Travaux Pratiques Séance 5.
Fast Marching Method pour l'équation Eikonale
D11-4 APPROXIMATION NUMÉRIQUE POUR LA PROPAGATION DE FRONT.

H. ZIDANI - C. CHALONS 20 Février 2009

On s'intéresse à la propagation de front en 2d, modélisée ici par l'équation Eikonale:

$$||\nabla T(x,y)||F(x,y) = 1, \quad (x,y) \notin \Omega_0, \tag{1}$$
$$T(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega_0, \tag{2}$$

où $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine correspondant à la "zone brulée" initiale. Ainsi, à l'instant t, la zone brulée correspond à $\Omega_t := \{(x,y),\ T(x,y) \le t\}$, et le front, $\Gamma_t := \partial\Omega_t$, est l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $T(x,y) = t$.

On étudiera les deux exemples suivants :

Exemple 1. ("un trou") $F(x,y) = 1$, $\Omega_0 = (0,0)$. Puis $\Omega_0 = \{(x,y), ||(x,y)|| \le 0.5\}$. [1]

Exemple 2. ("2 trous") $F(x,y) = 1$, et $\Omega_0 := \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ||X - A|| < 0.5 \text{ ou } ||X - B|| < 0.5\}$ avec $A = (1,0)$ et $B = (-1,0)$. [2]

Schéma. On se donne une grille régulière (x_i, y_j) ($x_i = ih_x$ et $y_j = jh_y$, comme dans les précédents TP), et on pose $I^0 := \{(i,j),\ (x_i,y_j) \in \Omega_0\}$, qu'on suppose non vide. On cherche alors $T = (T_{i,j})$ solution de

$$\max\left(\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h_x}, \frac{T_{i,j} - T_{i+1,j}}{h_x}, 0\right)^2 + \max\left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{h_y}, \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{h_y}, 0\right)^2 = \frac{1}{F_{i,j}^2}, \quad \forall (i,j) \notin I^0, \tag{3}$$

$$T_{i,j} = 0, \quad \forall (i,j) \in I^0,$$

avec $F_{i,j} := F(x_i, y_j)$.

On choisira en pratique $h_x = h_y$.

Pour implémenter l'algorithme FMM (Fast Marching Method), on procède en plusieurs étapes:

1. Programmer la fonction `resolution1` (formulaire donné en Annexe), qui à des valeurs $\{\bar{T}_{i\pm1,j}, \bar{T}_{i,j\pm1}\}$ associe une solution $\theta = T_{ij}$ de (3).

[1] Solution exacte donnée par $T(x,y) = ||(x,y)||$ dans le premier cas, $T(x,y) = \max(||(x,y)|| - 0.5, 0)$ dans le deuxième cas.

[2] Solution exacte donnée par $T(x,y) = \min(\max(||(x,y) - A|| - 0.5, 0), \max(||(x,y) - B|| - 0.5, 0))$.

2. Initialisation. Dans le cas de l'exemple 1, avec $\Omega_0 = (0,0)$, initialiser les variables (globales) `T`, `TAB`, `Pile`, et la variable `Pile_test`, comme suit:

- `T` est une matrice de valeurs `T(i,j)` telle que `T(i,j)` $= 0$ si $(i,j) \in I^0$, et `T(i,j)` $= \infty$ sinon (on prendra en pratique une valeur numérique `INF` grande, par exemple `INF=50`).

- `TAB` est une matrice de valeurs `TAB(i,j)` de même taille que `T`, telle que `TAB(i,j)` $= 1$ si $(i,j) \in I^0$ et `TAB(i,j)` $= 0$ sinon. Dans la suite, les points tels que `TAB(i,j)` $= 1$ sont considérés comme "gelés", c'est à dire que la valeur `TAB(i,j)` ne doit plus être modifiée. Les points tels que `TAB(i,j)` $= -1$ seront considérés comme valeurs d'"Essai" (donc éventuellement les valeurs `TAB(i,j)` seront à recalculer).

- `Pile` est un tableau vide initialement. Dans la suite, `Pile` contiendra une liste de valeurs selon la structure suivante :

$$\texttt{Pile} = \begin{bmatrix} i_1 & j_1 & \bar{T}_{i_1,j_1} \\ i_2 & j_2 & \bar{T}_{i_2,j_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

- Enfin initialiser la variable `Pile_test` qui devra contenir la liste des indices (i,j) voisins des indices de I^0 (c'est à dire tels que $(i+1,j)$ ou $(i-1,j)$ ou $(i,j+1)$ ou $(i,j-1)$ est dans I^0) :

$$\texttt{Pile\_test} = \begin{bmatrix} i'_1 & j'_1 \\ i'_2 & j'_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

3. Compléter la fonction `Calculer(Pile_test)` qui devra effectuer les opérations suivantes : pour chaque couple (i,j) de `Pile_test`, **dans le cas où le point n'est pas "Gelé" :**

- Estimer sa valeur θ (par `resolution1`).
- Si $T_{i,j} = \infty$ ajouter le point $[i\ j\ \theta]$ dans la `Pile`, sinon remplacer $\bar{T}_{i,j}$ par θ dans `Pile`.
- Faire $T_{i,j} \leftarrow \theta$.
- Spécifier que (i,j) est un point d'"Essai".

On fournit la fonction `Trier()` qui a pour effet de trier les lignes de `Pile` suivant les valeurs croissantes de sa troisième colonne.

4. Compléter alors les tableaux `T, TAB, Pile` de sorte qu'ils contiennent les valeurs suivantes :

T	TAB	Pile
0	1 (Gelé)	
$T_{i,j} > 0$	-1 (Essai)	$[i, j, T_{i,j}]$
∞	0	

les valeurs $T_{i,j}$ dans `Pile` étant rangées dans l'ordre croissant.
Ceci termine l'étape d'initialisation !

5. Boucle principale. Programmer dans la boucle principale l'algorithme suivant:

- *Prendre le premier point de la Pile et le geler :*
  - Calculer `i,j` et la valeur `v` du premier point de la `Pile`
  - Supprimer cet élément de la `Pile`
  - Ajuster la valeur de `T`
  - Ajuster la valeur de `TAB`

- *Avancement du front :*
  - Redéfinir la `Pile_test` avec les 4 nouveaux points voisins possibles.
  - Faire les calculs pour cette `Pile_test`.
  - Trier par ordre croissant les valeurs des points de `Pile`.

6. Lorsque des points (x_i, y_j) touchent le bord du maillage, constater que la fonction `resolution1` ne marche plus. Utiliser alors la fonction fournie `resolution2`, qui aux indices `i,j` et à `f` (correspondant à $F(x_i, y_j)$), associe la valeur $\theta = T_{i,j}$ correcte de (3) (si on suppose de plus que $T = \infty$ pour les valeurs du bord, c'est à dire pour les valeurs hors du domaine de résolution).

7. Tester les exemples 1 et 2. Dans le cas d'un domaine Ω_0 non réduit à un point, il faudra adapter la définition de `Pile_test` dans l'étape d'initialisation.

8. Vérifier, à l'aide d'un test, qu'à la fin de l'algorithme l'équation (3) est vérifiée pour tout couple $(i, j) \notin I^0$.

Annexe : `function` θ`=resolution1(t1,t2,t3,t4,f)`.

Aux valeurs

$$\{t_1, t_2\} = \{T_{i-1,j}, T_{i+1,j}\},\ \{t_3, t_4\} = \{T_{i,j-1}, T_{i,j+1}\}, f = F(x_i, y_j),$$

on associe θ une solution de

$$\max(\theta - t_1, \theta - t_2, 0)^2 + \max(\theta - t_3, \theta - t_4, 0)^2 = h^2/f^2$$

avec $h = h_x = h_y$.
Notons $v_1 = \min(t_1, t_2)$ et $v_2 = \min(t_3, t_4)$. Cette solution est définie par:

$\longrightarrow$ Si $\max(v_1, v_2) - \min(v_1, v_2) < \dfrac{h}{f}$:

$$\theta = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2\frac{h^2}{f^2} - (v_1 - v_2)^2},$$

$\longrightarrow$ Si $\max(v_1, v_2) - \min(v_1, v_2) \geq \dfrac{h}{f}$:

$$\theta = \min(v_1, v_2) + \frac{h}{f}.$$