2016-2017 **LSMA 651**
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Contrôle du 30 mars 2017

Question de cours. Donner la définition de la différentielle $df(u)$ de f en u, montrer qu'elle est unique, et donner sa définition à l'aide du vecteur gradient noté $\nabla f(u)$.

Exercice 1. Donner le ou les points de minimum locaux de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$$

et montrer que cette fonction n'admet pas de point de minimum global.

Correction 1. Le vecteur gradient de f est donné par

$$Df(x,y) = (2x + y + \frac{3}{4}x^2, x + 2y)^t.$$

Les points critiques de f vérifient $Df(x,y) = 0$ et par conséquent vérifient les équations $2x+y+\frac{3}{4}x^2 = 0$ et $x+2y = 0$. On trouve deux points critiques donnés par $(0,0)$ et $(-2,1)$. Pour savoir si ces points critiques sont des points de minimum locaux, on étudie la matrice Hessienne H_f de f. Elle est donnée par

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{2}x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Au point $(0,0)$, on a

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 1 et 3 et sont donc strictement positives. La matrice est donc symétrique définie positive. La fonction f admet donc un minimum local au point $(0,0)$. Ce minimum n'est pas global car $f(0,0) = 0$ et f prend des valeurs négatives pour $y = 0$ et x qui tend vers $-\infty$.
Au point $(-2,1)$, on a

$$H_f(-2,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 3$. Le produit des deux valeurs propres est donc égal à -3 ce qui montre que les valeurs propres sont non nulles et de signe contraire. Par conséquent le point $(-2,1)$ n'est pas un point de minimum local.

Exercice 2. Montrer que la fonction $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ admet un unique point de minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et le déterminer.

Correction 2. La fonction f est une fonctionnelle quadratique. En reprenant les notations utilisées en cours et en TD, la matrice A et le vecteur b sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique définie positive donc la fonction f est infinie à l'infini de sorte que f admet un point de minimum global. La matrice A est symétrique définie positive donc la fonction f est strictement convexe de sorte que le point de minimum global est unique. Ce point de minimum noté X annule par ailleurs le gradient de f, c'est-à-dire qu'il est donné par la solution du système linéaire $AX = b$. Voir le TD2 pour plus de détails sur cet exercice.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier les points de minimum locaux de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f a (au moins) un point de minimum sur D. On notera m la valeur de f en un tel point.
3. Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
4. Déterminer le ou les points de minimum en se ramenant à une fonction d'une seule variable.

Correction 3. 1) On calcule les points critiques (qui annulent le gradient de f), c'est-à-dire les points qui vérifient les équations $x^2 = 1 + y^2$ et $xy = 0$. On trouve deux points critiques donnés par $(-1,0)$ et $(1,0)$. La matrice Hessienne de f est donnée par

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}.$$

En les deux points critiques, on vérifie facilement que la matrice Hessienne est diagonale avec des valeurs propres non nulles et de signe contraire, de sorte qu'elle ne peut pas être positive. Il n'y a donc pas de point de minimum local pour la fonction f.
2) D est compact et f est régulière, donc f admet un point de minimum global sur D.
3) La contrainte est nécessairement saturée car on a vu que les points critiques ne pouvaient pas être des points de minimum.

4) On remplace y^2 par $1-x^2$ de sorte qu'il s'agit de minimiser sans contrainte la fonction

$$g(x) = 4x^3 - 6x.$$

Une étude simple de cette fonction montre que le point de minimum est donné par $x = \sqrt{2}/2$. On trouve alors que les points de minimum de f sont donnés par $(\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$.