UVSQ
LSMA651 2014-2015

Examen du 18 mai 2015 - 2h00

Documents et calculatrices non autorisés.

Question de cours.
Enoncer et démontrer le théorème de convergence de l'algorithme du gradient projeté dans le cas d'une optimisation sur un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.
On considère la fonction

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1$$

que l'on souhaite minimiser sur l'ensemble

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}.$$

1) Montrer que D est convexe.
2) Montrer que f est strictement convexe sur D.
3) Déterminer le minimum de f sur D.

Exercice 2.
Un étudiant de L3 a deux épreuves à passer. Son résultat final est obtenu en faisant la moyenne des deux notes n_1 et n_2 qu'il obtient à ces deux épreuves. On admet les relations suivantes entre les notes obtenues et les temps respectifs $t_1 \geq 0$ et $t_2 \geq 0$ passés à travailler pour chaque épreuve:

$$n_1 = \frac{20t_1}{1+t_1}, \quad n_2 = 20\frac{t_2+1}{t_2+5}.$$

L'étudiant dispose d'un temps de révision maximum $T \geq 0$ et il veut *maximiser* son résultat final.
1) Ecrire le problème d'optimisation correspondant sous la forme habituelle avec les trois contraintes d'*inégalités* associées.

2) a) Ecrire les relations de KKT.
b) Montrer qu'on a forcément $t_1 + t_2 = T$.
3) Résoudre le système obtenu pour tout $T \geq 0$, en ne perdant pas de vue le problème concret que l'on souhaite résoudre. On pourra distinguer les cas $T \leq 3/2$ et $T > 3/2$.

Exercice 3.
On considère la fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^5$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

que l'on souhaite minimiser sans contraintes à l'aide de l'algorithme du gradient à pas fixe. Compléter **sur cette feuille (que vous rendrez et sur laquelle vous indiquerez vos noms et prénoms)** les pointillés de la fonction Scilab suivante.

```
function [u, nb_iter] = GPF (A,b,u0,epsilon,max_iter,rho)

u = u0
nb_iter = 0
r = A*u - b
nr = norm(r)

while (nb_iter < max_iter & nr > epsilon)
u = u - rho * r

nb_iter = nb_iter + 1
r = A*u - b
nr = norm(r)

end

endfunction
```

où `epsilon`, `max_iter`, `nb_iter` représentent respectivement la précision souhaitée de la solution numérique, le nombre maximal d'itérations à ne pas dépasser, le nombre d'itérations effectuées.

Corrigé de l'examen du 18 mai 2015

Question de cours

Voir le cours

Exercice 2

1) Le problème consiste à minimiser la fonctionnelle

$$J(t_1,t_2) = -\frac{1}{2}(m_1+m_2) = -\frac{10t_1}{1+t_1} - \frac{10(t_2+1)}{t_2+5}$$

sous les contraintes $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_1+t_2 \leq T$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -t_1 \leq 0 \\ -t_2 \leq 0 \\ t_1+t_2-T \leq 0 \end{cases}$$

On notera $\varphi_1(t_1,t_2) = -t_1$
$\varphi_2(t_1,t_2) = -t_2$
$\varphi_3(t_1,t_2) = t_1+t_2-T$

2) a) Un calcul simple montre que

$$\nabla J(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} -10/(1+t_1)^2 \\ -40/(5+t_2)^2 \end{pmatrix}$$

Les relations de KKT s'écrivent

$$\begin{cases} \nabla J + \lambda_1 \nabla\varphi_1 + \lambda_2 \nabla\varphi_2 + \lambda_3 \nabla\varphi_3 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0 \\ \lambda_1\varphi_1 = 0,\ \lambda_2\varphi_2 = 0,\ \lambda_3\varphi_3 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire, puisque $\nabla\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dfrac{-10}{(1+t_1)^2} - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \dfrac{-40}{(5+t_2)^2} - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0 \\ \lambda_1 t_1 = 0,\ \lambda_2 t_2 = 0,\ \lambda_3 (t_1 + t_2 - T) = 0 \end{cases}$$

sans oublier les contraintes $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_1 + t_2 \leq T$.

b) On remarque tout de suite que λ_3 ne peut pas être égal à 0 car on aurait $\lambda_1 = \dfrac{-10}{(1+t_1)^2} < 0$ et $\lambda_2 = \dfrac{-40}{(5+t_2)^2}$.

On a donc forcément $t_1 + t_2 = T$.

3) L'égalité $\lambda_1 t_1 = 0$ permet de distinguer deux cas : le cas $\lambda_1 = 0$ et le cas $t_1 = 0$.

- <u>Si $t_1 = 0$</u>, alors $t_2 = T$ d'après la relation $t_1 + t_2 = T$ et les relations de KKT donnent en particulier

$$\lambda_3 - \lambda_1 = 10$$
$$\lambda_3 - \lambda_2 = \frac{40}{(5+T)^2}$$

Comme $t_2 = T$ et $\lambda_2 t_2 = 0$, on a donc necessairement $\lambda_2 = 0$

et par suite $\lambda_3 = \dfrac{40}{(5+T)^2}$

$$\lambda_1 = \lambda_3 - 10 = \frac{40}{(5+T)^2} - 10.$$

Il est clair que $\dfrac{40}{(5+T)^2} \leq 10$ et donc $\lambda_1 \leq 0$.

Le cas $t_1 = 0$ n'est donc pas possible.

On a donc necessairement $\lambda_1 = 0$, et donc

$$\lambda_3 = \frac{10}{(1+t_1)^2}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \frac{-40}{(5+t_2)^2} = \frac{10}{(1+t_1)^2} - \frac{40}{(5+t_2)^2}$$

L'égalité $\lambda_2 t_2 = 0$ permet de distinguer deux cas : le cas $\lambda_2 = 0$ et le cas $t_2 = 0$.

- En procédant comme ci-dessus, <u>si $t_2 = 0$</u> alors $t_1 = T$ et

$$\lambda_3 = \frac{10}{(1+T)^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{10}{(1+T)^2} - \frac{40}{25}$$

On remarque que $\lambda_2 \leq 0 \iff \frac{10}{(1+T)^2} \leq \frac{40}{25} \iff \frac{25}{4} \leq (1+T)^2$

$$\iff \frac{5}{2} \leq 1+T \iff T \geq 3/2.$$

Ainsi, <u>si $T > 3/2$</u>, ce cas n'est pas possible et on a forcément $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ($t_1 = 0$ et $t_2 = 0$ ne sont pas possibles), ce qui permet d'écrire

$$\frac{10}{(1+t_1)^2} = \frac{40}{(5+t_2)^2} \iff (5+t_2)^2 = 4(1+t_1)^2$$

$$\iff 5+t_2 = 2(1+t_1)$$

$$\iff t_2 = 2t_1 - 3.$$

Comme $t_1 + t_2 = T$ on obtient finalement

$$\boxed{t_2 = \frac{2T-3}{3}}$$
$$\boxed{t_1 = \frac{T+3}{3}}$$

Si <u>$T < 3/2$</u>, λ_2 ne peut pas être égal à 0 car $t_2 = \frac{2T-3}{3}$ serait négatif, de sorte que $t_2 = 0$
$t_1 = T$.

Pour résumer, on a donc

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{T+3}{3} \\ t_2 = \dfrac{2T-3}{3} \end{cases} \quad \text{si } T > 3/2$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} t_1 = T \\ t_2 = 0 \end{cases} \quad \text{si } T \leq 3/2$$

Exercice 1

1) Soit $(x,y,z) \in D$, ie $x+y+z=1$

Soit $(x',y',z') \in D$, ie $x'+y'+z'=1$.

Soit $\theta \in [0,1]$. On a alors $\theta x + (1-\theta)x' + \theta y + (1-\theta)y' + \theta z + (1-\theta)z'$

$$= \theta + (1-\theta) = 1$$

de sorte que $\theta(x,y,z) + (1-\theta)(x',y',z') \in D$.

D est donc convexe.

2) $$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y-2 \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ est une matrice symétrique définie positive $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

f est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}^3$ (et donc sur D).

3) La condition d'optimalité du premier ordre s'écrit, en notant $\varphi_1(x,y,z) = x+y+z-1$ et puisque $\nabla \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\nabla f + \lambda \nabla \varphi_1 = 0$$

ie
$$(*) \begin{cases} 2x - 2 + \lambda = 0 \\ 2y - 2 + \lambda = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \end{cases}$$

avec la contrainte $x + y + z = 1$.

En faisant la somme des 3 égalités $(*)$, on obtient donc

$$2 - 4 + 3\lambda = 0 \iff \lambda = 2/3 .$$

de sorte que
$$z = -1/3$$
$$y = \frac{1}{2}(-\lambda + 2) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3} + 2\right) = 2/3$$
$$x = 2/3$$

Le minimum de f sur D est donc $(2/3, 2/3, -1/3)$.

<u>Exercice 3</u>

Voir énoncé