2017-2018
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines MA100Bio

Corrigé succinct du contrôle du 6 octobre 2017

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2-3\,x+2}\ ; \quad h(x) = \ln(4\,x+3)\,.$$

Correction.

1. Il faut que le dénominateur ne s'annule pas donc $x \neq \frac{5}{2}$. En plus il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul, c'est-à-dire $(2+3x)(5-2x) \geqslant 0$, soit $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$. L'ensemble de définition est donc $[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}[$.
2. Il faut $x^2 - 3\,x + 2 \geqslant 0$. L'ensemble de définition est donc $x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.
3. Il faut $4x+3 > 0$. L'ensemble de définition est donc $]-\frac{3}{4}, +\infty[$.

Exercice 2. Pour calculer des limites faisant intervenir des différences de racines carrées, on rappelle qu'il est souvent utile de faire intervenir "l'expression conjuguée", c'est-à-dire d'utiliser la relation

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

En utilisant cette technique, calculer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1)$.

Correction.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = 1/2$.

Exercice 3. Calculer, en expliquant le raisonnement, les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2-3x-5}$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x+1}{e^{2x}}$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x+1}{e^{2x}}$.

Correction.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2-3x-5} = +\infty$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x+1}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = +\infty$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x+1}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Exercice 4. Résoudre

1. $\ln(x^2) + \ln(x+2) = \ln(x(x+1))$;
2. $\sin(\frac{x}{4}) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction.

1. Il faut tout d'abord $x \neq 0$, $x+2 > 0$, et $x(x+1) > 0$. En utilisant les propriétés du logarithme, l'équation s'écrit aussi $\ln(\frac{x^2(x+2)}{x(x+1)}) = 0$, c'est-à-dire $\ln(\frac{x(x+2)}{x+1}) = 0$ ou encore $\frac{x(x+2)}{x+1} = 1$ et donc $x^2+x-1 = 0$. Les racines de ce polynôme sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Elles vérifient les contraintes et sont donc les solutions de l'équation ;
2. $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc les solutions sont telles que $\frac{x}{4} + 2k\pi \in [-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et donc $x \in [-5\pi, \pi] + 8k\pi$.

Exercice 5. Donner l'ensemble de définition, le tableau de variations et les limites correspondantes de la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Correction. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2} \geqslant 0.$$

La fonction est donc croissante et elle tend vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 6. Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \sin^2(2x) + \ln((x+1)^2).$$

Correction. On a

$$f'(x) = 4\sin(2x)\cos(2x) + \frac{2}{x+1}.$$