Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L2, Aspects différentiels (LSMA421)
Année 2015-2016

Examen du 23 mai 2016 - 2h00

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (question de cours).
Calculer la surface de la demi-sphère

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}.$$

Exercice 2
Soient a et b deux constantes strictement positives. On considère l'équation différentielle ordinaire non linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx^2(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $x_0 > 0$ et $x_0 < a/b$.
1) Montrer que l'équation (1) admet une unique solution maximale.
2) Montrer que cette solution maximale vérifie $x(t) > 0$ et $x(t) < a/b$.
3) Montrer que la solution maximale est globale.
4) Trouver deux contantes c et d telles que

$$\frac{1}{x(a - bx)} = \frac{c}{x} + \frac{d}{a - bx}.$$

5) En déduire l'expression de la solution de l'équation (1).
6) Discuter la stabilité des points d'équilibre de (1).
7) Calculer la limite lorsque $t \to \pm\infty$ de la solution de l'équation (1).

Corrigé succinct.
1) L'équation (1) s'écrit aussi

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

avec f la fonction définie par $f(t,x) = ax - bx^2$. On observe que f ne dépend pas de la variable t. $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure donc l'existence et l'unicité d'une solution maximale définie localement autour de t_0 sur un intervalle $]T^-, T^+[$.
2) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la donnée initiale étant comprise strictement entre 0 et a/b, la solution maximale ne peut pas prendre les valeurs 0 et a/b qui sont des solutions constantes de l'équation $x'(t) = ax(t) - bx^2(t)$. Il y aurait en effet contradiction avec le principe d'unicité de ce théorème. La solution maximale est donc également comprise strictement entre 0 et a/b sur son domaine de définition.
3) La solution maximale étant bornée, elle ne peut pas exploser en temps fini. D'après le cours, la solution maximale est donc globale.
4) En mettant au même dénominateur et en identifiant terme à terme, on trouve les relations

$$\begin{cases} d - bc = 0, \\ ac = 1, \end{cases}$$

ce qui donne $c = 1/a$ et $d = b/a$.
5) La solution de l'équation (1) vérifie

$$\frac{x'(t)}{x(t)(a - bx(t))} = 1,$$

et donc, d'après la question précédente

$$\frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{-bx'(t)}{a - bx(t)} = a.$$

En intégrant, on obtient

$$\ln x(t) - \ln x_0 - \ln(a - bx(t)) + \ln(a - bx_0) = a(t - t_0),$$

où encore

$$\ln\Big(\frac{(a - bx_0)x(t)}{x_0(a - bx(t))}\Big) = a(t - t_0),$$

et donc

$$\frac{(a - bx_0)x(t)}{x_0(a - bx(t))} = e^{a(t-t_0)}.$$

Des calculs simples montrent alors que

$$x(t) = \frac{ax_0 e^{a(t-t_0)}}{a - bx_0(1 - e^{a(t-t_0)})}.$$

6) Les points d'équilibre sont 0 et a/b. On a clairement $f'(0) = a > 0$ et $f'(a/b) = -a < 0$ de sorte que 0 est instable et a/b est stable.
7) On a clairement

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{ax_0 e^{a(t-t_0)}}{a - bx_0(1 - e^{a(t-t_0)})} = 0$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{ax_0 e^{a(t-t_0)}}{a - bx_0(1 - e^{a(t-t_0)})} = a/b.$$

Exercice 3
On considère le domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}.$$

1) Donner une paramétrisation du bord de $\mathcal{D}$ orienté dans le sens trigonométrique. On pourra faire un dessin et décomposer la paramétrisation en quatre parties indépendantes.
2) Calculer l'aire de ce domaine à l'aide du théorème de Green-Riemann. On pourra procéder exactement comme dans le cours et utiliser le champ de force régulier dont les composantes sont définies par

$$P(x, y) = -\frac{1}{2}y, \quad Q(x, y) = \frac{1}{2}x.$$

3) En utilisant une autre définition de l'aire et le théorème de Fubini, déduire du résultat précédent la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - y^2}dy.$$

Corrigé succinct.
1) Le bord de $\mathcal{D}$ est composé de 4 parties $\{(P_i)\}_{i=1,2,3,4}$ distinctes. En l'orientant dans le sens trigonométrique, on peut paramétrer ces 4 parties dans le sens trigonométrique de manières distinctes comme suit

$$(P_1) \begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = \frac{1}{2} - t, \end{cases} \qquad t \in [0, 1],$$

$$(P_2) \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}],$$

$$(P_3) \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta), \\ y(\theta) = \sin(\theta), \end{cases} \quad \theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}],$$

$$(P_4) \begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} - t, \\ y(t) = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}].$$

2) On procède comme dans le cours en définissant un champ de force régulier dont les composantes sont définies par

$$P(x,y) = -\frac{1}{2}y, \quad Q(x,y) = \frac{1}{2}x,$$

de sorte que $\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y) = 1$. Par définition, l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ du domaine $\mathcal{D}$ est définie par

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int\int_{\mathcal{D}} dxdy.$$

On a donc

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int\int_{\mathcal{D}} \partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y) dxdy.$$

D'après le théorème de Green-Riemann, cette intégrale est égale à la circulation du champ de force le long du bord de $\mathcal{D}$ orienté dans le sens trigonométrique. On a donc

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} -ydx + xdy.$$

On va calculer cette quantité comme la somme des 4 contributions associées aux 4 parties du bord de $\mathcal{D}$. On a ainsi clairement

$$\mathcal{A}(\mathcal{D})_1 = 0,$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D})_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}dt = \frac{\sqrt{3}}{8},$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D})_3 = \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} sin^2(\theta)d\theta + \cos^2(\theta)d\theta = \frac{\pi}{6},$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D})_4 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}dt = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

On a donc

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

3) Par définition, l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ du domaine $\mathcal{D}$ est définie par

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int\int_{\mathcal{D}} dxdy.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a donc

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx)dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-y^2}dy = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-y^2}dy.$$

On déduit donc de la question précédente que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-y^2}dy = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Exercice 4.
On considère la surface S définie par

$$\begin{cases} x(r,t) = r\cos(t), \\ y(r,t) = r\sin(t), \\ z(r,t) = 1 - r^2, \end{cases}$$

avec $r \in [0,1]$ et $t \in [0, 2\pi]$. On considère le champ de vecteurs

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

1) Quelle est la définition du flux du rotationnel de F à travers S (on ne demande aucun calcul dans cette question) ?
2) Calculer ce flux en utilisant le théorème de Stokes.

Corrigé succinct.
1) Le flux du rotationnel de F à travers S est défini par la quantité

$$\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} rot(F)\,.\,Ndrd\theta$$

où N est le vecteur normal à la surface.
2) Le bord de la surface est défini par

$$\Gamma = \{(cos(t), sin(t), 0)^t,\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

D'après le théorème de Stokes, le flux du rotationnel de F à travers la surface S est égal à la circulation du champ de vecteur F le long de Γ qui est donnée par

$$\int_\Gamma zdx+xdy+ydz = \int_0^{2\pi} cos^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+cos(2t))dt = \frac{1}{2}[t+\frac{1}{2}sin(2t)]_0^{2\pi} = \pi.$$