2017-2018
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines MA100Bio

Contrôle continu du lundi 23 octobre 2017

Exercice 1. Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière simple de (E) puis résoudre (E).
3. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Correction 1. Les primitives de la fonction $a(x) = 2x$ sont les fonctions $A(x) = x^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante réelle quelconque. Donc les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = ce^{-x^2}$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. Il est par ailleurs clair que $y_p(x) = 1/2$ est solution de (E). Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La condition $y(0) = 1$ équivaut à $c = 1/2$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2$ (E_1)
2. $y' + y = 2\sin x$ (E_2)

Indications. Pour (E_1), on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Pour (E_2), on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = acos(x) + bsin(x)$.

Correction 2.

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y' + 2y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y(x) = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ qui est solution de (E_1)
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) + 2y_p(x) = x^2$
   $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2$.
   Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ convient.

Les solutions de (E_1) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \lambda e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre. Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les fonctions $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de cos et sin. On a $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$ solution de (E_2)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) + y_p(x) = 2\sin x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (a+b)\cos x + (-a+b)\sin x = 2\sin x$.
Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_p(x) = -\cos x + \sin x$ convient.
Les solutions de (E_2) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle $(x^2+1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ et trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$. On pourra vérifier que $y_p(x) = x$ est une solution particulière de l'équation.

Correction 3. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $a(x)$ est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, on peut choisir $A(x) = -\ln(u(x))$ où $u(x) = x^2+1$. Les solutions sont donc les $y(x) = \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \dfrac{\lambda}{x^2+1}$. Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre. On remarque que $y_p(x) = x$ convient. Les solutions sont obtenues en faisant la somme :

$$y(x) = x + \frac{\lambda}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel. Enfin, $y(0) = 3$ si et seulement si $\lambda = 3$. La solution cherchée est donc

$$y(x) = x + \frac{3}{x^2+1}.$$

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle

$$y' + 2y - y\ln(y) = 0$$

en effectuant le changement de fonction $z = \ln(y)$.

Correction 4. On effectue le changement de fonction $z = \ln(y)$ de sorte que $z' = y'/y$ et

$$y \ \text{ est solution de } y' + 2y - y\ln(y) = 0 \iff z' + 2 - z = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est formé des fonctions

$$z(x) = ke^x + 2.$$

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est donc formé des fonctions

$$z(x) = e^{ke^x+2.}$$

Exercice 5. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Correction 5. Les racines de l'équation caractéristique sont -3 et -1. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$y(x) = k_1e^{-3x} + k_2e^{-x}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.