Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L2, Aspects différentiels (LSMA421)
Année 2014-2015

Partiel du 26 mai 2015 - 2h00

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (question de cours).
Soit $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$.
1) Que signifie la propriété V *dérive d'un potentiel vecteur* ?
2) Montrer que si V dérive d'un potentiel vecteur alors sa divergence est nulle.

Exercice 2
Calculer la longueur de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t), \\ y(t) = \sin^3(t), \end{cases}$$

avec $t \in [0, \pi/2]$.

Exercice 3
1) Calculer l'aire comprise à l'intérieur de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

au moyen d'une intégrale double et en utilisant les coordonnées elliptiques :

$$\begin{cases} x = a\,u\cos v \\ y = b\,u\sin v \end{cases}$$

avec $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.
2) Retrouver le résultat obtenu à l'aide d'une intégrale simple et de la formule de Green-Riemann.

Exercice 4

On considère la surface S définie par

$$\begin{cases} x(r,t) = r\cos(t), \\ y(r,t) = r\sin(t), \\ z(r,t) = 4 - r^2, \end{cases}$$

avec $r \in [0,2]$ et $t \in [0,2\pi]$.

1) Les points de cette surface sont-ils réguliers ?

2) Donner l'expression du plan tangent en un point régulier.

3) On considère le champ de vecteurs

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

a) Calculer le rotationnel de ce champ de vecteurs.

b) Vérifier la validité du théorème de Stokes pour la surface S et le champ F.

4) Calculer l'aire de la surface S.

Corrigé de l'examen du 26/05/15
LSMA 421

Exercice 1

Voir cours

Exercice 2

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$$

$$F'(t) = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3\sin^2 t \cos t \end{pmatrix}$$

$$\|F'(t)\| = \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)}$$

$$= 3\,|\cos t|\,|\sin t| = 3\cos t \sin t \quad \text{car } t \in [0, \pi/2].$$

La longueur de la courbe est donc donnée par

$$L = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t \, dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} 2\cos t \sin t \, dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t \, dt$$

$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = 3/2$$

Exercice 3

1) $\begin{cases} x(u,v) = au\cos v & u \in [0,1] \\ y(u,v) = bu\sin v & v \in [0,2\pi] \end{cases}$

L'aire est donnée par

$$\mathcal{A} = \iint_{xy} dx\,dy$$

En faisant un changement de variables, on obtient

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abu\,du\,dv = 2\pi ab \int_0^1 u\,du = 2\pi ab \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \pi ab$$

car $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos v & -au\sin v \\ b\sin v & bu\cos v \end{vmatrix} = abu$

2) Considérons le champ de vecteur

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}.$$

de sorte que $\partial_x Q - \partial_y P = 1$.

La formule de Green-Riemann implique alors que

$$\mathcal{A} = \iint_{xy} dx\,dy = \iint_{xy} (\partial_x Q - \partial_y P)\,dx\,dy = \int_\Gamma x\,dy$$

où Γ représente la frontière de l'ellipse orientée dans le sens trigonométrique :

$$\Gamma = \{(a\cos v, b\sin v),\ v \in [0,2\pi]\}.$$

On a donc $\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} a\cos v\, b\cos v\,dv = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 v\,dv = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2v)\,dv$

$= \pi ab$

Exercice 4

$$\begin{cases} x(r,t) = r\cos t & r \in [0,2] \\ y(r,t) = r\sin t & t \in [0,2\pi] \\ z(r,t) = 4 - r^2 \end{cases}$$

1) $$M(r,t) = \begin{pmatrix} x(r,t) \\ y(r,t) \\ z(r,t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -2r \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial M}{\partial t} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} := \frac{\partial M}{\partial r} \wedge \frac{\partial M}{\partial t} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -2r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r^2\cos t \\ 2r^2\sin t \\ r\cos^2 t + r\sin^2 t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2r^2\cos t \\ 2r^2\sin t \\ r \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} \wedge \frac{\partial M}{\partial t} \neq \vec{0} \iff r \neq 0$$

Tous les points sauf $(0,0,4)$ sont donc réguliers.

2) En un point regulier $M(r,t)$ l'expression du plan tangent est donnée par

$$\pi = M(r,t) + \mathrm{Vect}\left\{ \frac{\partial M}{\partial r}, \frac{\partial M}{\partial t} \right\}.$$

3) $$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

a) $$\mathrm{rot}\, F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) On a d'une part

$$\iint \operatorname{rot} F \cdot \vec{N} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(2r^2 \cos t + 2r^2 \sin t + r\right) dr\, dt$$

$$= \int_0^2 \left(2r^2 [\sin t]_0^{2\pi} + 2r^2 [-\cos t]_0^{2\pi} + r [t]_0^{2\pi}\right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 r\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = 4\pi$$

On a d'autre part, puisque $\Gamma = \{(2\cos t, 2\sin t, 0),\ t \in [0, 2\pi]\}$,

$$\int_\Gamma z\,dx + x\,dy + y\,dz = \int_0^{2\pi} 2\cos t\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos t\, 2\cos t\, dt = 4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{4}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{4}{2} \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

Le théorème de Stokes est donc vérifié.

4) Par définition, l'aire de la surface est donnée par

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \|\vec{N}\|\, dr\, dt = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^4 + r^2} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr\, dt$$

ie

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\, dt = \frac{2\pi}{8} \int_0^2 8r\sqrt{1+4r^2}\, dr$$

$$= \frac{2\pi}{8} \left[\frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 1\right).$$