UVSQ
LSMA651 **2015-2016**

Examen du 23 mai 2016 - 2h00

Documents et calculatrices non autorisés.

Question de cours.
Donner la définition de l'algorithme du gradient à pas fixe ainsi que celle de l'algorithme du gradient projeté dans le cas d'une optimisation sur un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.
On considère la fonction

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

que l'on souhaite minimiser sur l'ensemble

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \varphi(x,y,z) \leq 0\}$$

où la fonction φ est définie par

$$\varphi(x,y,z) = x + y^2 + z^2 + 2.$$

1) Montrer que la fonction φ est convexe sur $\mathbb{R}^3$.
2) On souhaite montrer dans cette question que l'ensemble D est un ensemble convexe.
a) Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux points de D et soit $\theta \in (0,1)$. Quelle inégalité faut-il démontrer ?
b) En déduire de la question 1) que D est convexe.
3) Montrer que f est strictement convexe sur D.
4) Montrer que f admet un point de minimum sur D et que ce point de minimum est unique.
5) Montrer que la contrainte de l'ensemble D est qualifiée.
6) Trouver le point de minimum. On précisera également la valeur du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte.

7) Déterminer analytiquement le cône des directions admissibles $T_D(X)$ d'un point X de D dans les deux cas suivants:
a) $\varphi(X) < 0$
b) $\varphi(X) = 0$.

Corrigé succinct.
1) Le vecteur gradient et la matrice Hessienne de φ en un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ sont donnés par

$$\nabla\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad H_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice Hessienne de φ, données par 0 et 2 (valeur propre double), sont positives de sorte que la matrice Hessienne de φ est positive et par suite la fonction φ est convexe.
2) a) Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux points de D, de sorte que $\varphi(X_1) \leq 0$ et $\varphi(X_2) \leq 0$, et soit $\theta \in (0, 1)$. On veut montrer que le point $\theta X_1 + (1-\theta)X_2 = (\theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta y_1 + (1-\theta)y_2, \theta z_1 + (1-\theta)z_2)$ est encore dans D, c'est-à-dire que $\varphi(\theta X_1 + (1-\theta)X_2) \leq 0$.
b) D'après la question 1), φ est une fonction convexe, de sorte que

$$\varphi(\theta X_1 + (1-\theta)X_2) \leq \theta\varphi(X_1) + (1-\theta)\varphi(X_2).$$

Comme $\theta \in (0, 1)$, $\varphi(X_1) \leq 0$ et $\varphi(X_2) \leq 0$, on en déduit directement que $\varphi(\theta X_1 + (1-\theta)X_2) \leq 0$.
3) Le vecteur gradient et la matrice Hessienne de f en un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ sont donnés par

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice Hessienne de f, données par 2 (valeur propre triple), sont strictement positives de sorte que la matrice Hessienne de f est définie positive et par suite la fonction f est strictement convexe.
4) Soit $X = (x, y, z)$. Comme $f(X) = ||X||^2$, il est clair que f est coercive sur D qui est un ensemble fermé. La fonction admet donc un point de minimum sur D. Comme f est strictement convexe sur D, ce point de minimum est

unique.
5) Soit $X = (x, y, z)$ un point de D tel que la contrainte soit satisfaite avec une égalité, c'est-à-dire $\varphi(X) = x + y^2 + z^2 + 2 = 0$. Par définition, pour montrer que cette contrainte est qualifiée et puisque φ n'est pas une fonction affine, il faut trouver un vecteur $V = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $(\nabla\varphi(X), V) < 0$, c'est-à-dire

$$v_1 + 2xv_2 + 2zv_3 < 0.$$

Le point $V = (-1, 0, 0)$ convient.
6) Les relations de KKT en un point de minimum $X = (x, y, z)$ de D s'écrivent ici

$$\nabla f(X) + \lambda\nabla\varphi(X) = 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0, \\ 2y(1 + \lambda) = 0, \\ 2z(1 + \lambda) = 0, \end{cases}$$

avec par ailleurs $\lambda \geq 0$, $\lambda\varphi(X) \geq 0$. Comme $\lambda \neq -1$, on déduit immédiatement des deux dernières équations du système que $y = z = 0$. Par ailleurs, $\lambda \geq 0$ et $\lambda\varphi(X) \geq 0$ impliquent $\varphi(X) \geq 0$. Mais comme X doit appartenir à D, on a aussi $\varphi(X) \leq 0$ de sorte que $\varphi(X) = 0$. On en déduit donc que $x = -2$. Le point de minimum de la fonction f sur D est donc le point $(-2, 0, 0)$. La valeur du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte est $\lambda = 4$.
7) a) Si X est situé à l'intérieur de D, c'est-à-dire tel que $\varphi(X) < 0$, le cône des directions admissibles $T_D(X)$ est l'ensemble $\mathbb{R}^3$ tout entier.
b) Si X est situé sur le bord de D, c'est-à-dire tel que $\varphi(X) = 0$, le cône des directions admissibles $T_D(X)$ est d'après le cours l'ensemble de vecteur V de $\mathbb{R}^3$ tels que $(\nabla\varphi(X), V) \leq 0$, c'est-à-dire tels que

$$v_1 + 2xv_2 + 2zv_3 \leq 0.$$

Exercice 2.
Calculer le ou les points de minimum globaux de la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$$

sous la contrainte d'égalité $x + y + z^2 = 1$. On ne demande pas de justifier l'existence de ce ou ces points de minimum globaux.

Corrigé succinct.
Le vecteur gradient et la matrice Hessienne de f en un point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ sont donnés par

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \\ 2z \end{pmatrix}, \quad H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les relations de KKT en un point de minimum s'écrivent ici

$$\begin{cases} 2x+y+\lambda = 0, \\ 2y+x+\lambda = 0, \\ 2z(1+\lambda) = 0. \end{cases}$$

Il est ainsi clair que $\lambda = -1$ ou $z = 0$. Si $\lambda = -1$, le système devient

$$\begin{cases} 2x+y = 1, \\ 2y+x = 1, \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} y-x = 0, \\ y+x = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

et donc

$$x = y = \frac{1}{3}.$$

La contrainte donne

$$z^2 = \frac{1}{3}$$

et donc

$$z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Les points $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ sont donc candidats.
Le cas $z = 0$ donc le système

$$\begin{cases} 2x+y+\lambda = 0, \\ 2y+x+\lambda = 0, \\ x+y = 1, \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} y-x = 0, \\ x+y = 1. \end{cases}$$

Le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ est donc candidat.
Evaluons $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$ en ces points. On a

$$f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9},$$

$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = \frac{3}{4} > \frac{6}{9}.$$

Les points de minimum sont donc $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Exercice 3.
Soit A et b une matrice symétrique définie positive et un vecteur de taille n.
On considère la fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

et on s'intéresse à la minimisation numérique de cette fonctionnelle sur l'ensemble K défini par

$$K = \{v = (v_i) \in \mathbb{R}^n, m_i \leq v_i \leq M_i \,\forall\, i = 1, ..., n\}$$

avec $m = (m_1, ..., m_n)$ et $M = (M_1, ..., M_n)$ deux vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$.
Compléter la fonction Scilab suivante pour l'algorithme du gradient projeté permettant de calculer de minimum de J sur K.

```
function [u, nb_iter] = GPF_PROJETE (A,b,u0,epsilon,max_iter,rho,n,m,M)

u = u0;
nb_iter = 0;

ecart = 2 * epsilon;

while ( (nb_iter < max_iter) & (ecart > epsilon) )

v = u;

u = ......................................... // GPF
for i=1:1:n
  u(i) = ......................................... // Projection
```

```
end

nb_iter = nb_iter + 1;

ecart = ..........................................

end

if (nb_iter == max_iter) then
 disp("Augmenter max_iter pour obtenir la precision souhaitee");
end

endfunction
```

Corrigé.

```
function [u, nb_iter] = GPF_PROJETE (A,b,u0,epsilon,max_iter,rho,n,m,M)

u = u0;
nb_iter = 0;

ecart = 2 * epsilon;

while ( (nb_iter < max_iter) & (ecart > epsilon) )

v = u;

u = u - rho * (A*u-b) // GPF
for i=1:1:n
  u(i) = max(m(i), min(u(i),M(i))) // Projection
end

nb_iter = nb_iter + 1;

ecart = norm(v-u)

end
```

```
if (nb_iter == max_iter) then
 disp("Augmenter max_iter pour obtenir la precision souhaitee");
end

endfunction
```