

Examen du 18 mai 2017 - 2h00

Documents et calculatrices non autorisés.

Question de cours.

Rappeler la définition de l'algorithme du gradient à pas optimal et montrer que le pas optimal ρ_k à l'itération k vérifie la relation

$$(\nabla J(u_k - \rho_k d_k), d_k) = 0$$

avec $d_k = \nabla J(u_k)$. Montrer que $(d_k, d_{k+1}) = 0$ et que $J(u_{k+1}) \leq J(u_k)$.

Exercice 1.

Calculer le ou les points de minimum globaux de la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z + xy$$

sous la contrainte d'égalité $x + y + z = 1$. On ne demande pas de justifier l'existence de ce ou ces points de minimum globaux.

Corrigé succinct.

Le vecteur gradient et la matrice Hessienne de f en un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ sont donnés par

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les relations de KKT en un point de minimum s'écrivent ici

$$\begin{cases} 2x + y + \lambda = 0, \\ 2y + x + \lambda = 0, \\ 1 + \lambda = 0. \end{cases}$$

Il est ainsi clair que $\lambda = -1$ de sorte que le système devient

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2y + x = 1, \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} y - x = 0, \\ y + x = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

et donc

$$x = y = \frac{1}{3}.$$

La contrainte donne

$$z = \frac{1}{3}.$$

Le point de minimum est donc $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Exercice 2.

On considère la fonction

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 22x - 14y$$

que l'on souhaite minimiser sur l'ensemble

$$D = \{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi_i(x, y) \leq 0, i = 1, 2\}$$

où les fonctions φ_i sont définies par

$$\varphi_1(x, y) = -x + 3y - 1, \quad \varphi_2(x, y) = x - y - 4.$$

- 1) Montrer que D est un ensemble convexe.
- 2) Montrer que f est strictement convexe sur D .
- 3) Mettre f sous la forme d'une forme quadratique

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v) + c.$$

- 4) a) Montrer que f admet un point de minimum sur D .
- b) Montrer que ce point de minimum est unique.
- 5) Justifier que les contraintes sont qualifiées.
- 6) Ecrire les relations de KKT associées à ce problème de minimisation.
- 7) Montrer que le point de minimum ne peut pas être situé à l'intérieur de

D (on pourra raisonner par l'absurde, calculer alors le point de minimum, et dire s'il vérifie les contraintes).

On déduit de la question précédente qu'au moins une des deux contraintes est saturée.

8) Montrer que la deuxième contrainte ne peut pas être la seule contrainte saturée (on pourra raisonner par l'absurde).

9) Quel est le point de minimum si on suppose que seule la première contrainte est saturée ? Calculer la valeur de f en ce point.

10) Quel est le point de minimum si on suppose que les deux contraintes sont saturées ? Calculer la valeur de f en ce point.

11) Conclure.

Corrigé succinct.

1) Soient $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$ deux points de D , de sorte que pour tout i $\varphi_i(X_1) \leq 0$ et $\varphi_i(X_2) \leq 0$, et soit $\theta \in (0, 1)$. On veut montrer que le point $\theta X_1 + (1 - \theta)X_2 = (\theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \theta y_1 + (1 - \theta)y_2, \theta z_1 + (1 - \theta)z_2)$ est encore dans D , c'est-à-dire que $\varphi_i(\theta X_1 + (1 - \theta)X_2) \leq 0$. Pour tout i φ_i est une fonction affine donc convexe, de sorte que

$$\varphi_i(\theta X_1 + (1 - \theta)X_2) \leq \theta \varphi_i(X_1) + (1 - \theta) \varphi_i(X_2).$$

Comme $\theta \in (0, 1)$, $\varphi_i(X_1) \leq 0$ et $\varphi_i(X_2) \leq 0$, on en déduit directement que $\varphi_i(\theta X_1 + (1 - \theta)X_2) \leq 0$.

2) Le vecteur gradient et la matrice Hessienne de f en un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ sont donnés par

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y - 22 \\ -2x + 6y - 14 \end{pmatrix}, \quad H_f = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice Hessienne de f , données par 4 et 8, sont strictement positives de sorte que la matrice Hessienne de f est définie positive et par suite la fonction f est strictement convexe sur D .

3) a) La fonction f s'écrit

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(H_f v, v) - (b, v) + c$$

avec $c = 0$ et $b = (22, 14)^t$. On a vu dans la question précédente que H_f est symétrique définie positive et en TD que sous cette condition la forme quadratique f est coercive.

b) f est continue et coercive sur l'ensemble fermé D . Il existe donc un point de minimum. f est strictement convexe de sorte que ce point de minimum est unique.

5) Les contraintes sont affines donc qualifiées.

6) Les relations de KKT en un point de minimum $X = (x, y)$ de D s'écrivent ici

$$\nabla f(X) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \nabla \varphi_i(X) = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 6x - 2y - 22 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ -2x + 6y - 14 + 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

avec par ailleurs

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0,$$

et

$$\lambda_1(-x + 3y - 1) = 0, \quad \lambda_2(x - y - 4) = 0.$$

7) Si le point de minimum est à l'intérieur du domaine D , alors il annule le vecteur gradient ce qui donne le point $(5, 4)^t$. On observe que $\varphi_1(5, 4) > 0$ de sorte que ce point n'est pas admissible.

8) Si on suppose que seule la deuxième contrainte est saturée, alors

$$x = y + 4 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = 0,$$

et

$$\begin{cases} 4y + 2 = -\lambda_2, \\ 4y - 22 = \lambda_2, \end{cases}$$

et donc $\lambda_2 = -12 < 0$ ce qui n'est pas possible.

9) Si on suppose que seule la première contrainte est saturée, alors

$$x = 3y - 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0,$$

et

$$\begin{cases} 16y - 28 = \lambda_1, \\ 12 = 3\lambda_1, \end{cases}$$

et donc $\lambda_1 = 4$, $y = 2$, $x = 5$ et $f(x, y) = -71$.

10) Si les deux contraintes sont saturées alors $x = 3y - 1$ et $x = y + 4$ ce qui donne $y = 5/2$ et $x = 13/2$. On a alors $f(x, y) = -65$.

11) Le point de minimum est donc le point $(5, 2)$.

Exercice 3.

Soit A et b une matrice symétrique définie positive et un vecteur de taille n .
On considère la fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

et on s'intéresse à la minimisation numérique de cette fonctionnelle sur l'ensemble K défini par

$$K = \{v = (v_i) \in \mathbb{R}^n, m_i \leq v_i \leq M_i \forall i = 1, \dots, n\}$$

avec $m = (m_1, \dots, m_n)$ et $M = (M_1, \dots, M_n)$ deux vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$.
Compléter la fonction Scilab suivante pour l'algorithme du gradient projeté permettant de calculer le minimum de J sur K .

```
function [u, nb_iter] = GPF_PROJETE (A,b,u0,epsilon,max_iter,rho,n,m,M)

u = u0;
nb_iter = 0;

ecart = 2 * epsilon;

while ( (nb_iter < max_iter) & (ecart > epsilon) )

v = .....

u = .....
for i=1:1:n
    u(i) = .....
end

nb_iter = nb_iter + 1;

ecart = .....

end

if (nb_iter == max_iter) then
```

```

    disp("Augmenter max_iter pour obtenir la precision souhaitee");
end

```

```

endfunction

```

Corrigé.

```

function [u, nb_iter] = GPF_PROJETE (A,b,u0,epsilon,max_iter,rho,n,m,M)

```

```

u = u0;

```

```

nb_iter = 0;

```

```

ecart = 2 * epsilon;

```

```

while ( (nb_iter < max_iter) & (ecart > epsilon) )

```

```

    v = u;

```

```

    u = u - rho * (A*u-b) // GPF

```

```

    for i=1:1:n

```

```

        u(i) = max(m(i), min(u(i),M(i))) // Projection

```

```

    end

```

```

    nb_iter = nb_iter + 1;

```

```

    ecart = norm(v-u)

```

```

end

```

```

if (nb_iter == max_iter) then

```

```

    disp("Augmenter max_iter pour obtenir la precision souhaitee");

```

```

end

```

```

endfunction

```