Aspects Différentiels Systèmes et Géométrie

Niveau L2 C. Chalons (UVSQ)

La rédaction de ces notes s'est inspirée

pour la partie Systèmes :

- du polycopié sur les équations différentielles (module MA421) de mon collègue de l'UVSQ P. Cieutat

pour la partie Géométrie

- des cours en ligne de Gérard Lavau
- des cours de Jean-Paul Truc
- de mes propres notes de cours lorsque j'étais étudiant

be chapitre propose une introduction à l'étude des systèmes différentiels du premier ordre. Nous considérerens dans un premier temps sur le cas des systèmes linéaires, et plus particulièrement sur le cas des systèmes linéaires 2x2, feuis nous aborderons le cas non linéaire. Il est important d'avoir à l'espit que les équations différentielles interviennent de manuere nécurrente dans de nombreux domaines interviennent de manuere nécurrente dans de nombreux domaines (physique, chimie, économie, biologie...) et que lour compréhension est donc fondamentale. Nous versons que le cas des systèmes linéaires en dimension deux permet d'effectuer une analyse complète des volutions en dimension deux permet d'effectuer une analyse complète des volutions dandis que le cas des systèmes non linéaires, nettement plus compliqué, handis que le cas des systèmes non linéaires, nettement plus compliqué, ne permet pas en général une écriture explicite des solutions. Nous ne permet pas en général une écriture explicite des solutions. Nous ne permet pas en général une écriture explicite des solutions.

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

et que l'on complète le plus souvent par la donnée d'une condi dion "initiale" de la forme (on parle alors de problème de Bauchy)

 $\chi(V_0) = \chi_0$ (2) où to EI (le plus souvent to=0) et & EIR" sont donnés.

Résondre un tel système signifie bouver toutes les fonctions vectorielles $T \rightarrow UR^n$ salisfaisant (1) (et éventuellement (2). $t \rightarrow \chi(1)$

Il est important d'avoir à l'espit que l'adjectif qualificatif "lineaire" provient de la dépendance linéaire du membre de droite de (1) vis à vis de X(H). En particulier les éléments de AH) et de g(H), et les solutions 2(1) recherchées n'ont aucune raison d'être linéaires ent. Avant d'énoncer un résultat d'existence et d'unicité, mentionnons que lorsque glt) =0 V t EI, l'équation (1) est dite homogène. Dans le cas non homogène, l'équation

x'(t) = A(t) x(t) (3) est appelée <u>Equation</u> homogène associée \bar{a} (1).

Théorème de Cauchy-Lipschitz (admis) Le problème de Cauchy (1)-(2) admot une unique solution.

1) L'existence provient notamment des hypothèses de continuité sur A(b) et g(b) et de la linéarité de (1). L'unicité provient de

2) Le théorème de Cauchy-lipschotz assure en particulier que deux solutions distinctes ne peuvent pas se croiser (elles sont donc distinctes en tout point de I).

Avant de se focaliser sur le cas des systèmes 2x2 (n=2), il est utile de toujours avoir à l'esprit que toute solution de l'équation

complete (1) jeur s'écrire comme la somme d'une solution particulière de l'équation (1) et d'une solution padiculière de l'équation homogène associée (3). Soit en effet X, une solution particulière de 1), et X une autre solution de (1). Alors, par linéarité, X-X, vérific (3):

 $(X - x_p)'(t) = A(t) (x - x_p)(t)$

En notant $X_o = X - X_p$, X_o est une solution de l'équation homogène (3) et on a bien X = Xp + Xo. Threisement et toujours par linéarité la somme d'une solution particulière de (1) et d'une solution particulière de (3) donne bien une solution de (1).

Nous nous focaliserons dans la suite de cette gremiere partie sur le cas des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (AlB=A+t) et en dimension 2 (m=2). Nous les écrisons sous la fame

$$\begin{pmatrix} x(l) \\ y'(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(l) \\ y(l) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(l) \\ g(l) \end{pmatrix},$$

avec a, b, c, d EIR, , ou développée

Remarque dorsque b=c=0, on retrouve deux équations différentielles découplées pour x et y.

Etude du système homogène associé.

En considére dans un premier temps l'étude du système homogène associé

$$X'(h) = AX(h)$$
avec $X(h) = \begin{pmatrix} x(h) \\ y(h) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Il est très facile de voir, par linéarité, que l'ensemble So des solutions de (4) est un espace vectoriel. Nous allons montrer que cet espace vectoriel So est de dimension 2. En rappelle au préalable la définition suivante:

Definition

Deux solutions X1 et X2 de (4) sont lineairement indépendantes si 2, x1+22 x21)=0 t= 3 2=0

ie s'il n'existe pas de nombre réel 2 tel que

$$X_1(L) = \lambda X_2(L)$$
 $\forall E$ $(\lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1})$

on
$$X_2(1) = \lambda X_1(1) \ \forall t \ (\lambda = -\frac{\lambda_1}{\overline{\lambda}_2})$$

Théorème

d'ensemble des solutions de (4) est un espace vectoriel de Jimension 2. Il existe donc une base 16, 1/2 2 composée de deux solutions linéairement indépendantes de (h) telles que toute solution de (h) s'écuvent sous la forme $X = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ie $S_0 = \{c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 : c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

Vemonstration

Soil to EI. On considère l'operateur

$$l: S_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X \rightarrow X(k_0) = \begin{pmatrix} \chi(k_0) \\ y(k_0) \end{pmatrix}$$

L'operateur l'est clairement linéaire. Il est également bijectif puisque d'après le théorème de bauchy-lipschitz, V Xo=(xo) EIR², il existe une unique solution X de (4) telle que $X(b) = \begin{pmatrix} \gamma_5 \\ \gamma_5 \end{pmatrix}$. On note $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Portons que $\{ p_1, p_2 \}$ est une

base de So. No ntrons tout d'abord qu'elle est génératrice de So.

Soil $X \in S_0$. $X(k_0) = \begin{pmatrix} \chi(k_0) \\ y(k_0) \end{pmatrix} = \chi(k_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \chi(k_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ La fonction x(b) \$ + y(b) \$ est clairement solution de (4) par linearité (puisque do et la sont solutions de (h)) et vérifie

x(b) \$(b) + y(b) \$(b) = x(b) (1) + y(b) (1) = X(b). Par unicote, on a donc nécessairement X= x Cho) \$ + y Cho) \$ 1.

Montrons maintenant qu'elle est libre. Dipposons que

200 + 2, D, =0

On a donc 2 % (b) + 2 Thalb) = 2 (1) + 2 (1) = (20) = (0), et par suite 2=2,=0, ce qui conclut la démonstration.

Il est utile pour la suite de définir le Wronskien de deux solutions X1 et X2 de l'équation homogène (4) comme la quantité W(1) définie W(H = det [X1(H), X2(H)]

On a alors le résultat suvant.

troposition Soient X1 et X2 deux solutions de (h). Alors

 X_1 et X_2 sont linéairement (3) W(t) $\neq 0$ $\forall t \in (2)$ (3) (3)

Wemonstration

On a aussi (1) =) (3) puisque (1) =) Ito t. 9 X1lbol et X2 (b) sont libres

Le $W(V_0) \neq 0$ (3) \Rightarrow (1) fuisque si X_1 et X_2 étaient liées alors $X_1(V)$ et $X_2(V)$ seraient liés pour tout $Y_1(V)$ et $Y_2(V)$ seraient $Y_1(V)$ seraient $Y_1(V)$ et $Y_2(V)$ et $Y_2(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_2(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_2(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_2(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_2(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_2(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_2(V)$ et $Y_1(V)$ et $Y_1(V)$

On a donc à ce stade $(A) \leftarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (A)$ Il reste donc à démontrer (1) = (2). Soit X1 et X2 deux solutions linéairement

indépendantes et soit to EI, d'opérateur l'S-s IR² de la démonstration précédente permet de dire que XICho) et X2Cho) sont aussi linéairement. indépendantes puisque & X1(b)+2(X2(b)=0 =) X1X1+2X2=0 =) x1=2=0 et donc indépendantes puisque x1X1(b)+2(X2(b)=0) = W(b) +0, ceci V to. Cqfd.

Determiner l'ensemble des solutions de (4) (c'est-à-dire résoudre (4)) revient donc à déterminer une base 14, 42 }. Pour cela, nous commençons par reppeter un théorème de décomposition des matrices, connu sous le nom de théorème de Schur.

Théorème (Lécomposition de Schur de M, Ca)

Soil A une matrice de d'or (a).

(i) Il existe une matrice & unitaire, iè telle que 0°0 = I, et une matrice T triangulaire supérieure, toutes les deux ds Ja (c), telles que AD = ST. Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs piopres de A (éventuellement complexes).

(ii) Si AE Ton (IR), ie A est une matrice réelle, et que les valeurs propres de A sont toutes les deux réelles, alors en peut choisir TE M, UR) et QEJGIR) dans la Lécomposition AD = QT / Thiangulaire supérieure et & telle que & D=I).

Dans la suite, on utilisera si besoin les notations suivantes:

$$Q = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Remarquons que la relation AD=ST s'écrit aussi

Vy est donc un vecteur propre associé à la valeur propre 21.

Cherchons maintenant les solutions de (4).

$$X'(t) = AX(t)$$

$$\Rightarrow X'(t) = BTS'X(t) \qquad \text{can } A = BTS'$$

$$\Rightarrow S'X'(t) = TS'X(t) \qquad \text{can } B \text{ ne disperd pas de } t$$

$$\Rightarrow Z(t) = TZ(t) \qquad \text{avec } Z(t) = S'X(t)$$

$$\Rightarrow \text{ou encouse } X(t) = DZ(t).$$

$$\Rightarrow \text{notant } Z(t) = \begin{pmatrix} 54(t) \\ 32(t) \end{pmatrix}, \quad l' \text{ eigelite } Z'(t) = TZ(t), \quad s' \text{ evil aussi}$$

$$\begin{cases} 3'_1(t) = \lambda_1 3_1(t) + \alpha_2 3_2(t) \\ 3'_2(t) = \lambda_2 3_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow X' \text{ equation sur } 3_2 \text{ elemnt decouplese, on a boul de suite}$$

$$\Rightarrow 3_2(t) = k_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{ausc } k_2 = cte$$
et ensuite
$$3'_1(t) = \lambda_1 3_1(t) + \alpha_2 3_2(t)$$

$$\Rightarrow 3'_1(t) = \lambda_1 3_1(t) + \alpha_2 3_2(t)$$

$$\Rightarrow 3'_1(t)$$

Il y a alors trois situations possibles:

-> % d=0:

-> Si d = 0 et 2 = 2:

alou kill = dk2 et k1(1) = dk2 + K1 (k2 cte)
dinkgration

alos $k_1(l) = \frac{dk_2}{dl} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + k_1$ (K= cte d'intégration) -> Si d to et 2 72:

On a donc, avec $K_1 = cte$, $K_2 = cte$, $Z_1 el Z_2$ de la fame suivante: 8/ $\frac{3}{4}(1) = \begin{cases} k_{1}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ k_{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ k_{3}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ k_{4}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it} \\ \frac{1}{2}e^{2it} & \frac{1}{2}e^{2it}$ et 32 (1) = K2 e 2t. En utilisant la relation X(t) = QZ(t), ie $\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ 3_2(t) \end{pmatrix}$ on en déduit que x(1) et y(1) pouvent se mettre sous la forme avec 31 et 32 définis ai-dessus, ce qui donne que X(t) est de la forme suivante où K_1 et K_2 sont des constantes: $X(t) = \begin{pmatrix} \chi(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2 + \lambda_1 t} e^{\lambda_1 t} V_2 & \frac{\lambda_1 t}{2$ Donne dit pas que les formules cidensus donnenture solution VK1, K2 constantes! Nous allons maintenant distinguer plusieurs cas permettant de préciser un peu plus la forme des solutions et la base 3 /4, /2 y. No hors qu'à ce stade les différentes quantités 2, 2, V1, V2 peuvent être complexes abos que nous sommes à la recherche d'une base de solutions \$1, \$2 à valeurs Le polynôme canactéristique PA(A)= det (A-AI) de A, dont les racines sont les

valeurs propes de A, étant un polynôme de degré 2 à coefficients réèls, il peut y avoir 2 valeurs propres réelles distinctes (1>0), deux valeurs

propies réelles égales (D=0), ou deux valeurs propies complexes conjuguées (A<O). Une matrice dont les valeurs propres sont distinctes étant diagonalisable, nous distinguerons les 3 cas suivants (exhaustifs): Cas 1: la matrice A est diagonalisable de la la (avec 2,=2, ou 2, \$2); 6n auna alos d=0, A∈K, Z∈IR, V, ∈IR², V2 ∈IR² la matrice A admet deux valeurs propres réelles égales (2,=22) et n'est pas diagonalisable ds ir. 6n auna alos d≠0, A, ∈ IR, A, ∈ IR, V, ∈ IR, V, ∈ IR. et JA4= 24 7AV2 = XV1+22 V2 la matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées (Z= JL-iw = Z= T+iw) et est diagonalisable de C: Cas 3: On ama alors x=0, 2, EC, 2, CC, 4, EC2, V2 EC2 el Avas 21 Va (AV2 = 22 V2 Précisons maintenant la forme des volutions et la base 441. 1/2 y dans ces différents cas possibles. (4) donne tout de suite $X(H) = K_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + K_2 e^{\lambda_2 t} V_2$ Cas 1 de sonte que So= qce de V1 + Se de V2, C1 EIR, C2 EIR 6 del [du (H), \$2 (H)] = e(2+2)t del [Vh, V2] \$0 car Vy et V2 sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc ils sont forcément libres (s'ils étaient lies on aurait par exemple $v_2 = \beta v_1 = \beta Av_2 = \beta Av_4 = \beta Av_4 = \lambda Av_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 = 0$ =) V2=0 ce qui est absurde. donc {\$\psi_1, \$\psi_2\$} est brien une base de So.

```
Cas 2
```

(4) donne tout de suite X(H = e = { K, V1+ K2 (LEV1+V2)} avec $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2$ de sorte que

Remarque Soi \$1(b)=e^{2t} V1

\$\P_2(6)=e^{2t} (\lambda t \nu_1 + \nu_2)

de sorte que det [Pa, Pz] = e det [Va, 2+Va+Vz]

= e det [4, 12] #0 car la famille 14, 125 est libre (la matrice de

passage of est inversible) donc (\$1, \$2) est brien une base de So.

Cas 3

(4) donne tout de sinte X(H) = Kge V1 + Kze 22 v2 avec

 $\lambda_1 = \pi - i\omega$ $\omega \neq 0$ $\lambda_2 = \pi + i\omega$ ont $(K_1 = V_2)$ Notons qu'à ce de sorte que $X(H) = e^{-i\omega t}$ $(K_1 = V_2)$ Notons qu'à ce niveau, les vecteurs V_1 et V_2 sont dans C^2 et $e^{\pm i\omega t} \in C$. Remarquons que λ_1 et λ_2 étant complexes conjuguées, il est toujours fossible de choisir

choîs ir $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1}}$ le vecteur conjugué de $\frac{1}{\sqrt{1}}$.

Puisque e = cosut - i sinut on a alors eint = cosurt i sinut

X(h) = e (Cos(wt) (Ky V1 + Kz V2) - 1 Sin(wt) (Ky V1 - K2 V2))

et x'(t) = xx(t) + ent (- w Sin(wt) (k, V1+k2V2) - iw (so(wt) (k, V1-K2V2))

X(0) = K1 V1+ K2 V2 En particulier, nous avons X'(0) = JLX(0) - iw (Ky 4-K2 /2)

 $(= k_1 (\pi - i\omega) V_1 + k_2 (\pi + i\omega) V_2$ $= k_1 \lambda_1 V_1 + k_2 \lambda_2 V_2$ $= A \times lo)$

X(0) et X'(0) étant des réèls, les constantes k, et k, sont frément 111 telles que K1V1+K2V2 EIR2 i(k, 4, - K, V2) € 1R2 Ainsi, on est certain que les solutions sont de la fame X(t)= ent (Cos(wt) W, + Sin (wr) W2) (5) où Wy et W2 sont deux vecteurs de 12. [] Cela ne signifie pas que tous les vecteurs W1 et W2 vont donner une solution, mais simplement que de tels vecteurs existent pour toute solution. Plus précisément, puisque nous obtenons facilement de (5) X(0) = W4 (x'(0) = JW4 + WW2 et que l'on doit avoir x'(0)= Ax(0), nous obtenons la relation de compatibilité suivante entre W1 et W2: W2 = (AW1-JW1). On vérifie alors simplement que (5) donne bien une solution $\forall W_1, W_1 \in \mathbb{R}^2$ tels que $W_2 = \frac{AW_1 - rW_1}{\omega}$. On a done tels que $S_0 = \left\{ e^{st} \left[Cos(\omega t) W_1 + Sin(\omega t) W_2 \right], W_1 \in \mathbb{R}^2, W_2 = \frac{AW_1 - RW_1}{cu} \right\}$ Remarque 4 est intéressant d'observer que la relation $\int w_2 = \frac{Aw_4 - rw_4}{\omega}$ W2 = (A-rI) W1 s'écrit aussi $W_4 = -\frac{(A-\pi I)}{\omega}W_2$. Il suffit en effet de moter que $A = 8\left(\frac{n-i\omega}{n+i\omega}\right)$ $8^{-1} \Rightarrow (A-\pi I) = -i\omega 8\left(\frac{n-i\omega}{n-1}\right)$ $=) (A-nI)^{2} = -\omega^{2} I$ $=) (A-nI) W_{2} = (A-nI)^{2} W_{1} = -\omega W_{1}$ =) W1 = - (A-NI) W2

En appelle trajectoire d'une solution (-> X(1) d'un système différentiel de dimension 2 l'ensemble

 $\{x(t) = (x(t), y(t)); t \in \mathcal{I}\}$

des points du plan. La représentation de ces trajectoires dans le plan s'appelle le portrait de phase.

Nous mous intéressons dans ce paragraphe aux portraits de phase des systèmes différentiels 2x2 linéaires à coefficient, constants que nous venons d'étudier dans le détail. Pour fixer les idées, on considérera ici que I = IR. Nous introduisons tout d'abord la définition suivante:

Un point d'équilibre est une solution constante d'un système diffé-rentiel. Un tel point est asymptotiquement stable ses lim X(t) = Xe four toute solution du système. Loute solution du système considérés s'écrivent Li, les systèmes différentiels considérés s'écrivent

X'(t) = AX(t).

Les points d'équilibre sont donc les éléments du noyau de A et en particulièr (0,0) est toujours un point d'équilibre, Focalisons nous sur cet point d'équilibre et sur le comportement des relations au voixinage de ce point.

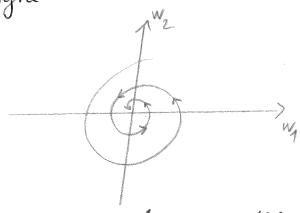
théorème de point (0,0) est asymptoliquement stable ssi les parties réelles des valeurs propres de 1 sont stickment régatives.

Supposons que les valeurs piques de A soient strokment régatives. Dans ce cas, on a pour toute solution

On dit qu'on a un nœud attactif dégénéré

X(h)= ent [Cos (out) Wy + Sin (out) W2]

a We et Wz sont deux vecteurs lels que Wz - AWy - 2W1 Notons que {W1, W2}, est toujours une base de 12° juinque det [w, w2] = det [w, Aws] to Seffet, Aws = 8w, => 8wer valeur hope de A. Puisque les coordonnées de X(t) de la base 4 W1, W2 4 changent clavement de signe selon les valeurs de t, on a la figure suivante:

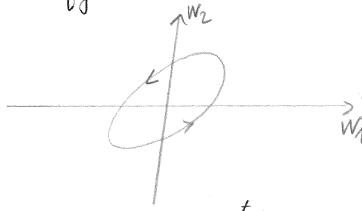


On dit qu'on a un foyer attractif.

4) Notons enfin que si r=0, on n'a plus lin X(1) = (0,0) puisque

X(H)= Cos(wh) W1 + Sin(wh) W2.

et on a la configuration suivante (périodique)



On dit qu'on a un centre

L'objectif de ce paragraphe est de donner une autre représentation des solutions de l'équation X'(1)=A X(1) à l'ai de de l'exponentielle de la matrice A

Observons tout d'abord que l'ensemble 06 14R) auquel appartient A étant un 1R-espace vectoriel noissée des Limension fine, il est donc complet. La suite un = $\frac{n}{k=0} \frac{A^k}{k!}$ étant de Cauchy puisque

$$||u_m - u_p|| = ||\sum_{k=p+1}^m \frac{A^k}{k!}|| \le \sum_{k=p+1}^m \frac{||A||^k}{k!} \frac{1}{n!} \frac{x^n}{n!}$$
, la
 $(rappelons que e := \sum_{k=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$, la
serie étant convergente (d'après la règle
de d'Alembert) et donc de Bauchy)

elle est nécessairement convergente. On définit alors par analogie avec l'exponentielle d'un nombre réèl l'exponentielle de la matrice A en posant $e^A := k = \frac{\tilde{\Sigma}}{k!} A^k$, où on fose $A^2 = I$ (matrice identite).

Il est possible de démontrer que l'exponentielle de matrice verifie les papriétés suivantes:

$$(iii)(e^{A})^{-1} = e^{-A}$$

(iii)
$$e^{A} = e^{A}$$

(iii) $(e^{A}) = e^{A}$
(iv) $e^{A} = e^{A}$ $\forall t,s$

$$(v) \frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA} \forall t$$

(iv)
$$e^{t+s} = e e V t$$

(v) $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA} V t$
(vi) $si D = \begin{pmatrix} \lambda_1 \circ \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ along $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} \circ \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$

Théorème Les solutions de l'équation X'(t) = AX(t) s'écrivent sous la forme X(t) = et X avec XE 122.

Essayons de rebouver les formes précédentes de les différents cas. Gas 1 Gn a $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2 & V_2 \end{pmatrix}$ de sorte que X(H= eX = P(e^{At o})P'Xo $= \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}^{t} & \mathcal{A}^{t} \\ \mathcal{A}^{t} & \mathcal{A}^{t} \end{array} \right) \begin{array}{c} \mathcal{P}^{t} X_{0} \\ \mathcal{A}^{t} & \mathcal{A}^{t} \end{array}$ In posant $\binom{C_1}{S} = P^{-1}X_0$ on retrouve donc l'expression 2+X(1) = Get V1 + Set V2. Cas 2 Dans ce cas A a une valeur paper double réelle mais m'est par diagonalisable de la Avec les nobations précédentes, on a et det[V11/2] +0 JAV = AV $[AV_2 = \alpha V_1 + AV_2$ ie $\int (A - \lambda I) V_1 = 0$ $(A - \lambda I) V_2 = \alpha V_1$ $=) \begin{cases} (A - \lambda I)^{2} V_{1} = 0 \\ (A - \lambda I)^{2} V_{2} = 0 \end{cases} =) N_{:} = (A - \lambda I) \text{ est telle}$ $=) \begin{cases} (A - \lambda I)^{2} V_{2} = 0 \\ (A - \lambda I)^{2} V_{2} = 0 \end{cases} = 0$ Ainsi, il est possible d'obtenir une expression simple de l'A: eta = $e^{tA} = e^{tA} + t(A-AI)$ = $e^{tA} = e^{tA} = e^{tA}$ avec $e^{tA} = \frac{2}{k} \frac{(\epsilon N)^k}{k!} = I + tN$ puisque $N^2 = 0$ de sorte que et = et (I+tN) puis X'(1)= et (I+tN)Xo. Remarque A-AI = P(AA)P'-P(AI)P' = P(OA)P' de sorte que I+tN=PIP'+P(0 dt)p'=P(1 dt)p'= (4 kty) P', 2n notant (2)=PXs

on refrouve donc l'expression XIII=et/qV1+c2(dtV1+V2)}.

Dans ce cas
$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$
 and $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

w +0. On a bien sûn XIH= et X, avec et 2=n-iw

Essayons de retrouver l'expression bouver page M.

Essayons de retrouver d'explement souver
$$p^{-1}$$

et $A = P \left(e^{nt} e^{-i\omega t} \circ e^{-i\omega t} \right) P^{-1} = e^{nt} P \left(e^{-i\omega t} \circ e^{-i\omega t} \right) P^{-1}$

En nobant $\binom{n_1}{n_2} = P^{-1}X_0$, on obtaint $\binom{n_1}{n_2} = P^{-1}X_0$, on obtaint $\binom{n_1}{n_2} = P^{-1}X_0$, on obtaint $\binom{n_1}{n_2} = \binom{n_1}{n_2} = \binom{n_2}{n_2} + \binom{n_2}{n_2} = \binom{n_1}{n_2} + \binom{n_2}{n_2} = \binom{n_1}{n_2} + \binom{n_2}{n_2} = \binom{n_2}{n_2} + \binom{n_2}{n_2} = \binom{n_2$

ce qui est actement la forme obtenue page 10, conduisant ensuite à celle de la page 11.

Remarque YI est possible de montrer que e = e TI, + e TIz avec $T_A = \frac{1}{2 \cdot \lambda_2} (A - \lambda_2 I) = \frac{-1}{2 \cdot \omega} (A - \lambda_2 I)$

et
$$T_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 I) = \frac{1}{2i\omega} (A - \lambda_1 I)$$

Sneffet, juisque X(H=etx) et X(H=qetv1+czetv2, qet C_2 sont tels que $\int C_1 V_1 + C_2 V_2 = X_0$ (en multipliant par A la précédente) $(C_1 \lambda_1 V_1 + C_2 \lambda_2 V_2 = A X_0)$ (en multipliant par A la précédente)

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 V_1 = \frac{AX_3 - \lambda_2 X_3}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(A - \lambda_2 I) X_3}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \zeta_2 V_2 = \frac{AX_3 - \lambda_1 X_3}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{(A - \lambda_1 I) X_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{vmatrix}$$

do resolution are the systems donne $\int C_{1}V_{1} = \frac{AX_{5} - \lambda_{2}X_{5}}{\lambda_{1} - \lambda_{2}} = \frac{(A - \lambda_{2}I)X_{5}}{\lambda_{1} - \lambda_{2}}$ $C_{2}V_{2} = \frac{AX_{5} - \lambda_{1}X_{5}}{\lambda_{2} - \lambda_{1}} = \frac{(A - \lambda_{1}I)X_{5}}{\lambda_{2} - \lambda_{1}}$ $Ainsi, e^{tA}X_{5} = e^{\lambda_{1}t} \frac{(A - \lambda_{2}I)}{\lambda_{2} - \lambda_{2}}X_{5} + e^{\lambda_{2}t} \frac{(A - \lambda_{1}I)X_{5}}{\lambda_{2} - \lambda_{1}}X_{5}, don't le n'esultat fuisque$ $Ainsi, e^{tA}X_{5} = e^{\lambda_{1}t} \frac{(A - \lambda_{2}I)}{\lambda_{2} - \lambda_{2}}X_{5} + e^{\lambda_{2}t} \frac{(A - \lambda_{1}I)X_{5}}{\lambda_{2} - \lambda_{1}}X_{5}, don't le n'esultat fuisque$ cette égalité est vraie pour tout vecteur Xs.

On considére maintenant le système avec second membre X(1) = AX(1) + g(1).

Une premiere méthode pour résondre cette équation à partir de la résolution du système homogène associé est connue sous le nom de mélode de variation des constantes. Supposons connue une base } \$\plaise_1 \ightg de l'ensemble des solutions du système X(F) = AX(F). La méllode consiste à chercher une solution de X'(H = AX(H+g(t) sous la forme $X(t) = G(t) \oint_A (t) + C_2(t) \oint_2 (t)$ (les constantes $G_1 = C_2$ du cas homogène varient ici). En dérivant cette égalité on obtient

X'(H= 5'(H) \$ (H) + 5'(H) \$ (4) +9(1) 6'(1) + 5(1) 6'(1)

Demander l'égalite X'll) = AX(+1 + g(+) revient donc à imposer G'(H) \$1(H) + G'(H) \$2(H) = G(H) A\$1(H) + G(H) + g(H) .
+ G(H) \$1(H) + G(H) \$2(H) \$2(H) = G(H) A\$1(H) + G(H) + G(H

Ø, et & étant solutions de l'équation homogène, nous obtenons alors

 $c_1'(H, \phi_2(H) + c_2'(H, \phi_2(H) = g(H))$ $c_1'(H, \phi_2(H) + c_2'(H, \phi_2(H) = g(H))$ $c_1'(H, \phi_2(H))$ etant une famille libre four tout t, il est possible de $c_1'(H, \phi_2(H))$ etant une famille libre four $c_1'(H, \phi_2(H))$ etant une famille $c_1'(H, \phi_2(H))$ etant $c_2'(H, \phi_2(H))$ etant $c_1'(H, \phi_2(H))$ etant $c_1'(H, \phi_2(H))$ etant $c_1'(H, \phi_2(H))$ etant $c_2'(H, \phi_2(H))$ etant déterminer de manière unique c'₁(4) et c'₂(4), puis par intégration G(1) et g(1) à une constante près. Ce qui conclut la description de

En verifie également facilement la validité du théorème de représenta. tion suivant des solutions à l'aide de l'exponentielle de mature.

Théorème les solutions de l'équation X'(l) = AX(l) + g(l) s'écrivent sous la forme $X(l) = e^{tA}X + \int_{c}^{t} e^{(t-s)A}g(s)ds$ avec $X_{s} \in \mathbb{R}^{2}$.

(on rappelle qu'on montre simplement que par définition de la dérivée (faux d'accousement)

Remarque Dans la formule précédente, on remarque que X 19/est la somme de la solution de l'équation homogène valant X_0 en E=0 et de la solution de l'équation non homogène valant O en E=0.

Remarque Remarquons onfin que dans le ces particulier où g(+) = q pour tout t (la fonction est constante), un point d'équilibre Xe du système différentiel est une solution de l'équation

 $AX_e = -g$, et les solution de l'équation x'(H = AX(H + g(t))) sont de la forme

X(f)= e xo + xe (A X(0) = Xetoici). En montre par ailleurs que Xe est asymptotiquement stable si et seulement si les parties réelles des valeurs propres de A sont strictement négatives en utilisant les résultats du cas homogène puisque lim X(H) = Xe E) lime Xo = 0.

Nous allons maintenant nous intéresser à des équations différentielles non linéaires du premier ordre, c'est-à-dire telles que la dépendance du second membre vis à vis de l'iniconnue pouva être non linéaire. Nous commençons par le cas d'une seule équation avant de considérer le cas d'un système d'Équations.

Equations différentielles non linéaires du premier ordre

En considére dans ce paragraphe le système suivant composé d'une seule Equation différentielle

où fixer-sir est une fonction définie sur le complétée de la

 $\chi(\xi)=\chi_0$, (7)

anc toteR, roteR. Nous supposerons toujours que f'est continue.

Contraviernent au cas linéaire étudié précédemment (flt, x) de la forme f(t,x)= a(t) x + g(t)), il est important d'avoir à l'esprit qu'une solution du problème de Bauchy (6) n'est pas toujoirs définie our l'intervalle ik tout entier, c'est-à-dire four tout EEIR. Lette remarque fondamentale justifie l'introduction de la définition suivante

(i) Une volution de l'équation (6) est la donnée d'un couple (I, y) où I est un intervalle de la d'intérieur non vide (I + p et I + fait, a EIR) et y une fondion de classe 8¹ définie sur I et telle que

la relation (6) soit verifier par la fonction y. (ii) En dit qu'une solution (T, z) prolonge la solution (T, y) si ICJ

et yll)=3/t) four tout t dans I. (iii) En det que (I, y) est une solution maximale s'il n'existe pas de

volution (T, Z) qui la prolonge.

iv) (on dit que (F, y) est une solution globale si I=1R.

Afin d'illustrer le caractère non nécessairement global d'une solu. tion de (6).(7), on peut considérer le problème

 $\int x(t) = -x(t)$ $\int x(0) = 1$

dont on montre facilement que la solution maximale est définie sur J-1, + « [far x(1) = 1+t Greenangue au passage que lim x(1) = +00 de sorte qu'il m'y a aucune chance de pouvoil polonger cette solution.

Nous avons le théorème d'existence locale suivant.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (admis)

En suppose que f (est continue et) admet une dérivée fartielle It ja raport à sa deuxième variable continue sur ux ux. Alors (i) le publème (6). (7) admet au moins une solution, le 3 ESO (i) le publème (6). (7) admet au moins une solution, le 3 ESO (i) le publème (6). (7) admet deux solutions définies localement (ii) si le publème (6). (7) admet deux solutions définies localement autour de to. (In. yn) et (Iz. yz), alors yn(1): ye(1) pour tout ti INI autour de to) (In. yn) et (Iz. yz), alors yn(1): ye(1) pour tout ti INI. (les graphes de deux solutions déstinctés ne peuvent donc pas se couper). (iii) enfin, le publème (6). (7) admet une unique solution maximale est male (I, y) avec to (I (I = UR si cette solution maximale est globale).

(iv) Si on suppose de plus que l'est lipschitzienne fai rapport à la deuxième), ie que VE, xième variable (localement fai rapport à la deuxième), ie que VE, il existe un voisinage V(E) de E et une constante L tels que

 $\forall t \in V(\overline{t})$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}$, $|f(t_1, x_2) - f(t_1, x_1)| \leq L |x_2 - x_1|$, alors le publième (6)-(7) admét une solution (unique) globale.

Une solution de (6)-(7) n'étant pas nécessairement globale, il est intéressant de se demander quel est le comportement de cette solu. toir au bord du domaine de définition. On a le résultat suivant.

Theoreme

(on se place sous l'hypothèse du théorème fiécédent et on mote (I, y) la

(on se place sous l'hypothèse du théorème (6).(1). Alors I est récessairement

solution maximale du fublième (6).(1). Alors I est récessairement

de la forme JT, T L avec de plus

de la forme JT, T L avec de plus

(i) T = +00 ou lim y(t) = I = si T + 2 + 00

(ii) T = -00 ou lim y(t) = ±00 si T > -00.

Dans les cas T+ < +00 et/ou T >-00, on dit que le solution 22/ explose en temps fini.

Sous les hypothèses du théorème précédent, si la solution maximale de (6)-(7) est bornée sur son domaine de définition, alors elle est forcement globale, le I= CR.

Le corollaire constitue donc un résultat important et utile four mon-trer qu'une solution maximale est globale, pouver que l'on prervienne à montrer qu'elle est bornée. Bour cela, le lemme suivant est souvent utilisé.

Soil REIR et b: [to.ta] -> IR une fonction continue telle que b(1)>>> VEC(to,ta]. Soil u: [to,ta]->IR une fonction continue telle que ull) & k+ stoles new do V (E Cto, ta).

Démonstration

Rooms v(l) = k+ 1 b(s) u(s) do. 6n a v'(t) = b(t) u(t) et donc par hypothese V'(H & b(H) Lelt), où encore $\exp\left(-\int_{0}^{\pi}b(u)ds\right)\left(v'(H)-b(H)v(H)\right) \leq 0$

ie de (VII) exp(- stobbids)) = de fonction qui à t associe V(1) exp(-stb(s)ds) est donc décreissante, de sorte que $\forall \xi \in (t_0, t_1)$:

et donc ull & k exp (f b(s) ds). Ce qui conclut la démonstration.

Noyons comment utiliser ce lemme, en demontrant le théorème 23/ suivant qui nous donne une condition assurant que toutes les solutions maximales sont globales. On se place dans les conditions d'application du théorème de Cauchy-lipschitz.

Théorème

On suppose de plus qu'il existe une fonction a : 12 -> 12 continue telle que $|f(l,x)| \le a(l) (1+|x|) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Alors la volution maximale de (6). (7) est globale.

Vernonstration

On note (I= JT, T+C, y) la solution maroimale de (6).(7). In inter-grant la relation y'(1): flt, y(1) entre to et t, on oblient

ie par hypothèse

En utilisant le lemme de Gronwall, puisque (1+1y(h)) L (1+1y(h))) + fa(s) (1+1y(s)1) ds,

on en déduit que

où encore 19(1) [(1+ 19(ho)) exp [] a(s) ds), It E (to, T+C.

Il est ainsi clair qu'on me peut pas avoir lim y(1) = ± 00. En montre de la même manière qu'on ne peut pas avoir lim y(1) = 1 00. En en dédict

donc que T+=+00 et T'=-00, ce qui oignifie que la solution maximale est globale

Nous énonçons maintenant un petit lemme qui sera utilisé dans la suite dédice aux systèmes.

Soit f: Ja, + 206 -> 12 une fonction dérivable. On supor que l'admet une limite fine au voisinage de + a, et que la fonction dérivée f'admet une limite (finie ou infinie) au voisinage de + a. Alors lim f(1) = 0.

<u>Vémonstration</u> On raisonne par l'absurde. Supposons lim f'(1) = + 0 ou lim f'(1) = l \$0, l \in II.

Il existe donc R>O et T>a t.g S'(H) DR Y 13T,

de norte que $f(t) = f(T) + \int f'(s)ds \geqslant f(T) + R(t-T)$

et donc lim flut: +00; ce qui est absurde.

On montre de la nième manière que lim f(t) = - so si on suppose que

lin f'll) = -0 on lim f'(4) = l +0, l \(1/2 \).

(i) Nous avons bien entender un résultat analogue au voisinage de - 0 ii) de une fondion dérivable fadront une limite finie au voisinage de +0, la fonction dérivée n'admet pas nécessairement une limite

au voisinge de + a. On peut considérer par exemple la fonction f(1) = ditt2) pour t>0 qui vérifie lim f(1) = 0 et f'(1) = 2t^260(t^2) Sout2),

re $f'(t) = \frac{\cos(t^2)}{\cos(t^2)} - \frac{\sin(t^2)}{t^2}$ de limite en too $\frac{\cos(t^2)}{t^2}$

Systèmes différentiels non linéaires du permier ordre

On considére à nouveau dans ce paragraphe l'étude d'un système différentiel en dimension 2, mais cette fois ai sous forme mon linéaire, que l'on ecrina

$$X'(h) = F(X(h))$$
 (8)
$$(I(X(h), y(h)))$$

ance
$$X(H) = \begin{pmatrix} x(H) \\ y(H) \end{pmatrix}$$
 of $F(X(H)) = \begin{pmatrix} f(x(H), y(H)) \\ g(x(H), y(H)) \end{pmatrix}$

On supposera que les fonctions f et g sont des fonctions de 12 -> LR de clane Et, c'est à die dérivables et telles que les dérivées partielles If, 21, 29. 29 sont continues sur une 6n remarquera que la quantité F(X(H)) ne dépend de t que par l'intermédiaire de X(4): on dit que (7) est autonome d'étude d'équations de la forme X'(1)=F(1,X(1)) est égale. ment fossible.

En introduit la définition naturelle suivante.

(i) Une solution de (8) est la donnée d'un couple (I,Y) où I est un intervalle de ir d'intérieur non vide et Y I > 12° est une fonction de clane 61 définie sur I et telle que y'(H=F(Y(H)).

(ii) En dit qu'une solution (J,Z) prolonge la solution (J,Y) si ICJ et

(iii) Godit que (F, Y) est une volution maximale s'il n'existe pas de solution (T, Z) qui la foolonge.

(1) Gn dit que (T, Y) est une solution globale si T=1R.

Remarque Si $(x,y) \rightarrow f(x,y)$ ne dépend par de la variable y et $(x,y) \rightarrow g(x,y)$ ne dépend par de la variable x, (x) se réduit à deux équations différentielles scalaires découplées

Théorème de Cauchy-lipschitz (admis)

On sq Fort de clane 8º ser 12.

(i) il existe une unique solution maximale au problème

(9)
$$\int X'(N) = F(X(N))$$

 $\int X(k_0) = X_0$

four tout to EIR et Xo EIR?

(ii) les graphes de deux solutions distinctes me se coupent pas.

(iii) si Fest lipschitzienne par report à X, ie ∃L, YX1,X2 €1R2,

 $\|F(X_2) - F(X_1)\| \le L \|X_1 - X_2\|,$

alors le problème (9) admet une unique solution globale.

(iv) la solution maximale de (9) est définie sur IT., T, I avec

(iv) la solution maximale de (9) est définie sur IT., T, I avec

T=-00 ou lim ||X(I)||=+00 Di T>00, et T=+00 ou lim ||X(I)||=+00 Si T+<+00.

Dans le cadre considéré ici, les points d'équilibre du système (6) sont les solutions constantes Xe telles que

F(Xe) = 0 (=) f(xe, ye) = g(xe, ye) = 0

In on pose $X = \begin{cases} xe \\ ye \end{cases}$ et $F(x) = \begin{cases} f(x,y) \\ g(x,y) \end{cases}$, $X = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$.

Un tel foint est dit asymptoliquement stable ssi four tout Xo suffisamment proche de Xe, alors la solution maximale de (9) est globale, au moins à drête, le définie au moins sur Cto, tool,

et vérifie lim X(t) = Xe.

Remarque Si x est une solution de (8) verifiant lim X(t)= Xe pour un certain Xe CER?, alors Xe est forcement ein point d'équilibre. En effet, lim X(1) = Xe implique for continuité de F que lim X'(H = F(Xe). On déduit donc du lemme p24 appliqué aux deux composantes de F que F(Xe)=0.

Afin de déterminer une condition suffisante particulièrement simple 27/ pour qu'un point d'équilibre soit asympholiquement stable, il est utile d'infroduire la notion de linéarisation au voisinage d'un tel point. Soit donc Le un point d'équilibre, ie tel que F(Xe)=0.

Le étant un vecteur constant, on a

$$\chi(H) = F(\chi(H))$$

(X-Xe)(H) = F(X(H)-F(Xe).

In utilisant l'approximation du premier ordre

F(XIH)_F(Xe) ~ VF(Xe) (X-Xe)(b)

on oblient le système

 $(x-x_e)(t) = \nabla F(x_e)(x-x_e)(t)$.

ou encore, en fosant Uft)= X(+)-Xe,

H(H= VF(Xe) H(H).

Le système s'appelle le système linéarisé au voisinage du point d'équilibre Xe.

On a alor le théorème suivant.

Soit Xe un point d'équilibre. Si toutes les valeurs propres de $F(X_e)$ ont une partie réelle strictement négative, alors Xe est asymptotiquement stable

Remarque

(on rappelle que
$$\nabla F(X_e) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(X_e) & \frac{\partial f}{\partial y}(X_e) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(X_e) & \frac{\partial g}{\partial y}(X_e) \end{cases}$$

Etude métrique des courbes

On se donne une combe paramétieé F: ICH - 1R avec p= 2 ou p=3 définie sur un intervalle I de M. au 0 8º pa norceaux partitionles.

Définition (longueur d'un arc). En suppose que F est de classe & 1 pour tECts. 4], to 6ty. On appelle longueur de l'arc défini

par F(t) four t variant entre to et to la quantité

L= S 11F'(4) 11 dt (fositive par définition)

où 11.11 est la norme Euclidienne.

Faisons tout de suite quelques remarques permettant de justifier cette

i) Tout d'abord, si dt représente un accrosisement infiniment petit du parametre t, ou autrement dit si to et ty sont infiniment proche l'un de l'autre, alors la formule de Taylor à l'ordre 1 nous permet tout d'abord d'écrise F(ty)_F(ts) ~ F'(t) (ty-ts) de sorte que 11F(h)-F(h) 1 ~ (h-ts) 11F'(H) = ["11F'(H) 11dh

(four des distances infraiment petités). Gr 11Flh. Flh) 11 correspond bien à la longueur de l'arc considéré (toujours pur des accrossements infiniment petits) comme une ligne droite en FCh) et FCh);

J(F(b), F(b))= 11 H(b) T(b) = 11 F(b)-F(b) 11.

La formule L= stallF(1) 1) dt peut donc être comprise comme une genéralisation.

ii) Rappelons que F'(1) suprésente le <u>recteur</u> vitesse du foint MII) à l'instant t et que 11F'(1) 11 représente donc la vitesse scalaire du foint MB à l'instant L'Intégrer la vitenc entre deux instants to et to donne bien la distance parconne entre ces deux instants. (c'a) évident preuse viene contante.

On retrouve par ailleurs avec la définition proposée de la longueur 2/ des formules bien connues:

iii) di F(H) = EA+B avec A et B des prints de RP, la combe est une ligne droite. La longueur de l'arc entre 2 instants to et ty est done 11F(h). Flb) 11=(ty-to) 11AH. Or la définition proposée permet bien de retouver cette valeur puisque

iv) four un cercle de rayon re, on a $F(\theta) = \pi \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)$. Le perimètre est donné par $2\pi n$. La définition proposée de la longueur donne $L = \int \|F'(0)\| d\theta = \int \|n \left(\frac{Sm\theta}{6000}\right)\| d\theta = \int \int d\theta = 2\pi n$

Définition (changement de paramétrage adminsible)

En dit que up = 2 (u) est un changement de paremetrage admissible si la fondion y est de clane & 1 et strickement monotone.

to:= (lu) La longueur d'un arc paramètre est invariante par changement de parametrage admissible. Proposition

Démonstration Rappelons tout d'abord que soi f'est une fonction continue, et l'une fondion de classe 61 sur un intervalle [4,4,7 et dont l'image est contenue dans le domaine de définition de f alors F(x)= f(x)

(us) = F(y)(us) = F(y)(us)

(us) = F(y)(us) - F(y)(us)

(us) = F(y)(us) - F(y)(us)

Bour la longueur L, cette formule de changement de variable donne

Si le changement de parametrage est strictement croinant, alors 4'(N) ≥0 v'in lout être rentré à l'intérieur de la norme. En a donc

SIF(H) II dt =
$$\int_{u_0}^{u_1} \|F'(Y|u)\| Y'(u) \| du = \int_{u_0}^{u_1} |G'(u)\| du$$
 ($u_0 \in u_0$) 3/

où G est la fonction définie par $G(u) = F(Y|u)$)

Où même, si le changement de paramétrage est strictement décroisant abors $\int_{u_0}^{u_1} \|F'(t)\| dt = \int_{u_0}^{u_1} \|F'(Y|u)Y'(u)\| du = \int_{u_0}^{u_1} \|G'(u)\| du$ ($u_0 \in u_0$)

où encore $\int_{u_0}^{u_1} \|F'(t)\| dt = \int_{u_0}^{u_1} \|G'(u)\| du$. ($u_0 \in u_0$)

La longueur d'un arc paramètré étant invariante par changement de paramètrage admissible, il peut être intéressant de privilégier un faramétrage particulier. B'est le rôle que jeut jour l'abscisse curviligne

Abscine curviligne

Définition
Soit to fixé. En choisit le point M= H(b) comme origine. En appelle abscisse curviligne du point M(t) la quantité

Alt) = \int \frac{11F'(\infty) \ldots}{2}

L'absuisse curviligne est donc définie à une oujune près et son signe varie relon que t<to ou t>to. Si t>to, elle coincide avec la longueur de l'arc entre to et t, et si t<to elle coincide avec l'opposé de la longueur de l'arc entre t et to. L'absuisse curviligne joue donc pour une courbe exactement le même role que l'abscisse "classique" pour une courbe exactement le même role que l'abscisse "classique" pour une droite (ou un axe) orienté et muni d'une origine.

Remarquons tout de suite que l'absaisse curviligne ést invariante far changement de paramétrage admissible croissant alors qu'elle change de signe sous l'effet d'un changement de paramétrage admis-

En effet, four un changement de paramétrage ourissant
$$u$$
 4/

slt) = $\int_{0}^{\infty} ||F'(Y)|| dt = \int_{0}^{\infty} ||F'(Y)|| ||Y'(U)|| du = \int_{0}^{\infty} -|Y'(U)|| ||F'(Y)|| ||Y'(U)|| du = \int_{0}^{\infty} -|Y'(U)|| ||F'(Y)|| ||Y'(U)|| du = \int_{0}^{\infty} -|Y'(U)|| ||Y'(U)|| du = -|Y'(U)|| ||Y'(U)|| ||Y'(U)|||$

Remarquons Également que si F' ne s'annule fas sur un intervalle, c'est-à-drie si F m'est pas constante sur intervalle (F' foura éventuel lement s'annuler en quelques points isolés), alors l'application t-> sit) est dérivable et strictement ovoissante puisque s'(1)= 11F'(1)11.

On a donc démontre la proposition suivante.

Proposition di F'ne s'annule fas sur un intervalle, l'abscisse curviligne définit un changement de paramétrage admissible strickment ownsant.

dons les hypothèses de la proposition, to set realise donc une bijection et on peut donc considérer l'application & telle que /4(11)=t. L'application y est dérivable sant aux points où F's'annule et 1 = 2'(1) Y'(11) $1 = \Delta(r) \mid (m)$ ie $4'(n) = \frac{1}{\Delta'(r)}$ où encore $(5')'(n) = \frac{1}{\|F'(\Delta'(n))\|}$

Remarquons alors qu'en utilisant l'abscisse auniligne comme paramétrage, le en considérant O(u) = F(Y(u)) avec 4 définie par $\{Y(u)=t\}$, alors $\|G'(u)\|=1$

En effet, G'(u) = 4'(u) F(4(u)) $ie G'(n) = \frac{F'(s'(n))}{\|F'(s'(n))\|}$

et donc 116'/w) 11 = 1.

On parle de paramétrisation normale

(la viterse scolaire Vout 1)

Proposition supposons que F n'admette pas de point stationnaire (F/H=0 VE Alors l'abscine curviligne définit une paramétrisation normale.

Exemples

1) $2(t) = t^2$

$$S'(t)= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$S(t)= \int_{t_0}^{t} \sqrt{1+4a^2} da.$$

3) /x(0)=1608

4) 2(0) = 1(0-00) 170

Repère de Frenet et combure des combes planes En suppose ici que p=2, que la courbe paramètrée est suffisamment régulière et qu'elle m'admet pas de print stationnaire. Ce soite à pour l'abscisse consigner.

Le recteur tangent à l'arc au print net) est par définition le vecteur F'(1). Ji on norme ce vecteur, on obtient le veeteur

$$\overrightarrow{f}(h) = \frac{F'(h)}{\|F'(h)\|} = G'(s(h))$$

où ste) représente l'absaine auniligne et 6 (SH) = F(t).

Demonstration

Il suffit de dériver la relation 6(s(t))=F(t) par raport à t four obtenir F(H) = D'(H) F'(D(H)) et de se souveris que for définition de l'abscisse curviligne s'(H2 11F'(H)).

Remarque Gnevit aussi souvent $\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{on}}{ds}$

es) un recteur de 12° de Prisque p=2, le vecteur tangent es) un veeteur de 12 de nouvre 1. Il existe donc un angle unique PE To, 271 C. tel que

Flus généralement, $\vec{\tau} = \begin{pmatrix} Gos \tau(A) \\ Sin \tau \end{pmatrix}$ fuisque cette relation dépende

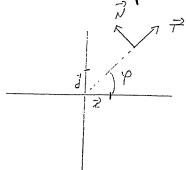
du point considéré. Y représente l'angle entre le vecteur 2 et le vecteur 7 au point d'absciss d'absciss d'ans la base (2,3), on a donc

tandés que bien entender, si on mote G(s) = (x(s)) |x'(s)| = cos Y(s) |y'(s)| = Sin Y(s)

$$|x'(a)| = \cos Y(a)
 |y'(a)| = \sin Y(a)$$

On définit le vecteur directement normal à 7 par la relation $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -\sin Y(s) \\ \cos Y(s) \end{pmatrix} = -\sin Y(s) \overrightarrow{\mathcal{X}}_{+} \quad \text{for } Y(s) \overrightarrow{j}.$

En obtient Nà partir de 7 en faisant une robation de + 30°.



Définition (repère de Frenet) Le repère (M(t), T, N) est appelé repère de Frenct de l'anc au point

Définition (combure)

La quantité $\gamma = \gamma'(s)$ s'appelle la combine de l'arc au print

définition (rayon de courture)

La quantité R = 1 s'appelle le rayon de combune de l'anc au foint M(t). (R'est bien définie n' 870)

Définition (contre de courbure) Le foint $\Omega = \Pi(H) + R \overline{N}$ s'appelle le centre de courbine de l'are au foint n(t) (se est bien définit si 8 70) foui un schéma ixi

Définition (coicle osculateur)

Le cercle de centre R et de sayon |R|= 1 s'appelle le cercle esculateur.

Puisque
$$\overrightarrow{T} = Gos Y(\Delta) \overrightarrow{X} + Sin Y(\Delta) \overrightarrow{J}$$

$$(\overrightarrow{N} = -Sin Y(\Delta) \overrightarrow{X} + Gos Y(\Delta) \overrightarrow{J}$$

on a los relations suivantes

$$\vec{N} = \frac{d\vec{\tau}}{d\gamma} \quad , \quad \frac{d\vec{N}}{d\gamma} = -\vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{4'(s)}{N} = 8N$$
, $\frac{dN}{ds} = -4'(s)\vec{T} = -8\vec{T}$
| Ges formules vont être etiles
four calculer la courbone.

d'émonstration

Immédiate, il suffit de dériver.

Remarque: 6n voit que de est orthogonal à F. Bea et attendu car 7.7=1

donc en déclirant 2 de .7=0 ie de L.7.

Van 1.

Calcul patique de la courbure

Go se donne
$$F(F) = {x(F) \choose y(F)}$$
 sans point stationnaire. On a utiliser les relations

Son calcule $\overrightarrow{T} = \frac{F'(F)}{\|F'(F)\|}$

The series of the station of the station of the series of the series

$$\Rightarrow 6n \text{ calcule } df = 8N \text{ par la relation}$$

$$df = df \times dt = 4f \text{ dt}$$

$$ds = df \times dt = 4f \text{ dt}$$

$$\rightarrow |V| = ||\overrightarrow{dT}|| \text{ puisque } \overrightarrow{dS} = \delta \overrightarrow{N}$$

- Pour connaître le signe de 8 on écrit que det (7, N) > 0 dépri car le spèce est orthonormé direct et on calcule det (T, dT). = 8 det (T,N)

Si del (T, dt) <0 alors 8=-18/ vas (la combure est rulle).

$$\begin{cases} x(t) = \pi \cos t & F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \frac{\pi 70}{y(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = \pi \sin t & F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$F(h) = n\left(\frac{-\sin t}{\cot x}\right)$$
 $||F(h)|| = n = \frac{ds}{dt}$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} sint \\ Got \end{pmatrix}$$

$$\frac{d7}{ds} = \frac{d7}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d7}{ds} \left(-\frac{6st}{-sint} \right)$$

$$|\mathcal{Y}_{+}||\frac{df}{ds}|| = \frac{1}{n}$$

$$det(f, df) = \left|\frac{-\sin t - \frac{\cos t}{n}}{\cos t - \frac{\sin t}{n}}\right| = + \frac{1}{n}$$

donc 8=1/n.

On retrouve que le rayon de courbine vant bien n'amme cela est attendu.

Exemple 2 (ellipse)
$$t \in \mathbb{G}, 2\pi \mathbb{C}$$
 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$

$$\int x(t) = a \operatorname{Cost} \qquad F(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \text{ a) o}$$

$$y(t) = b \operatorname{Sint} \qquad \left(y(t)\right)$$

$$F'(t) = \begin{pmatrix} -a & sint \\ b & cost \end{pmatrix} \qquad ||F'(t)|| = \sqrt{a^2 sin^2 t_+ b^2 co^2 t_-} = \frac{da}{dt}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 f_+ b^2 \cos^2 f}} \left(\frac{-a \sin f}{b \cos f} \right)$$

Apres qualques calcula, on months que
$$\frac{d\vec{7}}{ds} = \frac{d\vec{7}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t^2}} \times \frac{ab}{(a^3 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t} \begin{pmatrix} -b(s)t \\ -a snt \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ab}{(a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t)^2} \begin{pmatrix} -b(s)t \\ -a snt \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ab}{(a^3 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t} \begin{pmatrix} -a snt \\ -b snt \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ab}{(a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t} \begin{pmatrix} -a snt \\ -a snt \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ab}{(a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t} \begin{pmatrix} -a snt \\ -a snt \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ab}{(a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{(a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{(a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{(a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{(a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{(a^2 sn^2 t + b^2 to^2 t)^3 t}$$

On voit que la combune dépend du point contrainement au cercle.

Kemayue

En a vi que la formule du nayon de courbure était $R = \frac{1}{\sqrt{Y}} = \frac{ds}{dY} = \frac{s'(4)}{dY}$

Remaiquons que pour une variation infritésimale de l'angle Y, on a donc RdY = ds. ds représente la longueur

farcourue. Elle est égale à RXdY qui est la famule connue pour un cercle, bette formule reste donc valable four une combe quelanter En peut calculer plus directement la courbure et le nayon de

Montrons cette égalité en expriment F(t) et F'(t) dans la base (P, N)

$$F''(1) = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \frac{d7}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3(\frac{ds}{dt})^2 N}{dt}$$

$$= \frac{d7}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{3(\frac{ds}{dt})^2}{3(\frac{ds}{dt})^2} + \frac{3(\frac{ds}{dt})^2 N}{3(\frac{ds}{dt})^2}$$

Ainsi par linéarité du déterminant et du fait que jour une base orkonormée direct $(\overrightarrow{7}, \overrightarrow{N})$ on a det $(\overrightarrow{7}, \overrightarrow{N}) = 1$, il vient

det (F(H), F'(H)) =
$$8 \left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

et donc $8 = \frac{det(F(H), F'(H))}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$

Remarque

-> F'(1) est la viterse vectorielle et 11F(1) || est la viterse realaire da viterse vectorielle est divigée dans le sens de la bangente

-> F'(1) est l'accélération reobrielle. Elle est la somme d'une acceleration tangentielle $\frac{d^3}{dt^2}$ et d'une accélération namele $\frac{3ds}{dt}$ N = 8 11 F(N) N

→ La formule de la remarque frécédente s'écrit aussi
det (F'(H), F'(H)) =
$$8V^3 = \frac{V^3}{R}$$
 où Vest la viterse scalaire

V = 11F(H) |1

Exemples d'application

Exemples d'application

1) Rayon de courbure en coordonnées cartésiennes:
$$F(h) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{\left(x'(t) + y'(t)\right)^{3/2}}{x'(t)y''(t) - y''(t)x''(t)}$$

2) Rayon de combune en coordonnées folaires:
$$F(\theta) = \pi(\theta)$$
 (Sinte)

$$F'(\theta) = \pi'(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \pi(\theta) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \pi'(\theta) \stackrel{?}{\in}_{R} + \pi(\theta) \stackrel{?}{\in}_{Q}$$

$$F''(\theta) = (\pi''(\theta) - \pi) \stackrel{?}{\in}_{R} + 2\pi'(\theta) \stackrel{?}{\in}_{Q}$$

$$V = \sqrt{\pi^{2}(\theta) + \pi'(\theta)^{2}} \stackrel{?}{=}_{R} + 2\pi'(\theta) \stackrel{?}{\in}_{Q}$$

$$\det (F'(\theta), F''(\theta)) = \left| \pi(\theta) - \pi(\theta) - \pi(\theta) \right| = 2\pi'(\theta) + \pi^{2}(\theta) - \pi''(\theta) \pi(\theta)$$

$$Ainsi \qquad R = \frac{(\pi^{2}(\theta) + \pi'(\theta))^{3/2}}{2\pi'(\theta)^{2} + \pi^{2}(\theta) - \pi(\theta)\pi''(\theta)}$$

Cas des courbes gauches

En re place maintenant dans l'espace, c'estra-dire dans le cas p=3. On suppose ici encore que la courbe paramétrée est suffisamment régudière et qu'elle n'admet pas de foint stationnaire.

On peut donc considérer le verteur tangent unitaire $\vec{\tau}(t) = \frac{F(t)}{\|F(t)\|} = G'(s(t))$

ài s(f) représente l'abscisse curuligne et 6(s(f)) = F(t).

De même que précédemment le verteur $\frac{d}{ds}$ est a 7. En effet, d'après la relation 7, 7=1 on en déduit en dérivant par raport à s que $2\frac{d}{ds}$, 7=3.

Définition

On appelle courbure la quantite $X = \| \frac{d}{ds} \| \ge 0$.

En supposant que $X = \| \frac{d}{ds} \| \ge 0$, on définit alors le vecteur N de norme 1 par la relation $N = \frac{d}{ds} \frac{ds}{ds} \| \frac$

Remarque

You la courbure est définir comme une quantité foisible. Dans le cas

plan (p=2), la définition de la courbure conduit à une quantité

pouvant être positive ou négative. Cela provient du fait que dans

le cas plan le sens du vecteur N est imposé de soite à

ce que le repère (7, N) soit direct. Moi le sens du vecteur N

ce que le repère (7, N) soit direct. Moi le sens du vecteur N

est celeur du vecteur dr. La courbure est dans les deux cas

est celeur du vecteur dr. La courbure est dans les deux cas

la coordonnée de dr. dans la direction N: dr. dr.

Définition (trièdre de Frenet)
Le répère (NIA, 7, N, 7, N) est appelé trièdre de Frenet de l'are au point NIA). E'est un répère orlonoumé direct.

Remarque Cette définition impose en particulier le sens du vecteur 710 qui col tel que le triédre de Frenct soit direct.

```
Rappelo sur le produit vectouiel de vecteurs de 123
```

Soil
$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$
, $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

Le produit vectoriel est defini par la relation

$$\overrightarrow{\mathcal{U}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_2 \vee_3 & -\mathcal{U}_3 \vee_2 \\ \mathcal{U}_3 \vee_1 & -\mathcal{U}_4 \vee_3 \\ \mathcal{U}_4 \vee_2 & -\mathcal{U}_2 \vee_1 \end{pmatrix}$$

On vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

(ii) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ et donc $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{o}$

(iii) $\vec{u}_{\Lambda}(\vec{v}_{\Lambda}(\vec{v}_{\Lambda})) = (\vec{u}_{\Lambda}(\vec{v}_{\Lambda})\vec{v}_{\Lambda} - (\vec{u}_{\Lambda}\vec{v}_{\Lambda})\vec{v}_{\Lambda}$

(iv) le produit vectoriel est linéaire par rapport à chacune de ses variables ((û, V) -> Un V est la linéaire)

(V) Soit un parallélogramme ABCD (AB = DC). Hors ILABAABII = A (ABCD)

(VI) Si D'est l'angle entre les recteurs û et 7, alors 11 QAZII= 11QII 11VII 18m01.

vii) Boyin, le fuduit rectouel de deux recteurs unitaires erlogonaux fermet de définir un repère orthonormé direct (Q,V, Q,V).

A ce stade, ? a été défini, et la courbure est liéé à N (lorsque N'es) bien défini, le lorsque 800) par la relation dT= VN. Ynteremons nous à dN. Bar la relation $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$, il est clair que \vec{ds} est orthogonal ā N, et donc qu'il existe a et b telle que $\frac{d\vec{N}}{N_0} = a \vec{T} + b (\vec{T} \wedge \vec{N})$ Calculons $a = \frac{d\vec{N}}{ds}$. \vec{T} et $b = \frac{d\vec{N}}{ds}$. $(\vec{T}_A \vec{N})$ \mathcal{D}' après les relations $\overrightarrow{N}.\overrightarrow{7}=0$ et $\overrightarrow{N}.\left(\overrightarrow{7}_{N}\overrightarrow{N}\right)=0$, en dérivant par rapport à s on a $\frac{d\vec{N}\cdot\vec{T}=-\vec{N}\cdot\frac{d\vec{T}}{d\vec{A}}=-\vec{V}$ et $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot (\vec{r}_{N}\vec{N}) = -\frac{d(\vec{r}_{N}\vec{N})}{ds} \cdot \vec{N} = : -\theta$ Gradone di = -87-0 (TAN)

Definition (tousion)

O s'appelle la torsion de la courbe gauche

Gra $\theta = -\frac{d\vec{N}}{ds} (\vec{r}_{N} \vec{N}) = \frac{d(\vec{r}_{N} \vec{N})}{ds} \cdot \vec{N}$.

Kemarque La torsion m'a pas de signe frédéfini. Cels vient du fait que le sens de 710 à éte imposé de sorte que le repeir (7, N, 710) soit direct.

Définition (nougns de combune et de torsion)

Les quantités of et 1 s'appellent respedivement rayon de combune et rayon de torsion de la courbe.

Remarque

Dans le cas p=2 on a

$$\left(\frac{d\vec{T}}{ds} \right) = \left(-8 \right) \left(\frac{\vec{T}}{N} \right)$$

Dans le cas p=3 on a

En effet, puisque (7, N). (7. N) = 1 on a en dérivant d(7,N) = 0

et donc d(PAN) = aP+bN

 $a = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} \cdot \vec{r} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} \cdot \vec{r} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} \cdot \vec{r} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} \cdot \vec{r} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N}$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N})$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N})$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N})$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N})$ $d = \frac{d\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{N})}{ds} = 0 \text{ (as } \frac{d\vec{r}}{ds} = \delta \vec{N})$

On a la figosition suivante.

Poposition

On a les formules suivantes

$$\gamma = \frac{\|F(H) \wedge F'(H)\|}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$$

$$\theta = -\frac{\det(F(H), F'(H), F''(H))}{\|F'(H) \wedge F''(H)\|^2}$$

Notion de sphère osculatrice.

On envisage une sphère qui est tangente à la courbe au point Mb).

Le centre de cette sphère est donc situé de le plan passant par de centre de cette sphère est donc situé de le plan passant par Mb) et orthogonal au vecteur Pho. Notons a et b les coordonnées de ce centre de le répére Nb) Pa N (t) 2007.000.67000 coordonnées de ce centre de le répére Nb) Pa N (t) 2007.000.67000 coordonnées de la sphère dans le répére 2000 course de la sphère dans le répére

 $x^2 + (y-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$ (M(b) againtient à cette sphère)

On utilisé l'abscine curviligne comme paramétrage, de sorte que $\Pi(t=t_0) = M(s=0)$ et on suppose les coordonnées x_1 y et g d'un foint de la couste paramètrée sont exprimées en fonction de s.

Evaluors la quantité

Si x(s) + (y(s)-a)^2 + (3(s)-b)^2

au voisinage de s=0.

In fairant up dévelopment limite de $S \rightarrow OR(A)$ du voisonage de $S \rightarrow OR(A)$ du voisonage de $S \rightarrow OR(A)$ au voisonage de $S \rightarrow OR(A)$ divisorage de

$$\mathcal{H}_{0}\mathcal{H}(\Delta) = \left(\Delta - \frac{\Delta}{R^{2}} \frac{\Delta^{3}}{6}\right) \stackrel{?}{-} + \left(\frac{\Delta^{2}}{2R} - \frac{\Delta^{3}}{6R^{2}} \frac{dR}{d\Delta}\right) \stackrel{?}{N} - \frac{\Delta^{3}}{6R} \left(\stackrel{?}{+} \stackrel{?}{N} \stackrel{?}{N}\right) + o(\Delta^{3})$$

Dans le repère $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{T} \wedge \vec{N})$, on a donc

$$\begin{cases} \chi(\Delta) = \Delta - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{3}}{6} + o(\Delta^{3}) \\ y(\Delta) = \frac{\Delta^{2}}{2R} - \frac{\Delta^{3}}{6R^{2}} \frac{dR}{dA} + o(\Delta^{3}) \\ \overline{\chi}(\Delta) = -\frac{\Delta^{3}}{6} \frac{D}{R} + o(\Delta^{3}) \end{cases}$$

On a alors

$$F(s) - (a^{2}b^{2}) = x^{2}(s) + y^{2}(s) + z^{2}(s) - 2ay(s) - 2bz(s)$$

$$= \Delta^{2} \left(1 - \frac{a}{R} \right) + \frac{\Delta^{3} a}{3R^{2}} \frac{dR}{ds} + \frac{b\Delta^{3}}{3RT} + o(\Delta^{3}) \qquad T := \frac{1}{2} \sqrt{a}.$$

On veut que cette quantité soil la plus petite possible.

On remaique que si a=R, alors cette quantite est d'ordre 3

au moins en 1 au voisingle de 1=0. En parlera de

sphères esculatrices. Is o'étant pas fixé, il y a donc plusieus.

sphères esculatrices. Is best tel que

$$O = \frac{a}{3R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{b}{3RT}$$

alors la quantité est d'ordre >3.

la sphère obtenue s'appelle la sphère oscillatrice.

Juelques notions sur les intégrales doubles et triples

Intégrales doubles

On se donne un sous ensemble borné KCIR² tel que l'on prisse définir sa fontière.

soit { une fonction continue sur k et à valeurs réelles.

definition 1

On suppose dans un premier temps que k est tel que toute droite farallèle aux axes et qui rencontre k le rencontre selon un segment (éventuellement un point). L'intégrale de f sur K, notei II f(x,y) dx dy est définie par

ou, de manuere équivalente far ce que l'on appelle

le théorème de Fibini,

$$\iint f(x,y) dx dy = \iint f(x,y) dx \int dy$$

$$k$$

déficition 2

Si k ne vérifie pas la propriété demandée, on impose à k de se découper en une réunion finie d'ensembles désjoints qui venfient la propriété demandée et on pose

If flay de dy = If flay dady + ----+ If flay da dy

Cette définition ne dépend pas du choix du découpage.

Définition (partie quanable)

Si k vérifie la propriété de la définition 2, on dira que k est une partie quarrable de ur².

Définition (aire)

Soi ke est quarrable, on appellera airè de k et on notera $\mathcal{A}(k)$ la quarrable $\mathcal{A}(k) = \iint \mathbf{1} \, dx \, dy \qquad (f(x,y) = 1).$

Proposition (propriétés)

1) Si $k = k_1 U K_2$, $k_1 e k_2$ disjoints, et si f est continue sur k alors $\iint f(x,y) dx dy = \iint f(x,y) dx dy + \iint f(x,y) dx dy$

.) On suppose que $f \ge 0$ sur k et que f est non identiquement rulle sur k, ie $\exists z \in k$, f(z) > 0. Alors

If fay ldx dy >0.

Ainsi, si f est de signe constant su k et que f(k,y) dx dy =0 alou f(k,y) = 0 f(k,y) $\in K$.

) On se donne $\Psi: \mu^2 - s \mu^2$ un θ^1 difféormorphisme d'un ouvert Ω sur sen ouvert Ω . Soit $K \subset \Omega$ et $K = \Psi'(K)$ ie $\Psi(K) = K$. On sq \mathcal{J} est bien définie et continue sur K. Alors

 $\iint f(x,y) dx dy = \iint f(Y(u,v)) | \det (J_{\varphi}(u,v)) | du dv$ $\psi(u) = \lim_{k \to \infty} \psi(u,v) \int_{\mathbb{R}^{n}} \psi(u,v) du dv$

Intégrales triples

On se donne un sous-ensemble boiné KCiR³ tel que l'on prisse définir sa frontière. Soit of une fonction continue sur le à valeur néelles

On supose dans un premier temps que k est tel que l'intersection de k uc tout plan parallèle aux plans contenant les acces vorifie les conditions 2 / E 3 / E

repuises dans le cas des ensembles plans. chini, VZE [d, B], l'intersection du plan parallèle à [î,j') et parsant far la côle] avoc k est un ensemble k(z) pour lequel on peut envisager Ji flx, y, D dx dy

 $\iiint_{K} f(x,y,\xi) dxdydj = \iint_{X} f(x,y,\xi) dx dy \int_{X} d\xi.$ On pose alors

Dans le cas où k feut se décomposer en sous ensembles disjoints k_1, \dots, k_n qui verifient la propriété demandée, on pose $\iint f(x,y,\xi) dxdyd\xi = \iint \iint f(x,y,\xi) dxdyd\xi$

Cette définition re dépend par de la décomposition choisie.

Définition (partie quanable de 123)

di k verifie la propriété de la définition 2, on dira que k est une satué quarrable de m3.

Proposition (propriétés)

1) Les propriétés 1) et 2) de la précédente proposition restent vraies de le 3.

3) La propriété 3) de la précédente proposition reste vraie de le 3 et s'écrit

Il f(x,y,z) du dy dz = Il f(y(u,v,w)) | det (J, (u,v,w)) | du du dw.

Intégrales multiples généralisées

Gn se donne DCIRP, p=2,3, f définie sur D.

On suppose que

 $\exists (k_n)_{n \in W}$ croissante, le $k_n \subset k_{n+1} \subset U^p$ telle que $D = U k_n$

On supox que kn est borné et que II f peut être définie au sens de l'une des définitions précédentes 4n.

On admet auxi que $\forall k$ fermé borné (compad) de $\ell \ell'$ inclus de D, $\exists m \in W \ t \cdot g \ K \subset K_n$. On dit que (K_n) est une suite exhaustive de compact.

Définition 1. (f≥0)

6n suppose que f≥0 sur D et on considére la suite dn = ∫ f

Cette suite est croissante puisqu'elle vérifié dn = dn + Kn f

Cette suite, si elle est majorée, admet donc une

Cette suite, si elle est majorée, admet donc une

limite on la notera ∫ f. Cette limite ne dépend pas de la suite

limite on la notera ∫ f. Cette limite ne dépend pas de la suite

Kn choisie. Si elle est finie on det que ∫ f est convergente et que f admet

Kn choisie. Si elle est finie on det que ∫ f est convergente généralisée sur D.

li f n'a pas un signe constant sur D, on suppre que IIII < 00, ie que III admet une intégrale généralisée sur D.

On pose $\begin{cases} f^+ = \max(f, 0) \\ f^- = \max(-f, 0) \end{cases}$

Comme $\begin{cases} 0 \leq f' \leq |f| \\ 0 \leq f' \leq |f| \end{cases}$

les suites II f et II f

sont croissantes et majorées par

SIFI < 20.

En particulier, II f La et II f La.

On pose alors $\iint f = \iint f^{+} - \iint f^{-}$

```
définition
```

On appelle Inappe paramétrée une application $S:DCR^2 \rightarrow R^3$ (u,v) \mapsto (x,u) $(u,v) \mapsto (x,y,z)(u,v)$

où Dest un ouvert de vr2 et où les forctions DCIR2 -> IR DCIR²->UR et DCIR²->UR sont des fonctions définies sur D (u,v) +) y(u,v) (u,v) (-) z(u,v) et à valeurs réelles.

la courbe paramêtrée Définition are tracé sur la surface S On appelle

Y: ICR -> 183 1 (x,y,z)(u(t),v(t))

où u et v sont deux fonctions ICIR -> IR che classe 6 1 telles que le couple (ult), v(t) appartienne à D.

Les surfaces d'Équation 3= f(x,y) où f désigne une fonction de 122 dans Kemarque il sont bien entender des cas particuliers de surfaces de ce? puisqu'elles fouvent être décrites par le paramétrage suivant

 $\begin{cases} z(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ \xi(u,v) = \xi(u,v) \end{cases}$

Les deux premières coordonnées jouent le rôle de paramètres.

Les surfaces d'Equation f(x,y,z) = 0 sont localement des cas particulier le surfaces de le 3. En effet, si on suppose qu'en un print M=(xo, yo, Zo) le la surface (ie $f(x_0, y_0, z_0) = 0$) on a par exemple $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alor le lhéorème des fonctions implicites nous dit que localement autou le 170 la surface va admettre une représentation de la forme z=\$(x,y). On ont donc rameré à la remarque précédente.

Définition (point égulier)

On dit que le point M(u,v) de la surface 5 est un point régulier si en ce point le vecteur $\frac{2H}{2u} \wedge \frac{2H}{2v} \neq 0$, où de manière équivalente si la Jacobienne de S en ce point est de rang 2

Rappel
$$\frac{\partial H}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Jacobienne de
$$S = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial M}{\partial u} \\ \frac{\partial M}{\partial v} \end{array}\right)$$

Les vecteurs $\frac{\partial\Pi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\Pi}{\partial v}$ sont donc linéairement indépendants.

Définition (plan tangent en un point régulier) En un print régulier Mu, v) de la surface S, on appelle plan tangent T le plan parsant par ce print et de vecteurs dirècteurs $\frac{\partial\Pi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\Omega}{\partial v}$; T = Mu,v) + Vect { In [u,v), In [u,v)}

Tour une surface d'équation z = f(x,y) paramètrée par $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \end{cases}$ on a $\frac{2\pi}{2u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{2u} \end{pmatrix}$ et $\frac{2\pi}{2v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{2v} \end{pmatrix}$. Cas recteurs sont clairement

linéairement indépendants. Tous les prints sont donc réguliers.

1) La définition d'un print régulier me dépend par du paramétrage considéré. Choisissons en effet une autre paramétrisation de S, re considérons un difféomorphisme $\phi: \widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$ ($\widetilde{u}, \widetilde{v}$) $\to \phi(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (u, v) = (\phi_n|u,v), \phi_n|u,v$

et l'application S définie par $\widetilde{S} = \widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \longmapsto (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) | \widetilde{u}, \widetilde{v}) = S(\phi(\widetilde{u}, \widetilde{v})) = S(x, y, z) | \widetilde{u}, \widetilde{v})$

ce qui signifie que $\begin{cases} \widetilde{\chi}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = \chi \circ \phi(\widetilde{u},\widetilde{v}) \\ \widetilde{\chi}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = \chi \circ \phi(\widetilde{u},\widetilde{v}) \end{cases}$

\$16,5)=(\$,(0,5),\$/a,5 27 - 20 - 22 + 33 - 37 $\frac{\partial u}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial v} \end{pmatrix}$ J (Ø(ũ, v))

La dérivation donne alors

J. $(\tilde{u}, \tilde{v}) = J_s(\phi(\tilde{u}, \tilde{v})) J_{\phi}(\tilde{u}, \tilde{v})$

 $\left(\begin{array}{cc} \frac{3\pi}{3\pi} & \frac{3\pi}{3\pi} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{3\pi}{3\pi} & \frac{3\pi}{3\pi} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array}\right)$

 $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{u}} = a \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + b \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}$ $\frac{2\Delta}{3U} = 0$ $\frac{2\Delta}{3U} = 0$

Dire que les verteurs $\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{u}}$ et $\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{v}}$ sont libres est équiralent à due que les voidents $\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{v}}$ et $\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{v}}$ sont libres sons l'hypothèse ad-be \$0 (\$\phi\$ difféororphisme). En effet, suppoint par exemple que for et 30 sont libres Alons

(E) | da+ BC = 0

Sou l'autre sers, on procéde de la moranière en écrirant que

 $\left(\frac{2}{50},\frac{2}{50}\right) = \left(\frac{2}{50},\frac{2}{50},\frac{2}{50}\right) A^{-1}$

2) Le plan tangent d'un print régulier ne dépend pas de la parametrisation choisie.

Cela est clair d'après les relations

$$\frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial v}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}\right)}{\frac{\partial \tilde{n}}{\partial u}} = \frac{\left(\frac{\partial$$

Les plans tangent sont donc inclus l'un dans l'autre. Ils

3) La targerte à tout arc tracé sur 5 est contenue de le plan tangent V un arc back sur S.

Joh YICK -> K3

E → (x, y, 3) (u(t), v(E))

La tangente en
$$\pi(H)$$
 a l'anc \mathcal{F} a pour recteur dinacteur $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^{2} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \\ 2^{3} \end{pmatrix}$

= u'(b) $\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ (uth, v(u) + v'(b) $\frac{\partial \Pi}{\partial v}$ (uch, v(h))

Elle est donc contenu de le plan tangent à S en M/ull).

Définition (normale à une surface en un point régulier)

Son un point régulier $\Pi(u,v)$ de la surface S, on appelle normale à la surface S le verteur perpendiculaire au plan transpent défini par $\vec{N} = \frac{\partial \Pi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial v}(u,v)$ Le verteur $\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ est le verteur unitaire normal à la surface S.

Aire d'une surface

Cette quantité est indépendante de la paramétrisation choisie.

Remartue III est possible de justifier cette formule en raisonnant sur $\frac{2\pi}{2\pi}|u_{v,1}\rangle$ des variations infinitésimales du et du des paramètres u et v.

2n effet, au premier ordu on a $M(u+du, v+dv) = M(u, v) + \frac{2\pi}{2u}|u_{v,v}\rangle du + \frac{2\pi}{2v}|u_{v,v}\rangle dv$ Les points M(u,v) et M(u+du, v+dv) définissent donc

un parallélogramme ABCD avec A = M(u,v) et B,C,Dun parallélogramme ABCD avec A = M(u,v) et B,C,D M(u,v) + dv M(u,

On rapelle que l'aire de ce parallélogramme est donnée par || ABA AD || = || AT (u,v) A D (u,v) || du du.

On obtient l'aire totale du morceau de surface en intégrant (ie en sommant) cette quantité pour tous les points (u,v) de K.

Vérifions que A(En) est indépendante du parametrage choisi. En reprend les mêmes notations que dans les pages 3 et 4.

$$2n(u,v)$$
, $A(Z_{k}) = \iint_{u,v} \frac{\partial \Omega}{\partial u} [u,v] \wedge \frac{\partial \Omega}{\partial v} || du dv$

$$(\tilde{u},\tilde{v})\in \tilde{L}$$
 $(\tilde{u},\tilde{v})\in \tilde{L}$ $(\tilde{u},\tilde{v})\in \tilde{L}$ $(\tilde{u},\tilde{v})\in \tilde{L}$ $(\tilde{u},\tilde{v})\in \tilde{L}$

La linéarité du produit vedouiel, on a

$$\frac{\partial u}{\partial u} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} = \left(a \frac{\partial u}{\partial u} + b \frac{\partial u}{\partial v}\right) \wedge \left(c \frac{\partial u}{\partial u} + a \frac{\partial u}{\partial v}\right) + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} = ac \frac{\partial u}{\partial u} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{\partial v} + b \frac{\partial u}{\partial v} \wedge \frac{\partial u}{$$

de sorte que

de sorte que
$$A(Z_{k}) = \iint \frac{2\pi}{2u} \left(\phi(\tilde{u},\tilde{v})\right) \wedge \frac{2\pi}{2v} \left(\phi(\tilde{u},\tilde{v})\right) \| \det \int_{\mathcal{V}} L\tilde{u},\tilde{v} \right) d\tilde{u} d\tilde{v}$$

$$(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{k}$$

ce qui d'après le théorème de Fibini coincide exactement aux c

$$A(Z_k) = \iint \left\| \frac{\partial \Omega}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \Omega}{\partial v}(u,v) \right\| du dv$$
.

fuisque
$$K = \phi(\tilde{K})$$
.

1) soit une surface déterminée par une équation de la forme

$$z = f(x,y)$$
. Alors $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \end{cases}$
 $z(u,v) = f(u,v)$

Gna donc
$$\frac{\partial n}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2nf \end{pmatrix}$$
 $\frac{\partial n}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2nf \end{pmatrix}$ $\frac{\partial n}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ce qui donne
$$\|\frac{\partial \Pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Omega}{\partial v}\| = \sqrt{1 + (k+1)^2 + (k+1)^2}$$

Ainsi, en posant
$$\Sigma = \{(x,y,3), 3=f(n,y), (x,y) \in D\}$$

on a
$$A(\Sigma) = \iint \sqrt{1 + (2+f)^2 + (2+f)^2} dx dy$$
.

2) Considérons la demi-sphére
$$S = \frac{1}{2}(x, y, z)$$
, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$
Gn a $|z(u, v)| = u$
 $|y(u, v)| = v$
 $|z(u, v)| = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$

On se retrouve donc dans le cas précédent aux

$$2uf = \frac{-u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$$

$$2f = \frac{-v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$$

$$\sqrt{1 + (Q_{u}f)^{2} + (Q_{v}f)^{2}} = \sqrt{\frac{R^{2} - u^{2} - v^{2} + u^{2} + u^{2}}{R^{2} - u^{2} - v^{2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^{2} - u^{2} - v^{2}}}$$

$$6n \text{ a donc} \quad \mathcal{A}(S) = \iint \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} du dv$$

On replace en coordonnées polaires jour calculer cette intégrale

$$u(x, 0) = n \otimes 0$$

 $v(x, 0) = n \sin 0$

$$\int_{\mathcal{D}} (n, \theta) = \begin{cases} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{cases}$$
Sind

det Jaro)= r.

On oblient donc

$$A(s) = \iint \frac{R}{\sqrt{R^2 - \pi^2}} \pi d\pi d\theta$$

$$=2\pi R\int_{0}^{R}\frac{\pi}{\sqrt{R^{2}-n^{2}}}dn$$

$$= 277R \left[-\sqrt{R^2-R^2} \right]_0^R$$

La surface de la derni-sphère est donc 2TR2 La surface de la sphère est donc 4IIR?.

Champs de vecteurs

Définition (champ de vecteurs)

6n appelle champ de vecteurs est une application
$$V: DCR^P \rightarrow RP$$

(x,y) $\rightarrow V(x,y)$

aux $p=2$ or 3. 6n notera $V(x,y)=\begin{pmatrix} P(x,y) \\ O(x,y) \end{pmatrix}$ si $p=2$ et

 $V(x,y;\overline{s})=\begin{pmatrix} P(x,y,\overline{s}) \\ O(x,y,\overline{s}) \\ R(x,y,\overline{s}) \end{pmatrix}$ so $p=3$.

Définition (potentiel scalaire)

Son dit qu'un champ de verteurs dérive d'un potentiel
$$f: DCR^p \rightarrow R$$

et note $V = Grad f$ ou encore $V = \nabla f$ soi

$$\int P(x,y) = \frac{2}{3} f(x,y) \quad \text{soi} \quad p = 2$$

$$\int Q(x,y) = \frac{2}{3} f(x,y)$$
et
$$\int P(x,y,z) = \frac{2}{3} f(x,y,z)$$

$$\int R(x,y,z) = \frac{2}{3} f(x,y,z)$$

Remarque (importante)

(18 P, Q R de Jane 8)

Si f est de classe 6^2 , il est nécessaire d'après le Phéorème de Schwarz

(avoir les relations $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

vec x; et x; représentant x ou y si p=2 et x ou y ouz si p=3. Pela s'exprime de manière épubalente sous la forme

et $\begin{cases}
\partial_x Q - \partial_y P = 0 & \text{si } P = 2 \\
\partial_x Q - \partial_y P = 0 & \text{si } P = 3
\end{cases}$ $\begin{cases}
\partial_x Q - \partial_y P = 0 & \text{si } P = 3 \\
\partial_x R - \partial_x P = 0 & \text{si } P = 3
\end{cases}$

Ainsi, jour qu'un champ de veeteurs de clarse 61 deuve d'un plentiel, il est nécessaire que son rotationnel soit nul, c'est-à-due le vecteur rot défini par $\operatorname{not} V = \begin{pmatrix} \partial_{z} \\ \partial_{y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{z} Q - \partial_{y} P \end{pmatrix}$ si p=2 (ondit que le champ est instationnal) et $\operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} 2_x \\ 2_y \\ 2_y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2_y R - 2_x R \\ 2_y Q - 2_y P \end{pmatrix}$ focalement on admetera que la réciproque est rraie: $\operatorname{rot} V = 0 \Rightarrow \exists f \cdot q \quad V = \forall f \cdot q \quad V =$

Exemple Soit le champ de vecteur $V(x_1y_1\bar{y})^2 = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ in a alors stot $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ de vecteur vorticate $\vec{w} := \frac{1}{2} \operatorname{sot} V$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$ vaut donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que le champ en tout $\operatorname{point}(x_1y_1\bar{y})$

Dans ce dernier chapitre on va utiliser ensemble les combes para mêtrels, les surfaces paramètrées et les champs de verteurs foir introduire de rouvelles notions et énoncer des résultats importants introduire de nouvelles notions et énoncer des résultats importants intervenant de manière récurrente dans de nombreuses applications (électromagnétisme, mécampire des fluides, astrophyrique...)

Départion (circulation, travail)

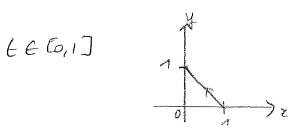
La circulation du champ V le long de Γ , ou encore le travail

effectué par cette force V le long de Γ est la quantité V definie $W := \int P dx + D dy + R dz := \int P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$ $+ \int_{t_0}^{t_0} Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt$ $+ \int_{t_0}^{t_0} R(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$

bette définition ne dépend pas du parametrage choisi.

Exemple 1

$$\begin{cases} x(l) = A - t \\ y(l) = t \\ \overline{z(l)} = 0 \end{cases}$$



 $V: \begin{cases} P(x,y,3) = y \\ Q(x,y,3) = -\infty \\ R(x,y,3) = 0 \end{cases}$

$$\operatorname{Tot} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

di V = 2P+2y0+2R = 0

(et non scalaire car plas

The champ derive d'un potentiel vecteur

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} t - 9 \qquad y = \frac{\partial}{\partial y} W_3 - \frac{\partial}{\partial y} W_2 \\
-x = \frac{\partial}{\partial y} W_1 - \frac{\partial}{\partial y} W_3 \\
0 = \frac{\partial}{\partial y} W_2 - \frac{\partial}{\partial y} W_1$$

$$W_3 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$W_2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$W_3 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$W_4 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$W_5 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$W_6 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Il n'y a pas unicité on peut ajouter n'importe quel gradient de fonction juisque rot V=0

$$W = \int (1-t) dt + \int t dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Remarque (importante)

Joint les 2 mêmes prints mais en parsant |x(t)| = 1-t pour $t \in C_{0,1}$ par l'origine |y(t)| = 0 |x(t)| = 0On trouvera W=0.

2(1)=0 y(1)=t-1 pour EE[1,2] Le travail dépend du chemin suin

Example 2
$$\begin{cases} x(0) = A - t \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$V: \begin{cases} P(x,y,3) = y \\ Q(x,y,3) = z \end{cases}$$

$$R(x,y,3) = z$$

$$\left(\text{div } V = 0 \text{ également} \right)$$

Le champ de vecteur deuve d'un pkntiel scalaire.

On vérifie que W=0, quelque soit le chemin suivi four relier le print (4,0) au print (0,1), belo vient du fait III le champ derive d'un fotentiel scalaire.

Définition (énergie phentielle) On appelle Energie Pokentielle et on note Ep l'opposé du pokentiel dont dérive un champ de force $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ instationnel:

$$V = \nabla f = \text{grad } f \iff V = -\nabla f = -\text{grad } F_p$$
.

Remarque De indique que le vecteur $\vec{V} = (\vec{k})$ donne la direction Le signe Θ indique que le vecteur $\vec{V} = (\vec{k})$ donne la direction dans lapuelle l'énergie phentielle diminue. En effet, au premier ache d'approximation autour d'un print $\mathbb{D}=\{z_0, y_0, z_0\}$, on a $\mathbb{E}_p(\mathbb{N}_0 + \angle \mathbb{V}_0) = \mathbb{E}_p(\mathbb{N}_0) + \angle \mathbb{V}_p^2 \cdot \mathbb{V}_0$ avec $\mathbb{V}_0^2 = \mathbb{V}(z_0, y_0, z_0)$ ie $\mathbb{E}_p[\mathbb{N}_0 + \angle \mathbb{V}_0^2) - \mathbb{E}_p[\mathbb{N}_0] = -\angle \|\mathbb{V}_0\|^2$ tinsi, si 2>0 son se déplace dans la direction de V), l'energie pokatielle

Le travail d'une force derivant d'un ptentiel scalaire ne dépend que des valeurs de ce potentiel aux points initial et Proposition final de la combe P. Plus précisément, si $V=-\overline{VEp}$, alors

En pardioulier, ce travail est rul. si la courbe est fermée.

Demonstration

Represent les mêmes notations que prêcédemment,
$$V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{E_P} \\ -2\sqrt{E_P} \end{pmatrix}$$
 $W = -\int_{0}^{E_P} 2\sqrt{E_P}(x(H),y(H),y(H)) x'(H) dH$
 $-\int_{0}^{E_P} 2\sqrt{E_P}(x(H),y(H),y(H),y(H)) y'(H) dH$
 $-\int_{0}^{E_P} 2\sqrt{E_P}(x(H),y(H),y(H),y(H)) y'(H) dH$
 $-\int_{0}^{E_P} 2\sqrt{E_P}(x(H),y(H),y(H),y(H)) y'(H) dH$
 $-\int_{0}^{E_P} 2\sqrt{E_P}(x(H),y(H),y(H),y(H)) dH = -(E_P(n_A) - E_P(n_A)) = E_P(n_A) - E_P(n_A).$

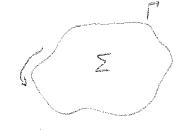
Ynversement, on montre que si tout travail d'un champ de force V d'exprime sous la farme (avec des notations claires)

 $V\Gamma$, $W=\int Pdx+Qdy+Rdy=E(x(k_0),y(k_0),J(k_0),J(k_0))$ four une certaine fondion E à valeurs de UR, alors le champ de Vecteur derive du polentiel -E, ie $\binom{p}{q}(x,y,3) = \binom{-3xE}{-3E}(x,y,3)$.

demonstration En considére par exemple un déplacement selon x uniquement. Mons l'égolite nous dit que $\forall z_0, x, y, \overline{y}$, $\int P(x(t), y, \overline{y}) x'(t) dt = E(x(b), y, \overline{y}) - E(x(1), y, \overline{y})$ nous dit que $\forall z_0, x, y, \overline{y}$, $f(x, y, \overline{y}) = f(x, y, \overline{y}) = f(x, y, \overline{y}) = f(x, y, \overline{y}) = f(x, y, \overline{y})$. $f(x, y, \overline{y}) = f(x, y, \overline{y}) = f($ l'ainst los remort à x, on a donc $P(x,y,z) = -\frac{1}{2}E(x,y,z)$.

tormule de Green-Riemann (cas plan)

(lièn entre intégrale curvilière le long d'une courbe fermée et intégrale double de la region limitée par cette combe)



Soil I un compact de 12 de frontière l'représentant une courbe paramétrée (sans point double) de clane 8º1. En se donne un change de force $V = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$ défini et de classe B^1 sur un ouveil contenant E. On suppose que l'est orientée de le sens trégono métrique

Alors
$$\int P dx + 0 dy = \iint (\partial_x \Omega(x, y) - \partial_y P(x, y)) dx dy$$

Remaique En retrouve que si V dérive d'un plestrel le travail sur un contour fermé est rul puisque 2,0=2, P.

Remaique importante Y est important que $V = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ soit défini et de classe B' sur Σ tout enteir. 2n effet, si on considére

$$\int P = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \text{fle cercle unite}$$

$$\int P = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \text{fle cercle unite}$$

$$\int P = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \text{fle cercle unite}$$

P et Q re sont pas boien définis en (0,0). In revanche, $\forall (xy) \neq (0,0)$,

Pet 8 ne sont pas bien définis en
$$(0,0)$$
, $(0,0)$, $(0,$

From contre
$$2\pi$$

$$\int P dx + Q dy = -\int \frac{\sin \theta}{1} \left(-\sin \theta\right) d\theta + \int \frac{\cos \theta}{1} \cos \theta d\theta$$

$$= \int d\theta = 2\pi \int d\theta$$

Soit I et l'verifiant les hyphèses de la formule de Green Riemann

In definition

$$A(\Sigma) = \iint dx dy$$

En psant
$$\begin{cases} P(x,y) = -\frac{1}{2}y & (qui'est bien de clane 8') \\ Q(x,y) = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

on observe que
$$A(\Sigma) = \iint (2Q - 2yP) dx dy$$

Le calcul de l'aire $A(\Sigma)$ feut donc se ramener à une intégrale o.

wiligne:
$$A(\Sigma) = \frac{1}{2} \int -y \, dx + x \, dy$$

Yntégrale de surface

Soit S:
$$DCR^2 \rightarrow R^3$$
 une surface paramètrée de classe 8'

(ui) $\rightarrow (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
 $\rightarrow (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

in suppose que $N(u,v) = \frac{\partial \Pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Omega}{\partial v} (u,v) \neq 0$.

 \mathcal{E}_{n} posant $m(u,v) = \mathcal{E} \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|}$ avec $\mathcal{E} = \pm 1$, on définit donc une rientation su toute la surface S.

Définition (intégrale de surface)

Soit S une surface overtée de clare & dont tous les foints sont s'éguliers. Soit V: 183 - 3183 un champ de vecleurs de clare & sur un ouvert contenant S(D). On appelle integrale de V sur S ou flux du champ de vecleurs à travers la surface S l'intégrale suivante D:

 $\phi = \iint V d\sigma := \iint V(H|u,v)) \cdot N(u,v) du dv$

br montre que & dépend de V et de S mais pas de la paramé. trisation choisie pour S.

Théorème de Stokes

Soil S' une surface ouentée, et soil s' son bord qui est un one ouente

La circulation du champ de vedeurs V le long de la combe l' limitant la surface S'est égale au flux du robationnel de V

ā bovers S: $\int P dx + 0 dy + R dz = \iint (rot V) d\sigma = \iint (rot V). N dudv$ If $\int P dx + 0 dy + R dz = \int \int (rot V) d\sigma = \int \int (rot V) dv$

 $V = \begin{pmatrix} P \\ R \end{pmatrix}$

Théorème d'Ostrogradski (analogue de 6:een-Riemann do 423) lou héorème de flux divergence)

Poil S une surface fermée qui délimite un volume DER3, et on suppose que la surface est orientée de l'intérieur vers l'extérieur du volume. Alors le flux d'un champ de vedeur V à travers la surface S est égal à l'intégrale (triple) sur le volume 1 (interieur à S) de la divergence de V:

$$\iint V dz := \iint V \cdot \vec{N} du dv = \iint div() dx dy dz$$

$$\int \int \int \int dx dy dz = \iint (\partial_z P + \partial_y Q + \partial_z R) dx dy dz$$

$$:= \iint (\partial_z P + \partial_y Q + \partial_z R) dx dy dz$$

8/

$$V = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

La rédaction de ces notes s'est imprisée notamment

- des cours en ligne de Gerard Lavau
- -s des cours de Jean Paul Tric
- -> de mes propres cours lorsque j'étais étudiant.