2017-2018
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines **MA100Bio**

Contrôle continu du vendredi 24 novembre 2017

Exercice 1. Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière simple de (E) puis résoudre (E).
3. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Correction 1. Les primitives de la fonction $a(x) = 2x$ sont les fonctions $A(x) = x^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante réelle quelconque. Donc les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = ce^{-x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. Il est par ailleurs clair que $y_p(x) = 1/2$ est solution de (E). Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La condition $y(0) = 1$ équivaut à $c = 1/2$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ si $n \geqslant 0$.

1. Montrer par récurrence que $(u_n) \in]0,1[$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

Correction 2.

1. Par hypothèse, $u_0 \in]0,1[$. Supposons que $u_n \in]0,1[$. On a donc également $(1-u_n) \in]0,1[$ de sorte que $u_{n+1} = u_n(1-u_n) \in]0,1[$.
2. Par définition, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$, donc la suite est décroissante.
3. La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente vers une limite l vérifiant $l(1-l) = l$, et donc $l^2 = 0$ ou $l = 0$.

Exercice 3. En justifiant votre réponse, dire si les suites suivantes ont une limite et si oui la calculer.

(a) $u_n = (-3)^n$ (b) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{2n^2+3}$ (c) $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$

Correction 3. (a) La première suite n'a pas de limite car si n est pair elle tend vers $+\infty$ tandis que si n est impair elle tend vers $-\infty$.
(b) On a clairement, en factorisant le numérateur et le dénominateur par n^2,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{2n^2+3} = 1/2$$

(c) On a

$$\frac{-1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

donc d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

et donc par suite $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0.5\,u_n + 8$ pour tout entier naturel n. Déterminer u_n en fonction de n puis étudier sa convergence.

Correction 4. On définit le nombre l tel que $l = 0.5\,l{+}8$, ce qui donne $l = 16$. La suite $v_n = u_n - l$ vérifie $v_{n+1} = 0.5v_n$, c'est donc une suite géométrique de raison 0.5, de sorte que $v_n = \frac{v_0}{2^n} = -\frac{15}{2^n}$ car $v_0 = u_0 - l = 1 - 16 = -15$. On a donc $u_n = v_n + 16 = -\frac{15}{2^n} + 16$ et par conséquent la suite u_n tend vers 16 quand $n \to \infty$.

Exercice 5. Calculer la somme des n premiers nombres impairs.

Correction 5. Il s'agit de calculer la somme S_n définie par

$$S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1),$$

et formée des termes d'une suite arithmétique de raison 2. On a donc

$$S_n = n\frac{1+(2n-1)}{2} = n^2.$$

Exercice 6. On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^3$. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Correction 6. On a $u_1 = 2^3 = 8 > u_0$, le deuxième terme est donc plus grand que le premier. Supposons maintenant que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, et montrons que $u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant 0$. Par définition, $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1}^3 - u_n^3 =$

$(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1}^2 + u_n u_{n+1} + u_n^2)$. Le polynôme $u_{n+1}^2 + u_n u_{n+1} + u_n^2$ étant toujours positif (il n'admet pas de racine réelle et le coefficient de plus haut degré est positif) et par hypothèse de récurrence $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant 0$.