Contrôle continu du vendredi 15 décembre 2017

Exercice 1.

Soient A et B les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de ces matrices.
2) Calculer les matrices AB et BA.
3) Que remarquez-vous, et que pouvez-vous en déduire ?

Correction 1.

1) En appliquant la formule du cours, on trouve que les déterminants valent 1.
2) On trouve que $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3) On en déduit donc que $B = A^{-1}$ et $A = B^{-1}$.

Exercice 2.

On considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} -x + 3y + 2z + 3t = -6 \\ 2x + y + z - 4t = 3 \\ 2x - y + 4z + t = 10 \\ x + y + z + t = 1 \end{array} \right. .$$

1) Déterminer la matrice M du système.
2) Résoudre ce système.
3) Vérifier le résultat obtenu par un calcul matriciel.

Correction 2.

Cet exercice a été fait en TD.

1) La matrice du système est $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) La méthode du pivot de Gauss conduit à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) On vérifie notre calcul en calculant le produit $A \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est bien égal $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

On désire résoudre l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' + 4y' + 3y = 0,$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. On pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

1) Ecrire l'équation (E) sous la forme matricielle $Y' = AY$.
2) Diagonaliser la matrice A, c'est-à-dire écrire A sous la forme $A = PDP^{-1}$ où P, P^{-1} et D sont des matrices à déterminer, avec D une matrice diagonale.
3) On pose alors $Z = P^{-1}Y$. Ecrire une relation entre Z' et Z. On admettra que $(P^{-1}Y)' = P^{-1}(Y')$.
4) Résoudre cette équation, c'est-à-dire trouver l'expression de $Z(t)$ en fonction de t.
5) En déduire $Y(t)$ et donc $y(t)$.
6) Fixer les constantes pour vérifier les conditions initiales.

Correction 3.
Cet exercice a été fait en TD.
1) La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$
2) En appliquant la méthode du cours, on trouve $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
3) On a $Y' = AY$ donc $Y' = PDP^{-1}Y$, donc $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$ où encore $Z' = DZ$.
4) En notant z_1 et z_2 les composantes de Z, on voit que $z_1' = -3z_1$ et $z_2' = -z_2$ ce qui donne $z_1 = k_1 e^{-3t}$ et $z_2 = k_2 e^{-t}$.
5) On a $P^{-1}Y = Z$ et donc $Y = PZ$ ce qui donne tout de suite $y(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-t}$.
6) On souhaite fixer les constantes k_1 et k_2 de telle sorte que $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. On trouve $k_1 = -3/2$ et $k_2 = 5/2$.

Exercice 4.
Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Diagonaliser A.
2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction 4.
1) Le processus de diagonalisation habituel conduit à $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.$$