souhaite appliquer le résultat de la question précédente au calcul de l'aire de la demi-sphère de rayon R

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}.$$

a) Préciser la fonction f et le domaine D.

b) Calculer l'aire de S.

Corrigé de l'examen du 23/06/15

LSMA 421

Exercice 1

On commence par résoudre le système homogène associé qui s'écrit

$$X'(t) = A\,X(t)$$

avec $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de la matrice A étant $\lambda_1 = -6$ et $\lambda_2 = -4$ (à vérifier par des calculs habituels), elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (les valeurs propres sont réelles et distinctes).

Des calculs simples montrent que les vecteurs propres associés sont donnés par exemple par $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, les solutions du système homogène sont donc données par $X(t) = c_1 e^{-6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ie

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{-4t} \\ y(t) = c_1 e^{-6t} - c_2 e^{-4t} \end{cases} \quad \text{avec } c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Les solutions du système complet $X'(t) = AX(t) + g$ avec $g = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ sont données d'après le cours par la somme de la solution du système homogène et d'un point d'équilibre X_e défini par $AX_e + g = 0$

ie $AX_e = -g \iff \begin{cases} -5x_e - y_e = -3 \\ -x_e - 5y_e = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_e = 1 \\ y_e = -2 \end{cases}$

Ainsi, les solutions du système complet sont donc données par

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{-4t} + 1 \\ y(t) = c_1 e^{-6t} - c_2 e^{-4t} - 2 \end{cases} \quad \text{avec } c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

1) Par definition, le travail de V le long de Γ est ici donné par

$$W = \int_\Gamma y\,dx - x\,dy = \int_0^1 y(t)\,x'(t)\,dt - \int_0^1 x(t)\,y'(t)\,dt$$

$$= -\int_0^1 t\,dt - \int_0^1 (1-t)\,dt$$

$$= -1$$

2) Le champ V ne peut pas dériver d'un potentiel scalaire car si on note $\begin{cases} P(x,y,z) = y \\ Q(x,y,z) = -x \\ R(x,y,z) = 0 \end{cases}$, les composantes de V, on a

$$\partial_x Q - \partial_y P = -1 - 1 = -2 \neq 0$$
$$\partial_x R - \partial_z P = 0 - 0 = 0$$
$$\partial_y R - \partial_z Q = 0 - 0 = 0$$

Le travail dépend donc du chemin suivi.

Exercice 3

La frontière Γ de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ est donnée par

$$\Gamma : \begin{cases} x(v) = a\cos v \\ y(v) = b\sin v \end{cases} \quad \text{avec } v \in [0, 2\pi].$$

D'après la formule de Green-Riemann, l'aire de l'ellipse est donc donnée par $\mathcal{A} = \int_\Gamma x\,dy$ (considérer le champ de vecteur $V = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ de sorte que $\partial_x Q - \partial_y P = 1$ et donc

$$\mathcal{A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{définition de} \\ \text{l'aire}}}{=} \iint dx\,dy = \iint (\partial_x Q - \partial_y P)\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Green-Riemann}}}{=} \int_\Gamma x\,dy \Big)$$

Ainsi, $\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 v\,dv$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2v)\,dv = \pi ab.$$

Exercice 4

1) On peut paramétrer la surface S de la façon suivante

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = f(u,v) \end{cases}$$

de sorte que, en utilisant les notations du cours habituelles

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $\left\| \frac{\partial \Pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial v} \right\| = \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}$

En posant $\Sigma = \{ (x,y,z),\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D \}$, on a donc

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}\, dx\, dy$$

2) a) Comme $z \geq 0$, $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et $D = \{ (x,y),\ x^2 + y^2 \leq R^2 \}$

b) Des calculs simples montrent que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2} = \sqrt{\frac{R^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

On a donc $\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$

En passant en coordonnées polaires $\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$ avec $r \in [0,R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

il vient $\mathcal{A}(\Sigma) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi R \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr$

$$= 2\pi R \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R$$

$$= 2\pi R^2$$