Exercice 1.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(t) = \left(1 + \mathrm{e}^{-t^2}\right)\left(y(t)^2 - 1\right).$$

1. Déterminer toutes les solutions constantes de l'équation (E) et préciser les variations des solutions dans chaque région du plan.

2. Justifier que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, l'équation (E) admet une et une seule solution maximale (I, y) vérifiant $y(0) = y_0$.

3. Dans cette question on suppose que $y(0) = 0$.

3.a. Montrer que la solution maximale (I, y) est globale, c'est à dire que y est définie sur $I = \mathbb{R}$.

3.b. Justifier que y admet une limite quand $t \to +\infty$, puis déterminer cette limite.

4. Dans cette question on suppose que $y(0) = 2$.

4.a. Montrer que $]-\infty, 0] \subset I$.

4.b. Justifier que y admet une limite quand $t \to -\infty$, puis déterminer cette limite.

4.c. Justifier que $y(t) \geqslant 2$ pour $t \in I \cap [0, +\infty[$.

4.d. Montrer que $y(t)^2 - 1 \geqslant \dfrac{3}{4} y(t)^2$ pour $t \in I \cap [0, +\infty[$, puis en déduire que

$$y'(t) \geqslant \frac{3}{4} y(t)^2 \quad \text{pour} \quad t \in I \cap [0, +\infty[.$$

4.e. Montrer que y explose en temps fini, c'est à dire que $I =]-\infty, T_{\max}[$ avec $0 < T_{\max} < +\infty$.

Exercice 2.

On considère la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)^3 \\ y(t) = \sin(t)^3, \end{cases} \qquad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$$

Déterminer la longueur de cette courbe, le repère de Frenet, le rayon de courbure et le centre du cercle osculateur en chaque point.

1. Solutions

Solution 1.

1. Les solutions constantes sont celles qui annulent le membre droit, c'est-à-dire $y = \pm 1$. Si une solution atteint une valeur dans l'un des intervalles $]-\infty, -1]$, $]-1, 1[$ ou $]1, \infty[$ toutes ses valeurs sont contenues dans cet intervalle car la trajectoire de la solution ne peut pas couper les trajectoires des solutions constantes (voir question suivante).
Le terme $1 + \mathrm{e}^{-t^2}$ étant strictement positif, on a les variations suivantes : Les solutions à valeurs dans $]-1, 1[$ sont strictement décroissantes ; celles à valeurs dans $]-\infty, -1]$, ou $]1, \infty[$ sont strictement croissantes.

2. Le membre droit de l'équation (E) est continue en (t, y) et est continûment différentiable par rapport à y. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

3. 3.a. D'après un théorème du cours la norme du couple $(t, y(t))$ explose lorsque t tend vers une borne de l'intervalle I. Or à la première question on a déjà vu que y est bornée (car $y(t) \in]-1, 1[$ pour tout $t \in I$). Par conséquent les bornes de I sont infinies.

3.b. La solution y est décroissante et minorée par -1. Il existe donc la limite $\ell = \lim_{t\to\infty} y(t)$ et on a $0 \geqslant y(t) \geqslant \ell \geqslant -1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Supposons par l'absurde que $\ell > -1$. Alors

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \mathrm{e}^{-t^2}\right)\left(y(t)^2 - 1\right) = \ell^2 - 1 > 0.$$

Ainsi pour $\varepsilon = (\ell^2 - 1)/2 > 0$ il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > t_0$ on a $y'(t) > \varepsilon$. On a

$$\forall\, t > t_0 \ : \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s)\mathrm{d}s > y(t_0) + \varepsilon(t - t_0),$$

ce qui contredit le fait que y est bornée. Conclusion : $\ell = -1$.

4. 4.a. Comme y est croissante on a $1 < y(t) \leqslant 2$ pour tout $t \in I \cap]-\infty, 0]$. Par le même raisonnement qu'au **3.a** on déduit que la borne gauche de l'intervalle I est $-\infty$. Puisque I contient également le temps initial $t = 0$ on déduit que $]-\infty, 0] \subset I$.

4.b. Comme dans le point **3.b** on montre que $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 1$.

4.c. On sait que $y(0) = 2$ et que y est croissante.

4.d. Soit $t \in I \cap [0, +\infty[$. On a $y(t)^2 \geqslant 4$, donc $4y(t)^2 - 4 \geqslant 3y(t)^2$ et finalement $y^2(t) - 1 \geqslant \frac{3}{4}y^2(t)$. En conséquence,

$$y'(t) = \left(1 + \mathrm{e}^{-t^2}\right)\left(y(t)^2 - 1\right) \geqslant y^2(t) - 1 \geqslant \frac{3}{4}y(t)^2.$$

4.e. L'idée est de comparer y à la solution maximale du problème de Cauchy $z'(t) = \frac{3}{4}z(t)^2$, $y(0) = 2$, qui est

$$z :]-\infty, \frac{2}{3}[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \frac{4}{2 - 3t}.$$

Montrons que pour t positif la courbe de y se situe au-dessus de celle de z ; cela impliquera que y explose en temps fini, car il en est de même pour z. Pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}_+$ on a

$$\int_0^t y'(s)y(s)^{-2}\mathrm{d}s \geqslant \int_0^t \frac{3}{4}\mathrm{d}s$$
$$\Longrightarrow\ -y(t)^{-1} + y(0)^{-1} \geqslant \frac{3}{4}t \quad \Longrightarrow \quad y(t) \geqslant \frac{4}{2 - 3t}.$$

Solution 2.

Avec $r(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)^3 \\ \sin(t)^3 \end{pmatrix}$ on a

$$\dot r(t) = \begin{pmatrix} -3\cos(t)^2\sin(t) \\ 3\sin(t)^2\cos(t) \end{pmatrix} = 3\cos(t)\sin(t)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

L'abscisse curviligne s vérifie

$$\dot s(t) = \|\dot r(t)\| = 3\,|\cos(t)\sin(t)| = 3\cos(t)\sin(t),$$

(comme $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ plus de valeurs absolues). Donc la longueur de la courbe est

$$L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \|\dot r(t)\|\mathrm{d}t = 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{3}{2}\left[\sin(t)^2\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Les vecteurs T et N du repère de Frenet sont :

$$T = \frac{\dot r(t)}{\|\dot r(t)\|} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad N = -\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la courbure γ par la relation $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \gamma N$ on calcule

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3\cos(t)\sin(t)}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Donc $\gamma = -1/(3\cos(t)\sin(t))$ et le rayon de courbure est $R = \frac{1}{\gamma}$. Le centre du cercle osculateur est donné par

$$r + RN = \begin{pmatrix} \cos(t)^3 \\ \sin(t)^3 \end{pmatrix} + 3\cos(t)\sin(t)\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(t)(1 + 2\sin(t)^2) \\ \sin(t)(1 + 2\cos(t)^2) \end{pmatrix}.$$

Remarque — *On peut déterminer la courbure par la formule directe (ce qui est plus long ici) :*

$$\gamma = \frac{\det(\dot r(t), \ddot r(t))}{\dot s(t)^3}$$
$$= \frac{9}{(3\cos(t)\sin(t))^3}\begin{vmatrix} -\cos(t)^2\sin(t) & \cos(t)(3\sin(t)^2 - 1) \\ \sin(t)^2\cos(t) & \sin(t)(3\cos(t)^2 - 1) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{3(\cos(t)\sin(t))^2}\begin{vmatrix} -\cos(t) & \cos(t)(3\sin(t)^2 - 1) \\ \sin(t) & \sin(t)(3\cos(t)^2 - 1) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{3\cos(t)\sin(t)}\begin{vmatrix} -1 & 3\sin(t)^2 - 1 \\ 1 & 3\cos(t)^2 - 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3\cos(t)\sin(t)}.$$