Travaux Pratiques Séance 3.
Schéma de Lax-Friedrichs et méthodes d'ordre supérieur pour l'équation Eikonale

D11-4 Approximation numérique pour la propagation de front.

H. Zidani - C. Chalons 6 Février 2009

On désire tester divers schémas "aux différences finies" pour l'équation Eikonale

$$\begin{aligned} &v_t + ||\nabla v|| = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^2 \\ &v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Schéma de Lax-Friedrichs Local (LLF) Il s'agit du schéma

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n}}{\Delta t} + g^{LLF}(u_x^-, u_x^+; u_y^-, u_y^+) = 0 \tag{1}$$

avec

$$u_x^{\pm} = \pm \frac{V_{i\pm1,j}^n - V_{i,j}^n}{h_x} \tag{2}$$

$$u_y^{\pm} = \pm \frac{V_{i,j\pm1}^n - V_{i,j}^n}{h_y} \tag{3}$$

et

$$g^{LLF}(u_x^-, u_x^+; u_y^-, u_y^+) := \sqrt{(\frac{u_x^+ + u_x^-}{2})^2 + (\frac{u_y^+ + u_y^-}{2})^2} - \frac{C_x}{2}(u_x^+ - u_x^-) - \frac{C_y}{2}(u_y^+ - u_y^-), \tag{4}$$

avec par exmeple les constantes $C_x = C_y = 1$, ou plus généralement[1]

$$C_x = \frac{\max(|u_x^-|, |u_x^+|)}{\sqrt{\max(|u_x^-|, |u_x^+|)^2 + \min(|u_y^-|, |u_y^+|)^2}}, \quad C_y = \frac{\max(|u_y^-|, |u_y^+|)}{\sqrt{\min(|u_x^-|, |u_x^+|)^2 + \max(|u_y^-|, |u_y^+|)^2}}.$$

[1] Plus généralement, pour une équation $v_t + N(v_x, v_y) = 0$ avec N lipschitzienne, on considère C_x et C_y des constantes qui vérifient $|N(u_2, v) - N(u_1, v)| \leq C_x|u_2 - u_1|$ et $|N(u, v_2) - N(u, v_1)| \leq C_y|v_2 - v_1|$. Le schéma (LLF) est alors obtenu avec $g^{LLF}(u_x^-, u_x^+; u_y^-, u_y^+) = N(\frac{u_x^+ + u_x^-}{2}, \frac{u_y^+ + u_y^-}{2}) - \frac{C_x}{2}(u_x^+ - u_x^-) - \frac{C_y}{2}(u_y^+ - u_y^-)$.

Schéma de Lax-Friedrichs modifié (LLF2). Afin d'améliorer l'estimation des dérivées v_x et v_y dans le schéma précédent, on considère la modification suivante:[2]

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n}}{\Delta t} + g^{LLF}(a^-, a^+; b^-, b^+) = 0 \tag{5}$$

où $a^{\pm}$ et $b^{\pm}$ sont des approximations des dérivées v_x et v_y resp., définies par

$$a^- := u_x^- + \frac{h_x}{2} m(u_{xx}^{--}, u_{xx}^{+-}) \tag{6}$$

$$a^+ := u_x^+ - \frac{h_x}{2} m(u_{xx}^{+-}, u_{xx}^{++}) \tag{7}$$

$$b^- := u_y^- + \frac{h_y}{2} m(u_{yy}^{--}, u_{yy}^{+-}) \tag{8}$$

$$b^+ := u_y^+ - \frac{h_y}{2} m(u_{yy}^{+-}, u_{yy}^{++}), \tag{9}$$

avec

$$\begin{aligned} u_{xx}^{--} &:= \frac{V_{i,j} - 2V_{i-1,j} + V_{i-2,j}}{h_x^2} \\ u_{xx}^{+-} &:= \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h_x^2} \\ u_{xx}^{++} &:= \frac{V_{i+2,j} - 2V_{i+1,j} + V_{i,j}}{h_x^2}, \end{aligned}$$

et $u_{yy}^{--}, u_{yy}^{+-}, u_{yy}^{++}$ définis de manière analogue, et enfin m est la fonction définie par

$$m(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \le |y| \text{ et } xy \ge 0, \\ y & \text{si } |x| > |y| \text{ et } xy \ge 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mise en oeuvre et tests.

1. a) Programmer le schéma (LLF) et le tester sur l'exemple des 2 trous.[3]
b) Vérifier numériquement qu'on a une condition de type CFL à respecter pour la stabilité du schéma. Quelle est cette condition ? Etant donnés M_x et M_y fixés,[4] comment choisir

[2] Voir exercice 4. Ce schéma rentre dans la classe des schémas ENO ou "Essentially Non Oscillating".

[3] $v_0(X) = \min(1, ||X-A|| - 0.5, ||X-B|| - 0.5)$, $\Omega = [-3,3]^2$, $V_{bord} = 1$, où $A = (-1,0)$ et $B = (1,0)$. Solution exacte: $v(t,X) = \min(1, \max(||X-A|| - 0.5 - t, -0.5), \max(||X-B|| - 0.5 - t, -0.5))$.

[4] M_x, M_y sont les nombres de points de discrétisation de $[x_{min}, x_{max}]$ et de $[y_{min}, y_{max}]$ respectivement. On travaillera sur un domaine de résolution $\Omega = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$.

le pas de temps Δt qui soit maximal ?
c) Estimer l'erreur L^∞ pour $T = 0.5$ (et par exemple $M_x = M_y = 40$). Estimer de même l'erreur $||V - V_{ex}||_{\ell^\infty(E)}$ sur l'ensemble des points $E := \{(x_i, y_j), |v(x_i, y_j)| \leq \epsilon = 0.1\}$.
d) Comparer les schémas (LLF) et (SL) en terme de temps de calcul, de précision, de condition CFL.
e) Comment modéliser une propagation de front dans le sens opposé ?

2. Programmer le schéma (LLF2). Comparer l'erreur, et la localisation du front, par rappport au schéma (LLF). Quel est, a priori, l'ordre de consistance en espace et en temps ?

3. a) Comment s'écrirait le schéma (LLF) pour le problème de rotation suivant: $v_t + f(x, y) \cdot \nabla v = 0$ avec $f(x, y) = (-y, x)$ (penser à préciser les valeurs de C_x et C_y, ainsi que le calcul du pas de temps maximal...)?
b) A partir du schéma (LLF2), programmer un schéma qui soit consistant d'ordre 2 à la fois en espace et en temps. On utilisera une méthode de Runge-Kunta d'ordre 2 (RK2), donnée par exemple par la méthode de la tangente améliorée. Celle-ci s'écrit (ici à l'ordre 1 en espace pour simplifier les notations) :

$$\frac{V_{i,j}^{n+1/2} - V_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} + g^{LLF}(u_x^{-,n}, u_x^{+,n}; u_y^{-,n}, u_y^{+,n}) = 0 \tag{10}$$

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + g^{LLF}(u_x^{-,n+1/2}, u_x^{+,n+1/2}; u_y^{-,n+1/2}, u_y^{+,n+1/2}) = 0 \tag{11}$$

avec

$$u_x^{\pm,\alpha} = \pm\frac{V_{i\pm1,j}^\alpha - V_{i,j}^\alpha}{h_x} \tag{12}$$

$$u_y^{\pm,\alpha} = \pm\frac{V_{i,j\pm1}^\alpha - V_{i,j}^\alpha}{h_y} \tag{13}$$

Exercices.

1. Montrer que le schéma (LLF) est monotone sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{h_x} + \frac{\Delta t}{h_y} \leq 1.$$

2. Pour l'équation $v_t + F(x,y)||\nabla v|| = 0$ (avec $F \geq 0$) sur le domaine Ω, on considère le schéma suivant

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + g^{(2)}(u_x^-, u_x^+; u_y^-, u_y^+) = 0$$

avec

$$g^{(2)}(u_x^-, u_x^+; u_y^-, u_y^+) := F(x,y)\sqrt{(\frac{u_x^+ + u_x^-}{2})^2 + (\frac{u_y^+ + u_y^-}{2})^2} - \frac{C_x}{2}(u_x^+ - u_x^-) - \frac{C_y}{2}(u_y^+ - u_y^-). \quad (14)$$

et $C_x = C_y := max\{F(x,y),\ (x,y) \in \Omega\}$. Montrer que le schéma est monotone sous la condition CFL suivante:

$$\Delta t \frac{C_x}{h_x} + \Delta t \frac{C_y}{h_y} \leq 1.$$

3. On suppose que Φ est une fonction régulière au voisinage du point x.
a) Montrer que si $V_j^n = \Phi(t_n, x_j)$ et $t_n \to t$ et $x_j \to x$, alors $u_x^\pm = \Phi_x(t,x) + O(h_x)$.
b) Montrer aussi que $\frac{u_x^+ + u_x^-}{2} = \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2h_x} = \Phi_x(t,x) + O(h_x^2)$.
c) Conclure que

$$\left|g^{LLF}(u_x^-, u_x^+; u_y^-, u_y^+) - ||\nabla\Phi||\right| \leq Const(h_x + h_y).$$

On dit qu'on a une approximation consistante d'ordre 1 en espace.

4. On suppose que Φ est une fonction régulière au voisinage du point x.
a) Montrer que $u_x^- + \frac{h_x}{2}u_{xx}^{--} = \Phi_x(t,x) + O(h_x^2)$
b) En déduire que $a^\pm = \Phi_x(t,x) + O(h_x^2)$ où $a^\pm$ est défini par (6)-(7), et de même $b^\pm = \Phi_y(t,x) + O(h_y^2)$.
c) En conclure que: $g^{LLF}(a^-, a^+; b^-, b^+) = ||\nabla\Phi|| + O(h_x^2 + h_y^2)$. On dit qu'on a une approximation consistante d'ordre 2 en espace.